



Jan Witkowski

Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA POCZĄTKUJĄCYCH

Wstęp

W badaniu problemów klasycznej mechaniki ośrodków materialnych używany jest m.in. ciągły model fizyczny (continuum). Jest to ograniczony znaną powierzchnią brzegową obszar badanego ośrodka, o znanej objętości, znanym (lub założonym) rozkładzie gęstości i innych własności fizycznych. Idealizuje on w przyjętym stopniu wydzielony z otoczenia układ mechaniczny lub ośrodek materialny. Skutki wydzielenia z otoczenia reprezentują odpowiednie zewnętrzne oddziaływania mechaniczne (np. siły masowe i powierzchniowe) i zewnętrzne oddziaływania niemechaniczne (np. wynikające ze zjawisk cieplnych, elektromagnetycznych itp.). Zmianom oddziaływań zewnętrznych towarzyszą zgodne z prawami fizycznymi zmiany stanu wewnętrznego modelowanego ośrodka, m.in. położenia, prędkości i przyspieszeń punktów materialnych modelu, oddziaływań wewnętrznych (np. sił jednostkowych) określanych w tych punktach, temperatury, gęstości i innych własności fizycznych. Dalej zakłada się istnienie naturalnego stanu modelowanego ośrodka, w którym nie występują oddziaływania zewnętrzne i na podstawie którego oznacza się wyjściowe wielkości fizyczne. W naturalnym stanie niektóre z tych wielkości mogą być zerowe (np. prędkości i przyspieszenia punktów czy siły oddziaływań wewnętrznych). Wymienione wielkości fizyczne tworzą zbiór zmiennych stanu. Stopień idealizacji rzeczywistego ośrodka określają przyjęte w modelu założenia, co do ciągłości ośrodka, ciągłości funkcji stanu (czasoprzestrzennych rozkładów zmiennych stanu) czy spełnienia praw zachowania masy, energii itd. Zależy on głównie od celu badań i możliwości zastosowanego aparatu matematycznego. Przyjęty tak model fizyczny opisuje model matematyczny, czyli równanie (funkcja, funkcjonal) stanu modelu fizycznego, zwykle w postaci układu cząstkowych równań różniczkowych znany w literaturze pod nazwą równań ruchu (w zagadnieniach przestrzenno-czasowych) lub równań równowagi statycznej (w zagadnieniach

przestrzennych). Ten model matematyczny budowany jest na podstawie alternatywnie zastosowanych praw dynamiki (prawa zachowania pędu i momentu pędu) lub wariacyjnych zasad mechaniki (ekstremalna zasada wariacyjna, zasada prac przygotowanych). Powinien uwzględniać bilanse energetyczne i prawa rozpraszania energii (m.in. prawa termodynamiki) oraz wynikające z tego związki fizyczne między zmiennymi stanu, tzw. związki kinematyczne i konstytutywne (np. związki przemieszczeń punktów materialnych z ich przemieszczeniami jednostkowymi, przemieszczeń jednostkowych z jednostkowymi siłami oddziaływań wewnętrznych, temperatury z prędkościami przemieszczeń jednostkowych itd.). Funkcje spełniające równania ruchu (lub statycznej równowagi), czyli ich rozwiązania określają stany fizyczne badanego układu mechanicznego ze ścisłością do przyjętego modelu nominalnego (fizycznego) i pod warunkiem spełnienia warunków początkowych i brzegowych, formalizujących skutki wydzielenia układu z otoczenia.

Z praktyki i literatury dzisiejszej doby wiadomo jednak, że ciągły model fizyczny ma ograniczone zastosowanie. Odczuwa się to szczególnie w trakcie badania złożonych zjawisk fizycznych czy złożonych układów mechanicznych, zwłaszcza wtedy, gdy zachodzi potrzeba dokładniejszego odtworzenia geometrii i nadania modelowi własności fizycznych maksymalnie zbliżonych do rzeczywiście występujących w badanym ośrodku czy układzie mechanicznym. Odczuwa się wtedy przede wszystkim trudności natury matematycznej. Przeważnie, bowiem, nie jest dostępny dostatecznie efektywny aparat matematyczny, pozwalający na ścisłe i jednoznaczne rozwiązania równań stanu. Trudności spełnienia warunków początkowych i brzegowych lub osobliwości rozwiązań (np. wynikające z nieciągłości funkcji stanu) mogą pojawić się nawet przy daleko posuniętej idealizacji modelu fizycznego. W takich przypadkach staje się przed koniecznością zastąpienia modelu ciągłego modelem dyskretnym lub stosowania przybliżonych metod rozwiązań.

Ciągły model matematyczny zagadnień fizycznych ma postać równania różniczkowego, np. w zagadnieniach dwuwymiarowych następująca:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2B(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + C(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \\ = D\left(x_1, x_2, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie $w(x_1, x_2)$ jest spełniającą to równanie i zadane warunki brzegowe zmienną zagadnienia; funkcje A, B, C i D wynikają z konkretnego modelu zagadnienia i decydują o matematycznych problemach wyznaczania zmiennej $w(x_1, x_2)$. Bardziej uogólnione tego samego typu równanie różniczkowe opisywać będzie zagadnienia czasoprzestrzenne i zagadnienia trójwymiarowe, odpowiednio zmodyfikowane i uproszczone opisy zagadnienia jednowymiarowe.

W literaturze tematu noszą one nazwy np. równań Laplace’a, Poissona, Helmholtza, d’Arcy, Naviera itp., lub nazwy zagadnień, których dotyczą, tj. równania potencjału, przepływu, przewodnictwa, ruchu falowego, równowagi dynamicznej itp. Oto przykłady takich równań:

- równanie płaskiego (dwuwymiarowego) przepływu cieczy przez glebę (równanie Laplace’a)

$$k \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

gdzie α identyfikować można z wydatkiem cieczy, a k ze współczynnikiem infiltracji gleby;

- równanie przewodnictwa ciepła przez płaską, nieograniczoną ścianę (równanie d’Arcy)

$$\frac{k \partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

gdzie $T(x, t)$ jest temperaturą zmienną w czasie t i wzdłuż grubości ściany, k współczynnikiem przewodnictwa ciepła, ρ gęstością materiału ściany, c zaś ciepłem właściwym tego materiału;

- równanie fali drgań podłużnych sprężystego pręta

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.4)$$

gdzie $w(x, t)$ jest przemieszczeniem przekrojów poprzecznych pręta, E modułem sprężystości liniowej materiału pręta, ρ zaś gęstością tego materiału;

- równanie stanu statycznego równowagi wewnętrznej tarczy sprężystej opisanej w naprężeniach (równanie Naviera)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

gdzie $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2)$, $\tau_{12}(x_1, x_2) = \tau_{21}(x_1, x_2)$ są naprężeniami odpowiednio normalnymi i stycznymi w punktach tarczy, x_1 i x_2 natomiast składowymi wewnętrznych sił objętościowych, działającymi w tym samym punktach;

- równanie stanu statycznego równowagi wewnętrznej tej samej tarczy sprężystej wyrażone w przemieszczeniach

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} + \frac{v}{(1-2v)} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{x_1}{G} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \frac{v}{(1-2v)} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{x_2}{G} &= 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

gdzie $w_1(x_1, x_2)$ i $w_2(x_1, x_2)$ są przemieszczeniami punktów tarczy, G modułem sprężystości postaciowej materiału tarczy, v liczbą Poissona tego materiału.

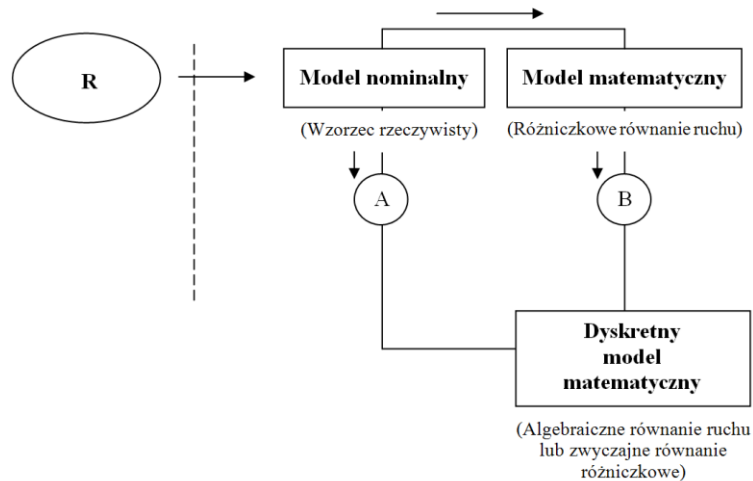
Przytoczone bez doprecyzowania początkowych i brzegowych warunków równania różniczkowe od (1.2) do (1.6), wskazują nie tylko opisywane przezeń zagadnienia fizyczne, ale też geometrycznie konkretne modele nominalne obszarów ich obowiązywania. O tych modelach (choć nie o wszystkich) będzie jeszcze mowa w dalszych treściach. Wywodzą się one, jak wiadomo, z już na wstępie wspomnianego trójwymiarowego obszaru, w mechanice technicznej i w teorii sprężystości nazywanego materialnym continuum sprężystym i będą to m.in. liniowe ustroje jednowymiarowe (rozciągane i ściskane, skręcane, zginane, zginane i ściskane proste pręty pryzmatyczne oraz z nich tworzone kratownice i ramy), ustroje dwuwymiarowe (rury grubościennne, tarcze kołowe i prostokątne), a także cienkościennne ustroje przestrzenne (płyty i powłoki). Modele matematyczne niektórych z nich przytacza zestawienie z tablicy 1.1.

Wspólną cechą zaprezentowanych modeli matematycznych (tj. ww. równań różniczkowych i z Tabl. 1.1) jest ich ograniczona bezpośrednia przydatność do osiągnięcia ścisłych co do ich modelu rozwiązań, zwłaszcza w konkretnych zagadnieniach technicznych. Jednak pozostają punktem wyjścia różnych, współczesnych metod rozwiązań przybliżonych. Do zadowalających rezultatów w tej mierze prowadzą dwie drogi dyskretyzacji modeli matematycznych i sprowadzania równań różniczkowych do układów równań algebraicznych, ich przybliżonych odpowiedników. Jedna z tych dróg (nazwijmy – klasyczna, por. Rys. 1.1. i ścieżkę *B*) zaczyna się, arbitralną lub naukowo zweryfikowaną względem potrzeb, idealizacją wydzielonego z otoczenia układu rzeczywistego, czyli wyborem modelu nominalnego i w prostej konsekwencji – pierwotnego modelu matematycznego, a kończy się pozwalającą na przybliżone rozwiązanie dyskretyzacją tego pierwotnego modelu matematycznego. Druga z tych dróg (umownie nazwijmy – współczesna, por. Rys. 1.1. i ścieżkę *A*) polega na zastosowaniu z założenia dyskretnego modelu nominalnego i w konsekwencji również od początku dyskretnego modelu matematycznego.

Tablica 1.1. Zestawienie wybranych i znanych modeli układów rzeczywistych

Lp.	Nazwa elementu konstrukcyjnego	Model matematyczny
1	Belka zginana $\rho, E, A, J = \text{const}$ q – obc. poprzeczne	Ugięcie $w(x, t)$: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{EJ}, \quad c^2 = \frac{\rho A}{EJ}$
		$w(x)$: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{EJ}$
2	Wiotka belka zginana i ściskana $q, E, A, J = \text{const}$ e – ramię siły P	$w(x)$: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c^2 w = c^2 e \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad c^2 = \frac{P}{EJ}$
3	Pręt rozciągany $q, E, A = \text{const}$ q – obc. wzdłużne	Wydłużenie $u(x, t)$: $-a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{EA}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$
		$u(x)$: $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{q}{\rho A}$
4	Cienkościenny pręt nieswobodnie skręcany momentem M_s	Kąt skręcania $\varphi(x)$: $-c_n \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + c_s \frac{d\varphi}{dx} = M_s$ c_n – sztywność skręcania nieswobodnego, c_s – sztywność skręcania swobodnego.
5	Płyta kołowa o grubości $h = \text{const}$. $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ q – osiowosymetryczne obc. poprzeczne	Mierzone na promieniu ugięcie poprzeczne $w(r, t)$, obciążenie $q(r, t)$: $D \nabla^4 w + h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q$
6	Powłoka walcowa o średnicy $2R$ i grubości $h = \text{const}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ q – obc. powierzchniowe poprzeczne	Ugięcie promieniowe $w(x, y, t)$, obciążenie promieniowe $q(x, y, t)$: $\frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{h} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 2w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ $\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$
Pozostałe oznaczenia:		ρ – gęstość materiału, E moduł sprężystości podłużnej, ν – liczba Poissona, A – pole przekroju poprzecznego, J – osiowy moment bezwładności przekroju, l – długość belki

W dalszym ciągu będzie mowa o współczesnych komputerowych metodach przybliżonych rozwiązywania równań różniczkowych i przede wszystkim o badaniu – drugą z wyróżnionych dróg – rzeczywistych układów mechanicznych i o **metodzie elementów skończonych**, która ma dziś już powszechne zastosowanie zarówno w tworzeniu dyskretnego modelu matematycznego, jak i fizycznego tych układów.

Rys. 1.1. Modelowanie układów rzeczywistych R

Przedstawiony materiał przeznaczony jest dla studentów politechnicznych kierunków i początkujących inżynierów. Wymaga jednak podstawowego, w zakresie rachunku różniczkowego i całkowego oraz algebry liniowej, przygotowania. Prócz korzystania z ilustracji treści przykładami rozwiązań omawianych problemów, uczącym się polecić należy Załącznik, w tym zwłaszcza zawartą w nim bibliotekę charakterystyk elementów skończonych. Prześledzenie toku tworzenia tych charakterystyk jest najlepszym i sprawdzonym ćwiczeniem na drodze do swobodnego i twórczego korzystania z możliwości przedstawionej tu metody.

Komputerowe metody przybliżone

Wstęp do metod wariacyjnych

Matematyczne podstawy metod wariacyjnych wyznaczają zasady optymalizacji funkcjonalów (czyli takich funkcji, których argumentem są inne funkcje). Zmienną funkcjonalu jest identyfikująca się z rozwiązywanym zagadnieniem fizycznym funkcja, która minimalizuje (lub maksymalizuje) ten funkcjonal i spełnia odpowiadające mu równanie różniczkowe wraz z brzegowymi i początkowymi warunkami. Funkcjonał obowiązuje w tym samym ograniczonym powierzchni brzegową S obszarze V , w jakim spełnione jest reprezentowane przezeń równanie różniczkowe i który jest nominalnym modelem zagadnienia fizycznego.

Zanotujmy zatem ogólną postać interesującego nas funkcjonału

$$\chi = \int_V f\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \dots\right) dv + \int_S \varphi\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \dots\right) ds \quad (2.1)$$

gdzie ψ jest funkcją – zmienną zagadnienia. Warunki optymalności (inaczej stacjonarności) funkcjonału ustalają zerową wartość jego pierwszej wariacji i dodatniość (lub ujemność) wariacji drugiej, czyli po oznaczeniu symbolem δ pierwszej wariacji i symbolem δ^2 drugiej wariacji następujące warunki:

$$\delta\chi = 0 \text{ i } \delta^2\chi > 0 (\text{lub } \delta^2\chi < 0) \quad (2.2)$$

przy czym dodatnia określoność drugiej wariacji oznacza minimalizację funkcjonału, zaś ujemna określoność jego maksymalizację. Z warunków (2.2) może wynikać bezpośrednio postać minimalizującej (lub maksymalizującej) funkcji ψ . Jeśli tak nie jest, to funkcjonał trzeba optymalizować z pomocą próbnej funkcji przybliżonej, np. w postaci:

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

gdzie α_i jest nieznanym, podlegającym wyznaczeniu parametrem, $f_i(x)$ zaś współrzędnych punktów obszaru istnienia funkcjonału. Metoda Rayleigha-Ritza, po zastosowaniu funkcji próbnej typu (2.3) sprowadza warunek stacjonarności $\delta\chi = 0$ do zbioru n warunków:

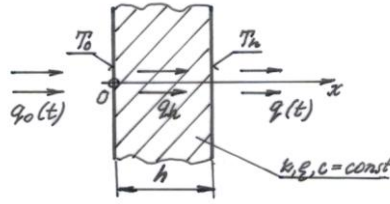
$$\frac{d\chi}{d\alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

Jest to zbiór równań algebraicznych z niewiadomymi parametrami α_i . Jego rozwiązanie – możliwe pod warunkiem dodatniej określoności macierzy współczynników – względem tych niewiadomych rozstrzyga o postaci funkcji próbnej (2.3) i stopniu jej przybliżenia do funkcji – jeśli takowa istnieje – ściśle optymalizującej funkcjonał.

Problemem metody Rayleigha-Ritza (i innych metod wariacyjnych) jest budowa stosownych funkcjonałów oraz dobór i ustalenie zadowalających funkcji optymalizujących. W wielu konkretnych zagadnieniach fizycznych funkcjonały bilansują energię potencjału obszaru (obiektu) zagadnienia i mogą być na tej podstawie wyznaczone. Jeśli jednak nie jest to możliwe, to wymagany funkcjonał trzeba określić drogą eksperymentu matematycznego. Funkcje optymalizujące funkcjonały spełniać muszą przede wszystkim warunki brzegowe zagadnienia, ale też nie powinny zniekształcać zjawiska fizycznego, jakie modeluje optymalizowany funkcjonał. Używane są różne funkcje próbne, najczęściej w postaci wielomianów, funkcji cyklicznych oraz innych, ciągłych i różniczkowalnych do stopnia o jeden mniejszego niż stopień funkcjonału. O funkcjach

próbnych będzie mowa w dalszej treści. Teraz metody wariacyjne zilustrują wybrane przykłady.

Przykład 2.1. Zagadnienie przewodzenia ciepła przez nieograniczoną płaską ścianę



Rys. 2.1. Założenia modelowe zagadnienia przepływu ciepła przez nieograniczoną ścianę

Warunek stacjonarności odpowiedniego dla tego zagadnienia (i przy założeniach z Rys. 2.1) funkcjonału

$$\chi = \int_0^h \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^h T q_h dx - T_0 q_0 \quad (a)$$

ma następującą postać:

$$\delta \chi = \int_0^h \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{\delta \partial T}{\partial x} \right) dx - \int_0^h \delta T q_h dx - \delta T_0 q_0 = 0 \quad (b)$$

przy czym $T = T(x, t)$ jest funkcją położenia (x) i czasu (t), a – jak zauważymy – funkcjonał (a) obowiązuje w przedziale $0 \leq x \leq h$, przy warunkach brzegowych $T(0, t) = T_0$ i $T(h, t) = T|_{x=h} = T_h$.

Wiemy ponadto, że $\delta \partial T / \delta x = \partial(\delta T) / \partial x$. W związku z tym, po scałkowaniu (b) przez częśći otrzymamy:

$$- \int_0^h \left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_h \right) \delta T dx + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=h} \delta T_h - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 \right) \delta T_0 = 0 \quad (c)$$

Ponieważ δT jest dowolną wariacją, oraz że $\delta T_h = 0$, to z (c) wynikają następujące równości:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_h = 0 \quad \text{ i } \quad k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 = 0 \quad (d)$$

z których pierwsze jest równaniem stanu zagadnienia, zaś drugie jego naturalnym warunkiem brzegowym.

Jeśli zinterpretujemy to zagadnienie w ten sposób, że T jest temperaturą, q_0 , q_h prędkościami wytwarzania ciepła ze źródeł odpowiednio zewnętrznych i wewnętrznych, a przy tym że $q_h = -\rho c \partial T / \partial t$, gdzie ρ jest gęstością materiału a c ciepłem właściwym materiału, to mamy do czynienia w tym przykładzie z przepływem ciepła przez nieograniczoną ścianę o grubości h , którego model matematyczny ma – już we wstępie cytowaną postać $k \partial^2 T / \partial x^2 = \rho c \partial T / \partial t$. Skoro funkcjonal (a) tak ściśle interpretuje zagadnienie fizyczne, które jako nieliczne ma teoretyczne, ściśle rozwiązanie, to na tym można by było poprzestać. Celem tego przykładu jest jednak ilustracja przybliżonej, wariacyjnej metody optymalizacji funkcjonału. Przyjmijmy w tym celu przybliżoną funkcję optymalizującą o postaci (2.3), a konkretnie wielomianowy rozkład temperatur wzdłuż grubości ściany:

$$\bar{T}(x, t) = T_1(t) + T_2(t)x + T_3(t)x^2 \quad (e)$$

notując przy tym, że

$$\bar{T}(0, t) = T_0 = T_1(t), \text{ zaś } \bar{T}(h, t) = T_1(t) + hT_2(t) + h^2T_3(t) \quad (f)$$

Odnosząc się do formuły (2.3) w zapisie (e) zamiennie zastosowaliśmy: $\alpha_i = T_i$ ($i = 1, 2, 3$), $f_1(x) = x^0$, $f_2(x) = x^1$ oraz $f_3(x) = x$.

Po podstawieniu do (a) funkcji (e) otrzymujemy następującą przybliżoną postać rozważanego funkcjonału:

$$\chi = \int_0^h \frac{1}{2} k (T_2^2 + 4T_2T_3x + 4T_3^2x^2) dx - \int_0^h (T_1 + T_2x + T_3x^2) q_h dx - T q_0 \quad (g)$$

Funkcjonał ten zminimalizujemy funkcją (e), stawiając przed nią żądanie spełnienia warunków stacjonarności, teraz w postaci:

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial T_2} = 0 \quad i \quad \frac{\partial \chi}{\partial T_3} = 0 \quad (h)$$

z których utworzymy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \int_0^h q_h dx + q_0 &= 0, \\ kh(T_2 + hT_3) - \int_0^h q_h x dx &= 0, \\ kh^2(T_2 + hT_3) - \int_0^h q_h x^2 dx &= 0 \end{aligned} \quad (i)$$

Obliczenie całek występujących w równaniach (i) wymaga przybliżenia tą samą funkcją (e) wartości q_h , po którym przy oznaczeniu $\partial T / \partial t = \dot{T}$ mamy $q_h = -\rho c(\dot{T}_1 + \dot{T}_2 x + \dot{T}_3 x^2)$ oraz

$$\begin{aligned}\int_0^h q_h dx &= -\rho c h \left(\dot{T}_1 + \frac{1}{2} h \dot{T}_2 + \frac{1}{3} h^2 \dot{T}_3 \right), \\ \int_0^h q_h x dx &= -\rho c h^2 \left(\frac{1}{2} \dot{T}_1 + \frac{1}{3} h \dot{T}_2 + \frac{1}{4} h^2 \dot{T}_3 \right), \\ \int_0^h q_h x^2 dx &= -\rho c h^3 \left(\frac{1}{3} \dot{T}_1 + \frac{1}{4} h \dot{T}_2 + \frac{1}{5} h^2 \dot{T}_3 \right)\end{aligned}\quad (j)$$

Wyznaczenie 6 niewiadomych, czyli $T_1, T_2, T_3, \dot{T}_1, \dot{T}_2$ i $\dot{T}_3$, z wyprowadzonych równań umożliwia uwzględnienie warunków brzegowych (f) i warunku początkowego $T|_{t=0} = T_0$.

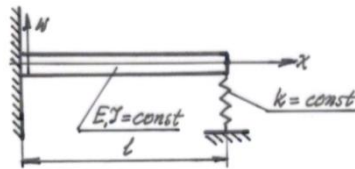
Przykład 2.2. Zagadnienie stateczności zginanego i ściskanego smukłego pręta pryzmatycznego

Funkcjonał

$$\chi = \int_0^1 \frac{1}{2} E J \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - P \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k (w|_{x=1})^2 \quad (a)$$

identyfikuje bilans energii potencjalnej zginanego i ściskanego, o wymiarach i właściwościach materiałowych znanych i niezmiennych wzdłuż długości, smukłego pręta pryzmatycznego (belki), pokazanego na rysunku 2.2. Przez E oznaczony został moduł sprężystości podłużnej materiału pręta, przez J z kolei osiowy moment bezwładności poprzecznego przekroju pręta. Funkcją optymalizującą ten funkcyjonał jest poprzeczne ugięcie pręta $w(x)$, która ma spełnić warunki brzegowe utwierdzonego końca pręta:

$$w(0) = 0 \text{ i } \frac{dw(0)}{dx} = 0 \quad (b)$$



Rys. 2.2. Założenia modelowe zagadnienia stateczności zginanego i ściskanego smukłego pręta pryzmatycznego

Warunek stacjonarności $\delta\chi = 0$ zastosowany do tego funkcjonału przynosi następujące równanie:

$$\int_0^1 EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - P \int_0^1 \frac{dw}{dx} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx + kw_1 \delta w_1 = 0 \quad (c)$$

gdzie $w_l = w|_{x=l}$. Jeśli następnie równanie (c) zostanie dwukrotnie scałkowane przez części, to przyjmie ono następującą postać:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta w dx + \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right] |_{x=1} - \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right] |_{x=0} + \\ & + \left[\left(EJ \frac{d^3 w}{dx^3} + P \frac{dw}{dx} \right) \delta w \right] |_{x=1} + \left[\left(EJ \frac{d^3 w}{dx^3} + P \frac{dw}{dx} \right) \delta w \right] |_{x=0} + kw_l \delta w_l = 0 \quad (d) \end{aligned}$$

Wobec warunków brzegowych (b) wartości całek określanych dla brzegu $x = 0$ w równaniu (d) są zerowe. Przy dowolnych co do wartości wariacjach równanie spełnia się zatem pod warunkiem, że

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (e)$$

oraz że

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} |_{x=1} = 0 \text{ i } \left(EJ \frac{d^3 w}{dx^3} + P \frac{dw}{dx} - kw \right) |_{x=1} = 0 \quad (f)$$

Równanie (e) jest równaniem stanu krytycznego ściskanego pręta, równania (f) natomiast opisują warunki brzegowe swobodnego końca belki. Możemy ponownie stwierdzić, że funkcjonał (a) także ściśle modeluje przedstawione w przykładzie zagadnienie fizyczne.

Przybliżoną optymalizację tego funkcjonału przedstawimy z pomocą próbnej funkcji:

$$\bar{w} = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 \quad (g)$$

zauważając od razu, że spełnia ona warunki brzegowe (b) oraz to, że $\bar{w}|_{x=l} = \bar{w}_l = \alpha_1 l^2 + \alpha_2 l^3$.

Warunek stacjonarności funkcjonału (a) przybliżonego funkcją (g), przyniesie (por. postępowanie zilustrowane w Przykładzie 2.1) dwa równania algebraiczne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} &= \left(4EJl + kl^4 - \frac{4}{3}Pl^3 \right) \alpha_1 + \left(6EJl^2 + kl^5 - \frac{3}{2}Pl^4 \right) \alpha_2 = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} &= \left(6EJl + kl^5 - \frac{3}{2}Pl^4 \right) \alpha_1 + \left(12EJl^3 + kl^6 - \frac{9}{5}Pl^5 \right) \alpha_2 = 0 \quad (h) \end{aligned}$$

Obliczenie parametrów α_1 i α_2 wymaga pokonania problemu wartości własnych macierzy współczynników. Rozwiązanie tego problemu przyniesie także dwie wartości P , z których mniejsza będzie wartością siły krytycznej. Będzie mowa o tym w dalszych treściach.

Matematyczne podstawy klasyfikacji metod rezydualnych

Celem metod rezydualnych jest redukcja równań różniczkowych wraz z ich warunkami brzegowymi i początkowymi do układów równań algebraicznych. Ich istotą jest dyskretyzacja obszaru obowiązywania równań różniczkowych na pewną liczbę podobszarów–elementów (siatek, elementów powierzchniowych i elementów objętościowych z wyróżnionymi punktami–węzłami) oraz przeniesienie ważonych procedur redukcyjnych do obszarów tych elementów. Metody te rozróżniają trzy sposoby formułowania algorytmów redukcyjnych oraz rodzaje funkcji przybliżających i funkcji wag. Sklasyfikujemy te metody posługując się wybranym równaniem różniczkowym Laplace’a [5].

Weźmy zatem pod uwagę równanie różniczkowe następujące:

$$\nabla^2 w = 0, \quad (2.5)$$

ważne w obszarze V , ograniczonym powierzchnią S . Niech u_0 będzie rozwiązaniem dokładnym równania (2.5) spełniającym także warunki brzegowe:

$$w = \bar{u} \text{ na powierzchni } S_1 \in S \text{ i } q_0 = \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{q} \text{ na powierzchni } S_2 \in S \quad (2.6)$$

gdzie n jest kierunkiem normalnej do powierzchni S_2 .

Rozwiązania przybliżonego poszukiwać będziemy używając zbioru znanych liniowo niezależnych funkcji ϕ_i z uogólnionymi arbitralnie dobranymi współczynnikami α_i lub wartościami węzłowymi u_i (czyli wartościami u w punktach–węzłach). Takie rozwiązanie

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots = \sum_i \alpha_i \phi_i \quad (2.7)$$

zastosowane do (2.5) oraz do (2.6) prowadzi do reszt:

$$\begin{aligned} e &= \nabla^2 u \neq 0, \\ e_1 &= u - \bar{u} \neq 0, \\ e_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \end{aligned} \quad \left(q = \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (2.8)$$

Reszty te powinny być, oczywiście, jak najmniejsze, co można osiągnąć właśnie różnymi metodami rezydualnymi.

Tablica 2.1. Schemat klasyfikacyjny metod przybliżonych (u – przybliżonym rozwiązaniem równania różniczkowego, w^* – funkcją wagi, e – resztą równania różniczkowego po rozwiązaniu przybliżonym, e_1, e_2 – podobnie określonymi resztami warunków brzegowych)

	Warunek rezydualny	$u \equiv w^*$	$u \neq w^*$
$(e_1 = e_2 = 0)$	$\int_V ew^* dv = 0$	Metoda Galerkin	Metoda Ritz, metoda najmniejszych kwadratów, metoda różnic skończonych ...
$(e_1 = 0)$	$\int_V ew^* dv = \int_{S_2} e_2 w^* ds$	Metoda elementów skończonych	
	$\int_V ew^* dv = \int_{S_2} e_2 w^* ds - \int_{S_1} e_1 \frac{\partial w^*}{\partial n} ds$	Metoda Trefftza	Metoda całkowania brzegowego (elementu brzegowego)

Przypadek pierwszy, gdy funkcja u spełnia warunki brzegowe (2.6), czyli jest tak dobrana, że $e_1 = e_2 = 0$ (por. Tabl. 2.1).
Funkcja wagi niech ma postać:

$$w^* = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \dots = \sum_j \beta_j \psi_j \quad (2.9)$$

gdzie β_j ($j = 1, 2, \dots$) są także arbitralnie dobranymi uogólnionymi współczynnikami, ψ_j ($j = 1, 2, \dots$), zaś podobnymi funkcjami do zastosowanych w rozwiązaniu przybliżonym (2.7).

Zastosowanie metody rezydualnej (żądania sprowadzenia reszty e do najmniejszej wartości bezwzględnej) prowadzi do tożsamości:

$$\int_V ew^* dv = \int_V (\nabla^2 u) w^* dv = 0 \quad (2.10)$$

lub po wprowadzeniu (2.9) oraz po uwzględnieniu dowolności wartości i przyjęciu np. β_i do zasady:

$$\int_V (\nabla^2 u) \psi_i dv = 0 \quad (2.11)$$

Z założenia funkcja wagi (2.9) jest różna od funkcji przybliżającej (2.7), lecz w niektórych metodach jest identyczna. Postać funkcji wagi dzieli metody rezydualne. I tak np.:

- w metodzie Ritz $w^* = 1$, czyli żądanie (2.10) przyjmuje postać

$$\int_V (\nabla^2 u) dv = 0 \quad (2.10a)$$

- w metodzie najmniejszych kwadratów $w^* = \nabla^2 u$ i mamy

$$\int_V (\nabla^2 u)^2 dv = 0 \quad (2.10b)$$

- w metodzie Galerkina $w^* = u$ i warunek (2.10) możemy zastąpić podobnym do (2.11)

$$\int_V (\nabla^2 u) \psi_i dv = 0 \quad (2.11a)$$

- metodzie różnic skończonych

$$w^* = w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 + \dots \quad (2.12)$$

gdzie δ_i ($i = 1, 2, \dots$) jest dystrybucją (delta) Diraca $\delta(x - x_i)$ o własnościach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i-a}^{x_i+a} \delta(x - x_i) dx = 1 (\text{lub } 0 \text{ dla } x \neq x_i), \quad (2.13)$$

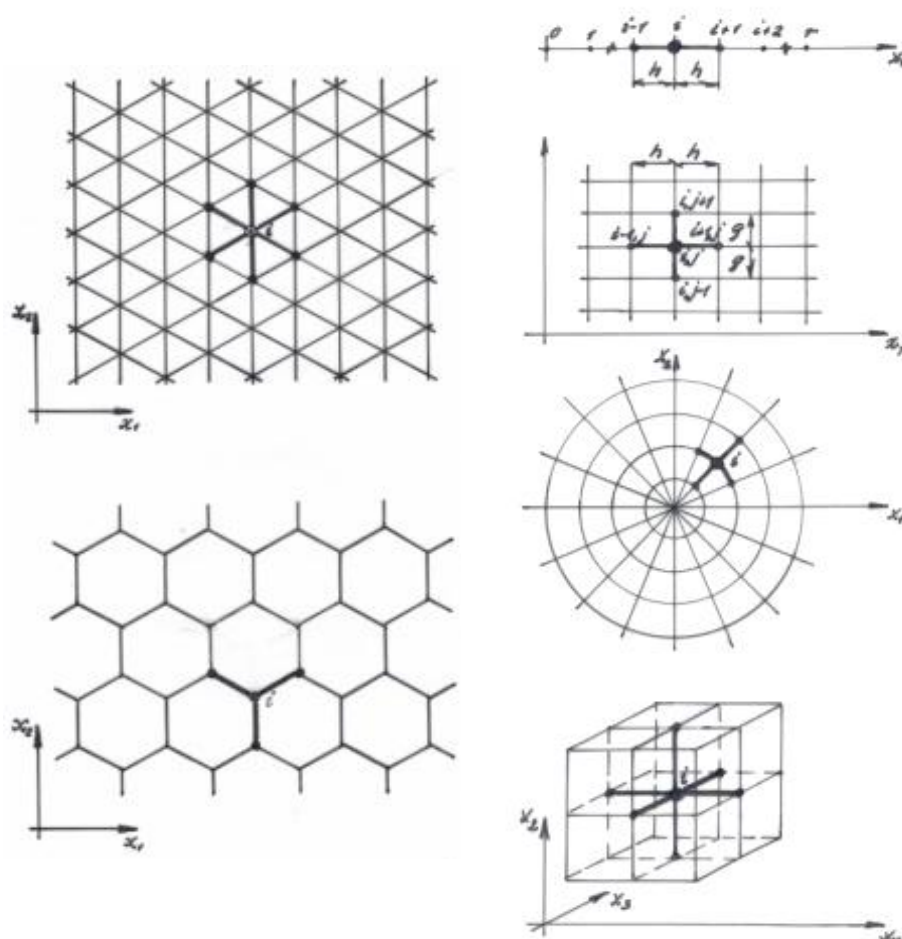
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = \int_{x_i-a}^{x_i+a} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x) (\text{lub } 0 \text{ dla } x \neq x_i)$$

warunek (2.11) przyjmie przy tym postać

$$\int_V (\nabla^2 u) \delta(x - x_i) dv = 0 \quad (2.11b)$$

W metodzie *różnic skończonych* poszukiwane przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego w rezultacie zastosowania zasady (2.11b) jest zbiorem równań algebraicznych, wiążących ze sobą wartości tego rozwiązania określone w węzłach, wypełniającej obszar ważności tego równania różniczkowego, odpowiednio gęstej siatki (por. Rys. 2.3).

Liczba otrzymanych równań algebraicznych jest równa liczbie węzłów siatki, a układ tych równań musi być dodatnio określony, podobnie jak w metodach wariacyjnych i innych rezydualnych. Budowa siatki wyprzedza algorytm rozwiązania, które z kolei opiera się na operatorach różnicowych zastępujących pochodne występujące w rozwiązywanym równaniu różniczkowym.



Rys. 2.3. Przykłady liniowej, dwuwymiarowej płaskiej, osiowosymetrycznej płaskiej i przestrzennej siatki węzłów stosowanych w metodzie różnic skończonych

Siatki budować można jako różniące się intensywnością rozłożenia ich węzłów i podporządkowaniem modelowi geometrycznemu obszaru ważności równania różniczkowego. Mogą być liniowe, płaskie i przestrzenne, mogą być równomierne lub nie, lecz jednak dostosowane do schematów (operatorów) różnicowych i własności funkcji wagi, a konkretnie własności delty Diraca (wartości przybliżonego rozwiązania są niezerowe tylko w objętych schematem różnicowym węzłach siatki).

Operatory różnicowe wyprowadza się w praktyce rozwijając w szereg Taylora

$$f(x_0 + \alpha \Delta x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\alpha \Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O[(\alpha \Delta x)^N] \quad (2.14a)$$

węzłową wartość przybliżanej w węźle $x = x_0 + \Delta x$ funkcji stanu jednej zmiennej, oznaczonej np. przez $f(x)$. Mamy więc (np. przy $\alpha = 1$, $\Delta x = h$) następujący szereg:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(h^N) = \\ &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + O(h^N) \end{aligned} \quad (2.14b)$$

gdzie $f^{(n)}(x_0)$ określa wartość w punkcie x_0 pochodnej rzędu (n) rozwijanej funkcji (przy czym $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$), zaś $O(h^N)$ jest resztą szeregu. Jeśli szereg (2.14b) – godząc się na niedokładność rzędu $O(h)$ – rozwiniemy do pierwszych dwu wyrazów $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + O(h)$, to możemy przyjąć, że

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0), \text{ lub } f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.15a)$$

Zauważmy ponadto, że

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + O(h^N) \quad (2.14c)$$

co w konsekwencji, po przyjęciu podobnej dopuszczalnej niedokładności, pozwala przyjąć też, że

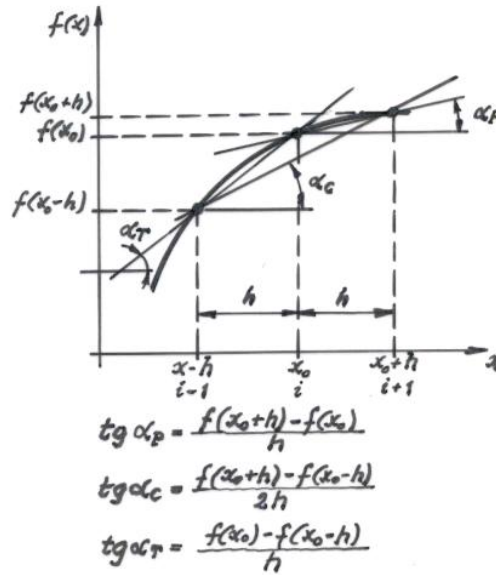
$$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0), \text{ lub } f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (2.15b)$$

Odejęcie stronami wyrażenia (2.14c) od wyrażenia (2.14b) prowadzi do szeregu w postaci:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0 - h) &= 2hf'(x_0) + \\ &+ 2 \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + O(h)^N \end{aligned} \quad (2.14d)$$

oraz do (2.15c)

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \approx 2hf'(x_0) \text{ i } f'(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]/2h$$



Rys. 2.4. Interpretacja geometryczna operatorów różnicowych

Wynikowe wyrażenia pierwszych pochodnych (2.15a), (2.15b) i (2.15c) w metodzie różnic skończonych noszą nazwy różnicowych operatorów – odpowiednio – przedniego, tylnego i centralnego. Ich interpretację przedstawia rysunek 2.4. Tablica 2.2. rozwija wynik podobnego (po uwzględnieniu większej liczby pierwszych wyrazów szeregu Taylora) dochodzenia do form matematycznych operatorów różnicowych dla pierwszych i drugich pochodnych. W tym zestawieniu węzłowe wartości funkcji oznaczono przez:

$$u_{i-1} = f(x_0 - h), u_i = f(x_0), u_{i+1} = f(x_0 + h),$$

natomiast węzły siatki odpowiednio $i - 1, i, i + 1$.

Po zamianie zmiennej (po oznaczeniu $x \equiv x_1$ i zamianie np. x_1 na x_2), rozwijając szereg Taylora na kierunku tej nowej zmiennej, otrzyma się operatory analogiczne do przedstawionych w (2.15a), (2.15b) i (2.15c), oraz w tablicy 2.2. Węzły dla odróżnienia mogą być oznaczone $k - 1, k, k + 1$.

Tablica. 2.2. Operatory różnicowe funkcji jednej zmiennej $u(x)$

	Przybliżony operator różnicowy	Typ	Błąd
$h \frac{d}{dx}$	$u_{i+1} - u_i$	ORP	$O(h)$
	$u_i - u_{i-1}$	ORT	
	$\frac{1}{2}(u_{i+1} - u_{i-1})$	ORC	$O(h^2)$
	$\frac{1}{2}(-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i)$	ORP	
	$\frac{1}{2}(3u_i + 4u_{i-1} + u_{i-2})$	ORT	
	$\frac{1}{12}(-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} - u_{i-2})$	ORC	$O(h^2)$
$h^2 \frac{d^2}{dx^2}$	$u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i$	ORP	$O(h^2)$
	$u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}$	ORT	
	$u_{i+2} - 2u_i + u_{i-1}$	ORC	
	$\frac{1}{12}(-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-3})$	ORC	$O(h^2)$
$h^3 \frac{d^3}{dx^3}$	$\frac{1}{2}(u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2})$	ORC	$O(h^4)$
$h^4 \frac{d^4}{dx^4}$	$u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}$	ORC	$O(h^2)$
ORP – operator różnicowy przedni ORT – operator różnicowy tylny ORC – operator różnicowy centralny			

Stosowane w tej metodzie schematy różnicowe są np. w zagadnieniach dwuwymiarowych (czyli w przypadku płaskiej siatki o dystansach międzywęzłowych: w kierunku osi pierwszej współrzędnej $\Delta x_1 = h_1$, w kierunku osi drugiej współrzędnej $\Delta x_2 = h_2$) następujące:

- pierwsza pochodna, operator przedni

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{(u_{i+1,k} - u_{i,k})}{h_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{(u_{i,k+1} - u_{i,k})}{h_2} \quad (2.16a)$$

- pierwsza pochodna, operator centralny

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{(u_{i+1,k} - u_{i-1,k})}{h_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{(u_{i,k+1} - u_{i,k-1})}{h_1} \quad (2.16b)$$

- pierwsza pochodna, operator tylny

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{(u_{i,k} - u_{i-1,k})}{h_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{(u_{i,k} - u_{i,k-1})}{h_1} \quad (2.16c)$$

gdzie oznaczenie $u_{r,s}$ ($r, s = i, k, i+1, i-1, k+1, k-1$) nie mając związku z konwencją skróconego zapisu różniczkowania, wskazuje przybliżone wartości funkcji spełniającej rozważane równanie różniczkowe, określane dla jej pierwszej pochodnej w – jak spostrzegamy w tym dwuwymiarowym przypadku – węzle centralnym (i, k) oraz w czterech najbliższych centralnemu innych węzłach.

Operatory wyższych pochodnych tworzy się natomiast podług zasady tworzenia operatora dla drugiej pochodnej:

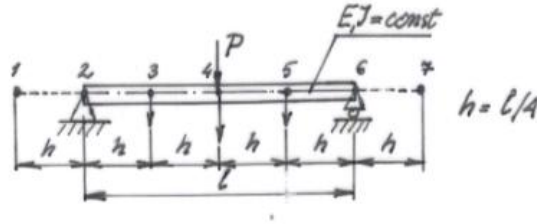
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta(\frac{\partial u}{\partial x})}{\Delta x} = \frac{[\frac{(u_{i+1,k} - u_{i,k})}{\Delta x} - \frac{(u_{i,k} - u_{i-1,k})}{\Delta x}]}{\Delta x} = \frac{(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k})}{(\Delta x)^2} \quad (2.17)$$

przy czym przy wyższych pochodnych zwiększy się liczba węzłów siatki (i wartości węzłowych funkcji) objętych schematem, co uwypukla np. operator pochodnej czwartego rzędu:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{\Delta^4 u}{\Delta x^4} = \frac{(u_{i+2,k} - 4u_{i+1,k} + 6u_{i,k} - 4u_{i-1,k} + u_{i-2,k})}{(\Delta x^4)} \quad (2.18)$$

Ten krótki opis metody różnic skończonych zamkniemy teraz przykładem jej zastosowania.

Przykład 2.3. Zagadnienie zginanego pręta pryzmatycznego. Rozwiązanie metodą różnic skończonych



Rys. 2.5. Założenia modelowe i siatki węzłów w zagadnieniu zginanego pręta pryzmatycznego

Dany jest co do wymiarów i obciążenia zewnętrznego (niech to będzie poprzeczna siła skupiona P przyłożona w środkowym przekroju belki, por. Rys. 2.5.) sprężysty zginany pręt pryzmatyczny czyli, statycznie wyznaczalna belka dwupodporowa. Jej równanie statycznej równowagi opisuje równanie różniczkowe:

$$\frac{EJ d^4 w(x)}{dx^4} = q \quad (a)$$

obowiązujące w obszarze $0 \leq x \leq l$ i w warunkach brzegowych

$$w(0) = w(1) = 0 \text{ i } \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = \frac{d^2 w(1)}{dx^2} = 0 \quad (b)$$

gdzie $w(x)$ jest ugięciem belki, q jej odniesionym do jednostki długości obciążeniem poprzecznym, E stałym na długości belki modułem sprężystości podłużnej jej materiału, J zaś osiowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki, określanym względem osi zginania. Niech w tym przykładzie zadaniem będzie wyznaczenie metodą różnic skończonych przybliżonej funkcji $w(x)$.

W pierwszym punkcie rozwiązania przyjmijmy, że budujemy równomierną siatkę liniową z siedmiu węzłami, w tym z dwoma w przegubach podpór i z dwoma poza obszarem materialnym belki. Odstęp międzywęzłowy wynosi $h = \frac{1}{4} l$. Numeracja węzłów biegnie z lewa na prawo, w porządku od 1 do 7. Głównymi niewiadomymi zadania są, zgodnie z warunkami podparcia belki, ugięcia w_3, w_4 i w_5 określane w węzłach leżących w obszarze materialnym belki, czyli w węzłach 3, 4 i 5.

Schemat różnicowy w tym zadaniu odpowiada wzorcowi (2.15b) i wyraża się następująco:

$$EJ \frac{(w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2})}{(\frac{1}{4}l)^4} \approx q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (c)$$

Wprowadźmy oznaczenie $R_i = q_l^i/4$ lub $q_i = R_i/(1/4 l)$, oraz zauważmy, że drugi warunek brzegowy (b) podlega schematowi różnicowemu o postaci:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \approx w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}, \quad (i = 2, 6) \quad (d)$$

Z pierwszego warunku brzegowego (b) wiemy, że $w_2 = w_6 = 0$, ze schematu różnicowego (d) wynika z kolei, że $w_1 = -w_3$ oraz że $w_7 = -w_5$. Wobec tego schemat (c) wystarczy zastosować do węzłów $i = 3, 4$ i 5 . Po tej operacji kolejno otrzymamy następujące równania algebraiczne:

$$\begin{aligned} EJ \frac{(-w_3 - 0 + 6w_3 - 4w_4 + w_5)}{(\frac{1}{4}l)^3} &= R_3, \\ EJ \frac{(0 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + 0)}{(\frac{1}{4}l)^3} &= R_4, \\ EJ \frac{(w_3 - 4w_4 + 6w_5 - 0 - w_5)}{(\frac{1}{4}l)^3} &= R_5 \end{aligned} \quad (e)$$

przy czym zgodnie z danymi zadania $R_3 = R_5 = 0$, a $R_4 = P$. Z równań (e) bez trudu obliczymy poszukiwane ugięcia rozpatrywanej belki:

$$w_4 = \frac{3Pl^3}{128EJ}, \quad w_3 = w_5 = \frac{Pl^3}{64EJ}. \quad (f)$$

Wynik ścisły: $w_4 = Pl^3/48EJ$.

Przypadek drugi, gdy funkcja u tak dobrana, że spełnia warunki tylko na brzegu S_1 (wtedy $e_1 = 0$ por. Tabl. 2.1). Wówczas reszta e_2 na brzegu S_2 może być minimalizowana metodą rezydualną, podobnie jak reszta e . Można ten warunek wyrazić następująco:

$$\int_V ew^* dv = \int_{S_2} e_2 w^* ds \quad (2.19a)$$

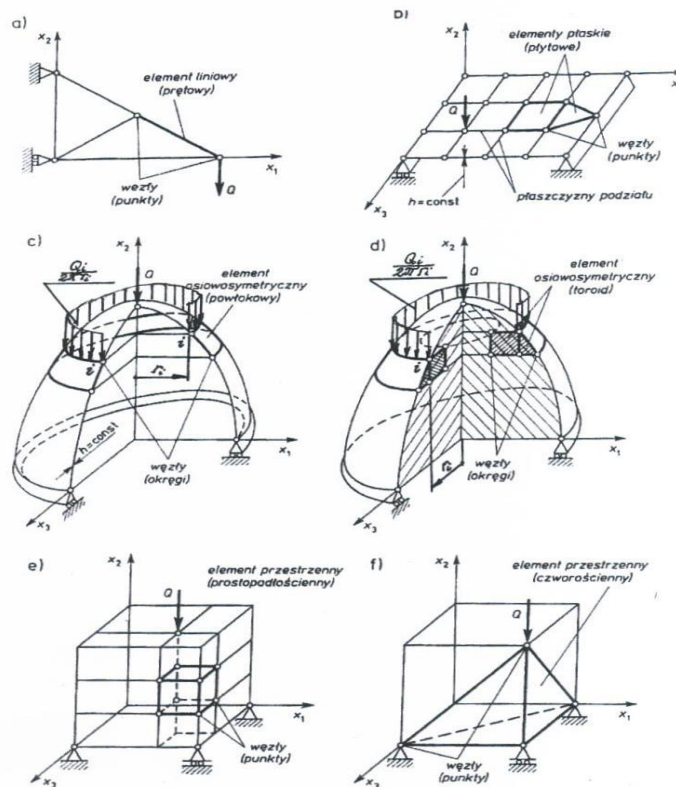
$$\text{lub} \quad \int_V (\nabla^2 u) w^* dv = \int_{S_2} (q - \bar{q}) w^* ds \quad (2.19b)$$

Po scałkowaniu przez części równania (2.17) otrzymamy:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} dv = \int_{S_2} \bar{q} w^* ds \quad (2.19c)$$

które obniżając rząd pochodnych względem sformułowania pierwotnego wyrównuje, po zastosowaniu, wymagania co do ciągłości i różniczkowości

funkcji przybliżającej i funkcji wagi. Wyrównanie wymagań pozwala na stosowanie w tej metodzie rezidualnej funkcji przybliżającej i wagowej tej samej postaci, czyli $w = u$. Powstałe po jej zastosowaniu układy równań algebraicznych mają ponadto symetryczne macierze współczynników. Obniżenie tych wymagań, z drugiej strony oznacza jednak tylko przybliżone spełnienie drugiego (na powierzchni S_2) z warunków brzegowych (2.6).



Rys. 2.6. Przykłady elementów skończonych i ich zastosowań praktycznych

Wtedy, gdy tego przybliżenia – konkretnie przybliżenia ciągłości pierwszych pochodnych u – nie da się zaakceptować, to sformułowania od (2.16) do (2.18) należy zastosować do każdego z osobna spośród możliwie dokładnie wypełniających obszar ważności rozwiązywanego równania różniczkowego i możliwie małych, ale wymiarowo skończonych podobszarów ΔV o powierzchni brzegowej ΔS i dodatkowo poprawić (uproszczyć lub dostosować) funkcję przybliżającą. Taka koncepcja uściślenia wyników tej metody dała początek, bardzo dziś powszechnej i dominującej nad pozostałymi metodami przybliżonymi, metodzie elementów skończonych, której podstawowym szcze-

gółom poświęcone jest to opracowanie. Wyprzedzając te dalsze treści dodajmy, że powszechność i dominacja metody wynika m.in. z możliwości formułowania jej także jako metody wariacyjnej i uniwersalności co do funkcji przybliżających. Pierwsze wprowadzenie zawierać będą zaś dwa kolejne przykłady ilustrujące tę uniwersalność i wariacyjne wywodzenie metody.

Algorytm rozwiązania tą metodą zawsze wyprzedza, podobnie jak w metodzie różnic skończonych, budowa siatki podziału obszaru rozwiązania na podobszary – elementy skończone. Zbiór tych elementów tak zastąpiony obszar „wiążą” w całość, leżące na powierzchniach podziału (ΔS), wybrane punkty–węzły, w których wyłącznie zachodzi ciągłość wartości funkcji przybliżającej. Postaci geometryczne i charakterystyki fizyczne elementów skończonych dobierane są w zależności od postaci zastępowanego nimi obszaru i zagadnienia fizycznego. Mogą być – por. Rys. 2.6 – liniowe (o postaci prętów przyrzmatycznych), płaskie (jak wieloboczne tarcze, płyty i powłoki), pierścieniowe (odwzorowujące kołowe tarcze, rury i powłoki) lub przedstawiać wielosienne bryły (do wypełnienia obszarów trójwymiarowych).

Zastosowanie omawianej metody do tych elementów, po obraniu funkcji przybliżającej u , tworzy ich indywidualną charakterystykę w postaci układu równań algebraicznych z niewiadomymi wartościami węzłowymi funkcji przybliżającej. Odpowiednie złożenie charakterystyk wszystkich, wypełniających obszar rozwiązania elementów skończonych daje układ algebraicznych z niewiadomymi z wszystkimi wartościami węzłowymi u . Macierz współczynników tego układu jest symetryczna i pasmowa. Ten zastępujący wyjściowe równanie różniczkowe układ równań staje się równaniem stanu obszaru dopiero po wprowadzeniu do niego, opisanych również funkcją przybliżającą, wszystkich warunków brzegowych. Poprawnie przekształcony po tym układ równań jest dodatnio określony, co oznacza, że ma rozwiązanie.

Przykład 2.4. Bezpośrednie rozwiązanie zadanego równania różniczkowego metodą MES

Rozwiążemy następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2[\psi(x)]}{dx^2} - 2p = 0 \quad (a)$$

gdzie $p = \text{const}$, a $x_0 \leq x \leq x_1$, przy czym przyjmijmy, że $x_0 = 0, x_1 = l$ oraz $\Delta x = x_1 - x_0 = l$. Ponadto dla $x_0 = 0$ znane są wartości przybliżanej funkcji i jej pierwszej pochodnej:

$$\psi(0) = \bar{\psi}_{00}, \quad \frac{d[\psi(0)]}{dx} = \bar{\psi}_{01} \quad (b)$$

Funkcja przybliżająca funkcję spełniającą dowolne równanie różniczkowe może mieć – wykorzystując wielomiany Hermite’a – postać następującą:

$$\psi(x) = N_{00}\bar{\psi}_{00} + \frac{dN_{10}}{dx}\bar{\psi}_{10} + N_{01}\bar{\psi}_{01} + \frac{dN_{11}}{dx}\bar{\psi}_{11} = [N]\{\psi_i\} \quad (c)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} N_{00}(x_0) &= 1, N_{00}(x_1) = 0, N_{01}(x_0) = 0, N_{01}(x_1) = 0, \\ N_{10}(x_0) &= 0, N_{10}(x_1) = 1, N_{11}(x_0) = 0, N_{11}(x_1) = 0, \\ \frac{d[N_{10}(x_0)]}{dx} &= 1, \frac{d[N_{10}(x_1)]}{dx} = 0, \frac{d[N_{00}(x_0)]}{dx} = 0, \frac{d[N_{00}(x_1)]}{dx} = 0, \\ \frac{d[N_{11}(x_0)]}{dx} &= 0, \frac{d[N_{11}(x_1)]}{dx} = 1, \frac{d[N_{01}(x_0)]}{dx} = 0, \frac{d[N_{01}(x_1)]}{dx} = 0. \end{aligned}$$

W przyjętym szczególnym przypadku rozpatrywać będzie można dwa punkty $x = x_0$ i $x = x_1$, a przybliżeniu, dzięki wysłowionym powyżej własnościom N_{ij} ($i, j = 0, 1$), podlegać wtedy mogą wartości przybliżanej funkcji i jej pierwsze pochodne z zachowaniem ich ciągłości. Zastosować, zatem można następujące wielomiany Hermite’a pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} N_{00} &= 1 - 3\left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^2 + 2\left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^3, \\ N_{10} &= (x_1 - x_0) \left\{ \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^3 - \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^2 + \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right] \right\}, \\ N_{01} &= 3 \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^2 - 2 \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^3, \\ N_{11} &= (x_1 - x_0) \left\{ \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^3 - \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (d)$$

Przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego (a) ma zgodnie z (c) postać:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \left[1 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right] \bar{\psi}_{00} + \Delta x \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right) - 2\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right] \bar{\psi}_{10} + \\ &+ \left[3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right] \bar{\psi}_{01} + \Delta x \left[-\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right] \bar{\psi}_{11} \end{aligned} \quad (e)$$

mamy przy tym:

$$\frac{d[\bar{\psi}(x)]}{dx} = \left[-\frac{6x}{(\Delta x)^2} + \frac{6x^2}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{00} + \Delta x \left[\frac{1}{\Delta x} - \frac{4x}{(\Delta x)^2} + \frac{3x^2}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{10} +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{6x}{(\Delta x)^2} - \frac{6x^2}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{01} + \Delta x \left[-\frac{2x}{(\Delta x)^2} + \frac{3x^2}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{11}, \\
\frac{d^2[\bar{\psi}(x)]}{dx^2} &= \left[-\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{12x}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{00} + \Delta x \left[-\frac{4}{(\Delta x)^2} + \frac{6x}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{10} + \\
& \left[\frac{6}{(\Delta x)^2} - \frac{12x}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{01} + \Delta x \left[-\frac{2}{(\Delta x)^2} + \frac{6x}{(\Delta x)^3} \right] \bar{\psi}_{11}.
\end{aligned}$$

Zamiana funkcji przez zastosowane jej przybliżenia prowadzi do reszty:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{d^2[\bar{\psi}(x)]}{dx^2} - \frac{d^2[\psi(x)]}{dx^2} = \frac{6(2x-\Delta x)}{(\Delta x)^3} \bar{\psi}_{00} + \frac{2(3x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \bar{\psi}_{10} + \\
& + \frac{6(2x-\Delta x)}{(\Delta x)^3} \bar{\psi}_{01} + \frac{2(3x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \bar{\psi}_{11} - 2p
\end{aligned} \tag{f}$$

W tym wyrażeniu nieznane są wartości obu funkcji i ich pochodnych dla $x_1 = \Delta x$. Aby te wartości wyznaczyć, wystarczy zastosować funkcję Hermite'a jako funkcję wagi:

$$\{w^*\} = [N_{01}, N_{11}]^t = \left[\frac{3x^2}{(\Delta x)^2} - \frac{2x^3}{(\Delta x)}, -\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{x^3}{(\Delta x)^3} \right] \tag{g}$$

Równania redukcyjne przyjmą postać:

$$\int_0^{\Delta x} \left[\frac{3x^2}{(\Delta x)^2} - \frac{2x^3}{(\Delta x)^3} \right] R(x) dx = 0, \quad \int_0^{\Delta x} \left[-\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{x^3}{(\Delta x)^3} \right] R(x) dx = 0.$$

Podstawienie do równań redukcyjnych wyżej zapisanej reszty (f), ich scałkowanie oraz wykonanie elementarnych działań pozwala ostatecznie otrzymać następujące dwa równania algebraiczne z dwoma niewiadomymi $\bar{\psi}_{01}$ i $\bar{\psi}_{11}$:

$$\begin{aligned}
12\bar{\psi}_{01} - 11\bar{\psi}_{11} &= 12\bar{\psi}_{00} + \Delta x \bar{\psi}_{10} - 10(\Delta x)^2 p, \\
3\bar{\psi}_{01} - 4\Delta x \bar{\psi}_{11} &= 3\bar{\psi}_{00} - \Delta x \bar{\psi}_{10} - 5(\Delta x)^2 p
\end{aligned} \tag{h}$$

Niewiadome zagadnienia, obliczone po rozwiązaniu tego układu równań, mają wartości:

$$\bar{\psi}_{01} = \bar{\psi}_{00} + \Delta x \bar{\psi}_{10} + (\Delta x)^2 p, \quad \bar{\psi}_{11} = \bar{\psi}_{10} + 2\Delta x p.$$

Wartości te redukują do zera resztę i ostatecznie ustalają przyjętą postać przybliżonego rozwiązania rozpatrywanego równania różniczkowego. Po podstawieniu tych wartości do wyrażenia funkcji przybliżonej i po odpowiednich przekształceniach funkcja ta przyjmie poniższą postać i spełni rozpatrywane równanie różniczkowe:

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_{00} + x\bar{\psi}_{10} + x^2p, \quad \frac{d^2\bar{\psi}(x)}{dx^2} = 2p \quad (i)$$

To przybliżone rozwiązanie zweryfikować można rozwiązaniem ścisłym, gdyż rozpatrywane równanie różniczkowe można też rozwiązać w sposób ścisły. Mianowicie dwukrotnie całkując to równanie różniczkowe, otrzymamy:

$$\psi = px^2 + C_1x + C_2$$

gdzie C_1, C_2 są stałymi całkowania, których wartości wyznaczymy z tych samych, co poprzednio warunków brzegowych (przy $x_0 = 0$), wtedy $\psi(0) = C_2 = \bar{\psi}_{00}$, $d[\psi(0)]/dx = C_1 = \bar{\psi}_{10}$. Stąd, po podstawieniu tych wartości stałych całkowania do rozwiązania ścisłego, otrzymamy:

$$\psi = \bar{\psi}_{00} + x\bar{\psi}_{10} + x^2p \quad (j)$$

Jest to rozwiązanie identyczne z rozwiązaniem przybliżonym (i).

Przykład 2.5. Rozwiązanie równania różniczkowego quasi-harmonicznego (modelującego m.in. zagadnienie przewodnictwa ciepła)

Chcąc przybliżyć ogólne możliwości zastosowania metody elementów skończonych rozpatrzmy teraz quasi-harmoniczne równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(q_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \theta = 0 \quad (a)$$

w którym pewna nieznaną wielkość $\psi(x, t)$ jest jednoznacznie określona wewnątrz rozpatrywanego obszaru V , natomiast funkcje $q_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$; $\theta(x, t)$ są znane. Może być przy tym, że:

$$\theta(x, t) = \theta_0 - \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (b)$$

W poszczególnych, konkretnych problemach (np. fizycznych) spotykane są różne warunki brzegowe, które muszą spełniać rozwiązania tego równania różniczkowego. Przyjmijmy teraz, że albo jest zadana wartość ψ na części S_1 brzegu obszaru:

$$\psi = \psi_b \quad (c)$$

albo na innej części S_2 brzegu powinno być spełnione równanie:

$$q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + q_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cos(n, x_2) + q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \cos(n, x_3) + \eta_0 + \eta_\psi = 0 \quad (d)$$

gdzie n określa wektor normalnej do powierzchni ograniczającej rozpatrywany obszar, a η_0, η są pewnymi znanymi na brzegu wielkościami. Równaniu różniczkowemu (a) i jego warunkom brzegowym (c) i (d) odpowiada następujący funkcjonal:

$$\chi = \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ q_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + q_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 + q_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right)^2 \right\} - \theta \psi \right] dv + \int_S \left(\eta_0 \psi + \frac{1}{2} \eta \psi^2 \right) ds \quad (e)$$

Można przy tym sprawdzić (por. Przykłady 2.1, 2.2), że zminimalizowany następnie ten funkcjonal prowadzi bezpośrednio do rozpatrywanego równania różniczkowego i automatycznego spełnienia warunków brzegowych. W myśl koncepcji metody elementów skończonych takiej minimalizacji sformułowanego funkcjonala można dokonać po dyskretyzacji zbiorem elementów skończonych obszaru V i po wyrażeniu nieznanej funkcji ψ z pomocą przestrzennie przybliżającej funkcji ψ' zmiennych ψ_i będących wartościami tej funkcji w obranych węzłach elementów skończonych. Niech funkcja przybliżająca ma postać:

$$\psi = [N]\{\psi_i\} = [N_1, N_2, \dots, N_n][\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^t, i = 1, 2, \dots, n \quad (f)$$

gdzie $[N(x)]$ jest wybraną funkcją, w metodzie elementów skończonych nazywaną funkcją kształtu, a $\psi_i = \psi_i(x)$ są skalarami.

Po wariacyjnym (por. zasadę (2.2) i (2.4)) zminimalizowaniu, wyrażonego w obrębie dowolnego elementu skończonego przybliżoną funkcją ψ_i funkcjonala, otrzymuje się zbiór i równań algebraicznych, który w metodzie elementów skończonych nazywany jest charakterystyką tego (i każdego innego) elementu:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\psi_i\}} = [H]\{\psi_i\} - \{P\} \quad (g)$$

gdzie macierz $[H]$ jest określona w następujący sposób:

$$H_{rs} = \int_V \left(q_1 \frac{\partial N_r}{\partial x_1} \frac{\partial N_s}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial N_r}{\partial x_2} \frac{\partial N_s}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial N_r}{\partial x_3} \frac{\partial N_s}{\partial x_3} \right) dv + \int_S [N]^t \eta N_r ds \quad (h)$$

natomiast macierz $\{P\}$ za pomocą całki:

$$\{P_r\} = \int_V \theta N_r dv - \int_S \eta_0 N_r ds, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (i)$$

przy czym całki powierzchniowe oblicza się jedynie dla ścian zewnętrznych elementów skończonych, leżących na brzegu obszaru V .

Przedstawiona charakterystyka elementu wynika z następujących operacji różniczkowania:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_i} = \int_V \left\{ q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + q_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \psi_i} \right\} dv + \\ + \int_S \left(\eta_0 \frac{\partial \psi}{\partial \psi_i} + \eta \psi \frac{\partial \psi}{\partial \psi_i} \right) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

oraz z faktu, że:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_s} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x_s}, \frac{\partial N_2}{\partial x_s}, \dots, \frac{\partial N_n}{\partial x_s} \right] \{ \psi_i \}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x_s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \psi_i} = N_i \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, 3.$$

Ten sam rezultat otrzymać można też metodą rezydualną, z pomocą tej samej funkcji przybliżającej (f) i według bezpośrednio zastosowanej koncepcji metody elementów skończonych. Jeśli zatem, funkcję (f) wprowadzimy do równania różniczkowego (a), to otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(q_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \theta = R \neq 0 \quad (j)$$

gdzie R jest resztą wynikającą z przybliżenia. Po zastąpieniu obszaru V elementami skończonymi warunek redukcji tej reszty może być zastosowany do elementów skończonych w następujący sposób:

$$\int_{\Delta V} N_i R dv = 0 \quad (k)$$

lub

$$\int_{\Delta V} N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(q_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right\} dv + \int_{\Delta V} N_i \theta dv = 0 \quad (l)$$

Po przekształceniach (por. [18]) wyrażenia (l), zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Greena-Ostrogradzkiego oraz po tym sposobem wprowadzeniu warunku brzegowego (d) ostatecznie otrzymamy:

$$\left[\int_{\Delta V} \left\{ \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_1} \right) q_1 \left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) q_2 \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_3} \right) q_3 \left(\frac{\partial N}{\partial x_3} \right) \right\} dv + \right. \\ \left. + \int_{\Delta S_2} N_i \eta N ds \right] \psi_i + \int_{\Delta V} N_i \theta dv + \int_{\Delta S_2} N_i \eta_0 ds = 0 \quad (m)$$

Jest to rezultat identyczny z poprzednim (por. (g), (h), (i) i wyjaśnienia operacji różniczkowania). Wobec tego możemy zapisać – odniesione do obszarów elementów skończonych – oba rezultaty we wspólnej, standardowej dla metody elementów skończonych postaci:

$$[H]\{\psi_i\} - \{P\} = 0 \quad (n)$$

Charakterystyka zdyskretyzowanego obszaru V , czyli łączna charakterystyka wszystkich elementów skończonych, wyraża się podobnym do (n) równaniem macierzowym (algebraicznym) o postaci:

$$[\bar{H}]\{\psi_i\} - \{\bar{R}\} = \{0\} \quad (o)$$

gdzie $[\bar{H}] = \sum_m [H]_m, \quad \{\bar{R}\} = \sum_m \{P\}_m$

dla m oznaczającego liczbę elementów skończonych idealizujących rozpatrywany, dyskretny model obszaru.

Przy rozwiniętej (por. (b)) funkcji $\theta(x, t)$ otrzymujemy uogólnioną charakterystykę obszaru:

$$[\bar{G}] \frac{\partial^2 \{\psi_i\}}{\partial t^2} + [\bar{F}] \frac{\partial \{\psi_i\}}{\partial t} + [\bar{H}]\{\psi_i\} - \{\bar{R}\} = \{0\} \quad (p)$$

gdzie $[\bar{G}] = \sum_m \left(\int_V [N]^t \rho [N] dv \right)_m, \quad [\bar{F}] = \sum_m \left(\int_V [N]^t \mu [N] dv \right)_m$

Ponieważ w dalszej treści nastąpi szersze i szczegółowe omówienie metody elementów skończonych i rozwiązań rozpatrywanych problemów, to do przedmiotu tego przykładu będzie okazja powrócić.

Trzeba dodać, że przedstawione quasi-harmoniczne równanie różniczkowe ma interpretację fizyczną i jest stosowane do opisu m.in. przepływów cieczy idealnych, filtracji cieczy przez ośrodki porowate, przewodnictwa ciepła, zagadnień potencjału elektrycznego i magnetycznego. Zagadnienie przewodnictwa ciepła poruszone zostało w przykładzie 2.1, w którym podobnie omawiany był szczególny, jednowymiarowy przypadek równania (a).

Przypadek trzeci, (gdy u dowolne, por. Tabl. 2.1) skupia się głównie na przybliżonym traktowaniu pierwszego warunku brzegowego $u_0 = \bar{u}$, związanego z powierzchnią S_1 (por. (2.6)). W tym przypadku redukcja reszt odbywa się na podstawie warunku:

$$\int_V e w^* dv = \int_{S_2} e_2 w^* ds - \int_{S_1} e_1 \frac{\partial w^*}{\partial n} ds$$

$$\text{lub } \int_V (\nabla^2 u) w^* dv = \int_{S_2} (q - \bar{q}) w^* ds - \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w^*}{\partial n} ds \quad (2.20)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu przez części z uwzględnieniem twierdzenia Gaussa-Greena-Ostrogradzkiego drugiego z równań (2.20) otrzymujemy równanie odwrócone:

$$\int_V (\nabla^2 w^*) u dv = - \int_{S_2} \bar{q} w^* ds - \int_{S_1} q w^* ds + \int_{S_2} u \frac{\partial w^*}{\partial n} ds + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w^*}{\partial n} ds \quad (2.21)$$

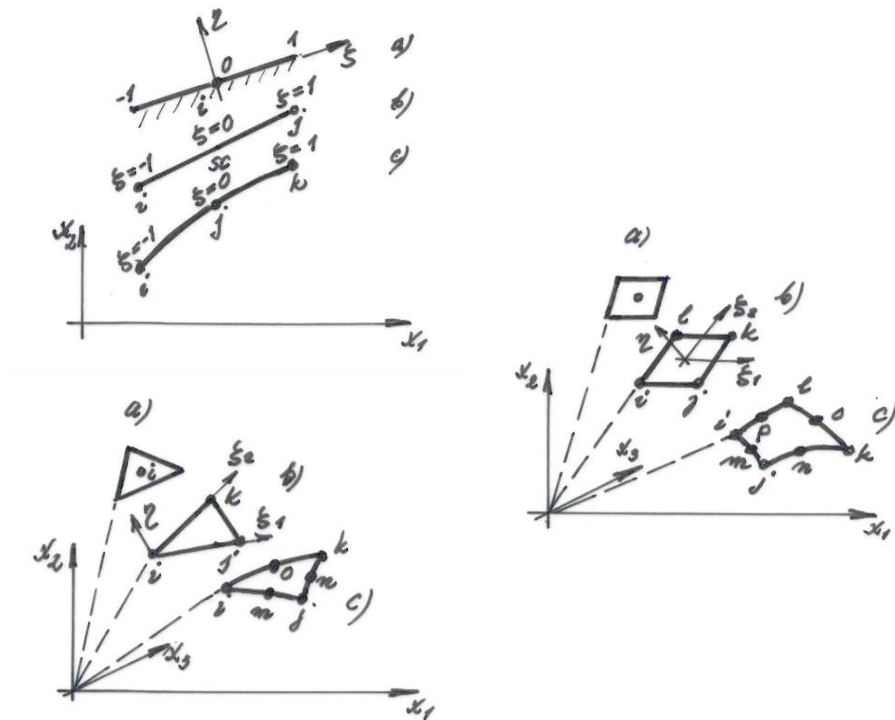
Z równania (2.21) wypływa wniosek, że funkcja wagi musi spełniać równanie różniczkowe drugiego rzędu $\nabla^2 w^* = 0$, czyli musi być ciągła i różniczkowalna do drugiej pochodnej włącznie, czyli funkcją np. o postaci:

$$w^*(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \sin x + \beta_i \cos x), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.22)$$

W tej grupie metod upowszechniła się metoda całkowania brzegowego, w Polsce nazywana także metodą elementów brzegowych [5,6]. Koncepcja tej młodszej metody czerpie zarówno z metody różnic skończonych (eksploatuje w swoim rozwiązaniu właściwości delty Diraca), jak i z metody elementów skończonych (dyskretyzacji – przez przybliżone zastąpienie możliwie małymi powierzchniowymi elementami skończonymi – podlega powierzchnia brzegowa obszaru ważności rozwiązywanego równania różniczkowego). Funkcja przybliżająca rozwiązanie formułowana jest zatem indywidualnie dla założonych figur elementów skończonych powierzchni (podobnie jak w metodzie elementów skończonych), funkcja wagowa jest natomiast znanym, najczęściej osobliwym i wymagającym wtedy wykorzystania w praktyce obliczeniowej delty Diraca, rozwiązaniem ścisłym równań różniczkowych charakteryzujących rozpatrywane zagadnienie fizyczne.

Przygotowanie siatki podziału na brzegowe elementy skończone powierzchni brzegowej rozpatrywanego obszaru jest punktem startowym algorytmu rozwiązania podjętego zagadnienia. W zagadnieniach dwuwymiarowych (płaskich) elementy brzegowe są albo liniami prostymi, albo liniami dostosowanymi do rzeczywistej geometrii brzegowej obszaru; w zagadnieniach trójwymiarowych (przestrzennych) elementy brzegowe są natomiast albo płaskimi trójkątnymi lub czworobocznymi figurami, albo powierzchniami dostosowanymi do rzeczywistej geometrii brzegowej obszaru o zarysie trój- i czworobocznym (por. Rys. 2.7). Mankamenty metody jest problem uwzględniania wewnętrznych sił objętościowych, do czego potrzebne jest zastąpienie także całości obszaru objętościowymi elementami skończonymi.

Linie i powierzchnie elementów brzegowych opisywane są we współrzędnych lokalnych (także krzywoliniowych). Elementy te różnią się ponadto liczbą i położeniem punktów-węzłów, w których opisywane są węzłowe wartości funkcji przybliżającej. Wartości węzłowe stanowią jak we wszystkich metodach zbiór niewiadomych zagadnienia. Dzięki dyskretyzacji brzegu przybliżona postać równania (2.21) to – podobnie jak we wszystkich innych metodach – układ równań algebraicznych.



Rys. 2.7. Potrójne przykłady liniowych i powierzchniowych (trójkątnych i czworobocznych) elementów brzegowych, stosowanych w metodzie całkowania brzegowego

Algorytm rozwiązania tą metodą zawierać też musi indywidualne sformułowanie podjętego zagadnienia fizycznego wg reguł przedstawionych równaniami-warunkami (2.20), zwłaszcza powtórzenia drogi przejścia z wyjściowej postaci warunku do końcowej. Do uzyskanego sformułowania podstawić następnie należy funkcję wagi, a potem – wykorzystując funkcje przybliżające – zamienić to sformułowanie na odpowiednią formę dyskretną.

Istotne elementy algorytmu metody całkowania brzegowego niech wyjaśni przykład.

Przykład 2.6. Zagadnienie materialnego continuum sprężystego. Rozwiązanie metodą całkowania brzegowego

Równanie statycznej równowagi wewnętrznej trójwymiarowego, izotropowego continuum sprężystego o obszarze V ograniczonym powierzchnią S , jak wiadomo (por. zapis (1.5), dotyczący zagadnienia płaskiego), ma postać:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0, \quad (a1)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

lub w zapisie skróconym

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (a2)$$

gdzie σ_{ij} oznacza naprężenia normalne (gdy $i = j$) lub styczne (gdy $j \neq i$), X_j natomiast wewnętrzne siły objętościowe.

$$p_1 = \sigma_{11} \cos(n, x_1) + \tau_{12} \cos(n, x_2) + \tau_{13} \cos(n, x_3) = \bar{p}_1,$$

$$p_2 = \tau_{21} \cos(n, x_1) + \sigma_{22} \cos(n, x_2) + \tau_{23} \cos(n, x_3) = \bar{p}_2, \quad (b1)$$

$$p_3 = \tau_{31} \cos(n, x_1) + \tau_{32} \cos(n, x_2) + \sigma_{33} \cos(n, x_3) = \bar{p}_3$$

lub $\sigma_{ij} \cos(n, x_i) = \bar{p}_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (b2)$

gdzie $\bar{p}_i$ to zadane i odniesione do jednostki pola powierzchni siły zewnętrzne, n określa zaś kierunek normalnej do powierzchni brzegu S_2 w punkcie przyłożenia sił i .

Na innej S_1 części brzegu, odpowiadające stanowi naprężeń pole przemieszczeń, definiowanych składowymi kierunkowymi u_1, u_2, u_3 osiągać musi zadane wartości $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, czyli warunek brzegowy:

$$u_i = \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (c)$$

Znane są wiążące ze sobą przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia związki kinematyczne i konstytutywne, które dla uproszczenia nie zostaną w tym przykładzie przytoczone. Znane są też wszystkie potrzebne właściwości materiału znajdującego się w stanie naturalnym continuum.

Przybliżone równanie stanu równowagi (a) można względem naprężeń rozwiązać na podstawie warunku (2.19), który dla tego równania z jego warunkami brzegowymi należy zapisać następująco:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_j \right) u_k^* dv = \int_{S_2} (p - \bar{p}_i) u_k^* ds + \int_{S_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* ds \quad (d1)$$

lub po identycznych, jak w przypadku odwracania równania (2.19) w równanie (2.20), przekształceniach:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} \right) u_k dv + \int_V X_k u_k^* dv + \int_{S_2} \bar{p}_k u_k^* ds + \\ & + \int_{S_1} p_k u_k^* ds = \int_{S_2} u_k p_k^* ds + \int_{S_1} \bar{u}_k p_k^* ds \end{aligned} \quad (d2)$$

gdzie σ_{ij}^* , u_k^* , p_k^* są odpowiednio naprężeniami wewnętrznymi oraz przemieszczeniami i naprężeniami powierzchniowymi, czyli wartościami wewnętrznymi i zewnętrznymi funkcji wagi, która utożsamia się z tzw. rozwiązaniem fundamentalnym (w tym konkretnym przypadku rozwiązaniem Kelvina [5]) równania Naviera (a), a p_k^* spełnia, przy zachowanych w tym przybliżonym rozwiązaniu tych samych – dla obu pól obciążeń $\bar{p}_k$ i p_k^* – związków kinematycznych i konstytutywnych, podobny do (b) warunek brzegowy:

$$p_k^* = \sigma_{ij}^* \cos(n_k, x_j) \quad (e)$$

Rozwiązanie fundamentalne jest rozwiązaniem równania różniczkowego

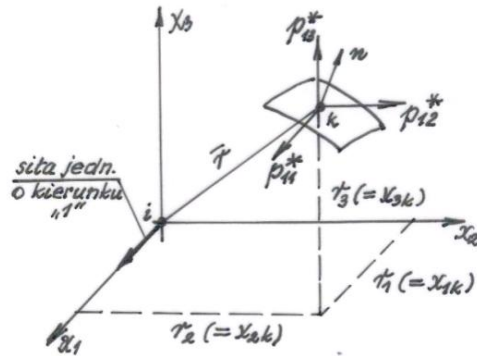
$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + \delta_l^i = 0 \quad (f)$$

w którym δ_l^i jest deltą Diraca i reprezentuje jednostkowe obciążenie punktu „i” (por. Rys. 2.8), działające w jednym („l”) z kierunków układu współrzędnych.

Wprowadzenie rozwiązania Kelvina równania różniczkowego (f) do równania redukcyjnego (d2) zamienia pierwszą w nim całkę na wartość u_l^i , która jest przemieszczeniem punktu „i” w kierunku „l”. W związku z tym można zinterpretować występujące w równaniu (d2) wartości u_k^* , p_k^* jako odpowiednio przemieszczenia i powierzchniowe obciążenia oceniane w punkcie „k” i będące skutkiem jednostkowej siły przyłożonej w punkcie „i” oraz działającej w kierunku „l”. Ponieważ mówimy o sile jednostkowej, to o wielkościach u_k^* , p_k^* można mówić jako o współczynnikach wpływu stanu obciążeń punktu „i” na stan przemieszczeń i obciążeń punktu „k”. Po uwzględnieniu sił jednostkowych działających w punkcie „i” we wszystkich trzech kierunkach, wynik całkowania wspomnianej całki ujmuje się następująco:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} \right) u_k dv = - \int_V \delta_l^i u_k dv = -c_i u_l^i \quad (g)$$

gdzie c_i jest współczynnikiem uwzględniającym niegładkie ułożenie względem siebie brzegowych elementów skończonych, przed ustaleniem wartości wymagających osobnych obliczeń.



Rys. 2.8. Interpretacja współczynników macierzy wpływu, tworzonej metodą całkowania brzegowego

Jeśli dodatkowo zadane wielkości brzegowe $\bar{u}_k$ oraz $\bar{p}_k$ włączymy do wspólnych zbiorów wartości u_k i p_k , to równanie (d2) w punkcie „l” ostatecznie przyjmie postać następującą:

$$c_i u_l^i + \int_S p_{lk}^* u_k ds = \int_S u_{lk}^* p_k ds + \int_V X_k u_k^* dv \quad (\text{h1})$$

której można też nadać postać macierzową

$$c_i \mathbf{u}_i + \int_S \mathbf{p}^* \mathbf{u} ds = \int_S \mathbf{u}^* \mathbf{p} ds + \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^* dv \quad (\text{h2})$$

gdzie $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^t$, $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^t$, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t$ (t jest symbolem transpozycji macierzy); $\mathbf{u}_i$ jest macierzą przekątną 3×3 ; macierze wpływu $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{p}^*$ są wymiaru 3×3 i zawierają po 9 elementów odpowiednio u_{lk}^* i p_{lk}^* ($l, k = 1, 2, 3$).

Dyskretyzacji powierzchni S skończonymi elementami brzegowymi towarzyszy zamiana w obrębie każdego elementu funkcji $\mathbf{u}$ i $\mathbf{p}$ funkcjami przybliżającymi

$$\mathbf{u} = \Phi^t \mathbf{u}^e, \mathbf{p} = \psi^t \mathbf{p}^e \quad (\text{i})$$

gdzie $\mathbf{u}^e \mathbf{i} \mathbf{p}^e$ są wektorami–kolumnami wartości węzłowych przybliżanych funkcji o wymiarze równym liczbie węzłów danego elementu brzegowego. Po wykonaniu tego przybliżenia równanie (h2) zapiszemy jako

$$c_i \mathbf{u}_i + \sum_m \left(\int_{\Delta S_m} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\Phi}^t ds \right) \mathbf{u}^n = \sum_m \left(\int_{\Delta S_m} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\Psi}^t ds \right) \mathbf{p}^n + \sum_r \left(\int_{\Delta V_r} \mathbf{x} \mathbf{u}^* dv \right) \quad (\text{j})$$

a w wyrażeniu tym Δ sygnalizuje powierzchnie elementów brzegowych (i objętości elementów przestrzennych wewnątrz obszaru rozwiązania), m liczbę elementów brzegowych (r liczbę elementów przestrzennych). Ten zapis dotyczy teraz węzła „ i ”, ale wyraża wpływ sił jednostkowych przyłożonych w tym węźle na stan wszystkich węzłów.

Dalszym krokiem rozwiązania jest całkowanie równania (j), a potem całkowanie równań podobnych, związanych z pozostałymi węzłami. W rezultacie tego powstanie układ równań algebraicznych z pełną macierzą współczynników i z liczbą równań np. równą – gdy pominiemy objętościowe siły wewnętrzne – sześciokrotnej liczbie węzłów powierzchniowych.

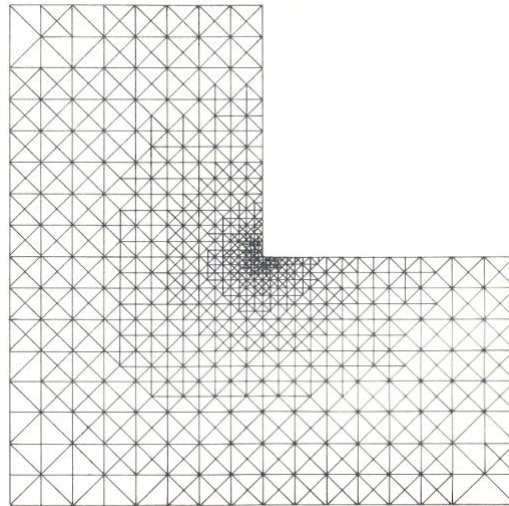
Rozwiązanie tego układu względem niewiadomych u^n i p^n kończy podstawową część algorytmu rozwiązania.

Funkcje kształtu

Przestrzenny element skończony z założenia jest małym, o skończonej objętości wycinkiem obszaru modelowanego układu mechanicznego. Geometrycznie musi przedstawiać wypukłą bryłę o możliwie prostym kształcie, zwłaszcza takim by łatwo i z zadowalającym przybliżeniem można by było odtworzyć geometrię obszaru badanego układu lub ośrodka odpowiednio wybranymi powierzchniami lub płaszczyznami. Na stopień tego przybliżenia wpływa głównie sposób odtworzenia powierzchni brzegowej obszaru materialnego układu.

Tak na przykład przy podziale obszaru płaszczyznami gładka powierzchnia brzegowa zastąpiona zostaje wielościenną powierzchnią o łącznym polu wynikającym z pól brzegowych płaskich ścian brzegowych elementów skończonych. Dokładność odtworzenia rzeczywistej geometrii obszaru zwiększa się ze wzrostem liczby elementów skończonych. Osiągalne jest to w drodze zagęszczenia powierzchni podziału, tj. tworzenia elementów o mniejszej objętości i wymiarach. Dzięki temu możliwe jest zatem dość dokładne geometryczne odwzorowanie obszarów o praktycznie dowolnych powierzchniach brzegowych.

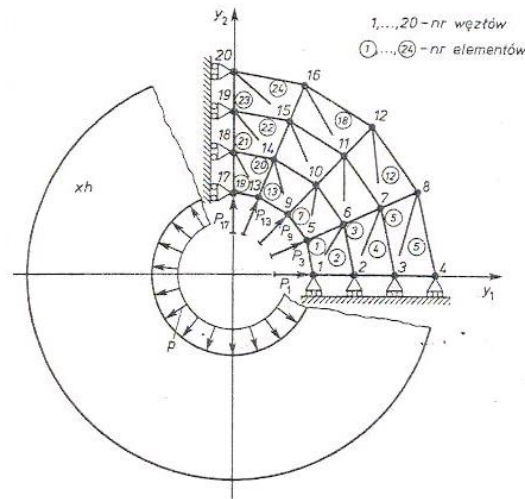
Każdemu elementowi skończonemu mogą być z założenia nadane indywidualne własności fizyczne. Zasada ta umożliwia w przybliżony sposób odtworzenie znanych lub założonych rozkładów rzeczywistych własności fizycznych badanego ośrodka. W obszarze elementu skończonego własności te modelowane mogą być różnorodne. Praktycznie korzystne jest założenie o izotropowości własności fizycznych elementu. Zgodność z rzeczywistością może być wtedy osiągnięta przez odpowiednią zmianę wartości tych własności w kolejnych elementach i przez dobór (wzrost) liczby elementów skończonych.



Rys. 2.9. Przykład siatki płaskich trójkątnych elementów skończonych, dostosowanej nierównomiernością podziału do oczekiwanych gradientów naprężeń (przykład dotyczy zagadnienia oceny koncentracji naprężeń w narożu skokowej zmiany przekroju obiektu)

W odniesieniu do ciągłego modelu fizycznego badanego ośrodka element skończony jest podmodelem wydzielonym spośród otaczających innych elementów. Oznacza to, jak już wiemy, możliwość wykorzystania tych samych koncepcji, zwłaszcza w budowie zależności matematycznych między zmiennymi stanu. Jednak oddziaływania wzajemne sąsiednich elementów ulegają dyskretyzacji i muszą być sprowadzone do równoważnych oddziaływań skupionych w węzłach, tj. w arbitralnie wybranych punktach brzegowych tych elementów. Są to najczęściej narożne punkty elementów skończonych. Dyskretyzacja oddziaływań dotyczy także elementów skończonych leżących na brzegach obszaru tak modelowanego ośrodka i pociąga za sobą konieczność sprowadzenia do oddziaływań skupionych wszystkich fizycznych skutków wydzielenia ośrodka z otoczenia. Te same uwagi odnoszą się także do elementów skończonych dwuwymiarowych (muszą być figurami wypukłymi) i elementów liniowych.

Konsekwencją nałożenia na każdy element skończony roli samodzielnego podmodelu fizycznego z równoczesnym zastąpieniem rzeczywistych funkcji stanu badanego obszaru (modelu-matki) funkcjami przybliżonymi są, wymienione przy prezentacji metod przybliżonych, dzielące te metody kompromisy i zróżnicowane wymagania co do doboru funkcji przybliżających (i funkcji wagi).



Rys. 2.10. Przykład zastąpienia kołowo-symetrycznej tarczy zbiorem elementów skończonych, a jej zewnętrznego ciągłego obciążenia zbiorem sił węzłowych. W tym obrazie zilustrowana została także racjonalizacja zagadnienia, czyli wykorzystanie symetrii modelu nominalnego do ograniczenia do ćwiartki (w tym konkretnym przykładzie) przestrzeni modelu dyskretnego

Przyjmuje się więc, że funkcje przybliżające osiągają identyczne wartości z wartościami funkcji przybliżanych jedynie w węzłach elementów. Są to zwykle liniowe kombinacje odpowiednio obranych tzw. funkcji kształtu, które są funkcjami współrzędnych punktów materialnych ośrodka i są – jak już wiemy – najczęściej wielomianami. Funkcje kształtu obiera się mając na uwadze to, aby były liniowo niezależne, ciągłe i różniczkowalne oraz aproksymowały z dowolną dokładnością każdą rzeczywistą funkcję stanu badanego ośrodka. Z założenia liczba stałych współczynników kombinacji funkcji kształtu jest identyczna z liczbą wybranych węzłów. Same zaś współczynniki wyrażają odpowiednią zmienną stanu, ale określaną w węzłach. Jest to zmienna niezależna, tj. wielkość fizyczna, która na podstawie związków kinematycznych i konstytutywnych jednoznacznie określa inne, niezbędne do opisu badanego zjawiska, zmienne stanu. Współczynniki kombinacji funkcji kształtu tak tworzą skończony zbiór zmiennych stanu, nazywanych w metodzie elementów skończonych zbiorem zmiennych węzłowych. Liczebność zbioru zmiennych węzłowych ustala liczba węzłów i liczba uwzględnionych w badanym problemie stopni swobody węzłów.

Śladem Ritz'a funkcje przybliżające, opisane we współrzędnych prostokątnych, przyjmuje się najczęściej w postaci:

- w zagadnieniach jednowymiarowych

$$w(x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots = [\psi]\{\alpha\} \quad (2.23a)$$

- w zagadnieniach dwuwymiarowych

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \dots = [\psi]\{\alpha\}, \\ w(x_1, x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \dots = [\Phi]\{\beta\} \end{aligned} \quad (2.23b)$$

- w zagadnieniach trójwymiarowych

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2 x_3 + \dots = [\psi]\{\alpha\}, \\ w(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_3 + \beta_5 x_1 x_2 + \beta_6 x_2 x_3 + \dots = [\Phi]\{\beta\}, \\ w(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3 + \gamma_5 x_1 x_2 + \gamma_6 x_2 x_3 + \dots = [\Theta]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (2.23c)$$

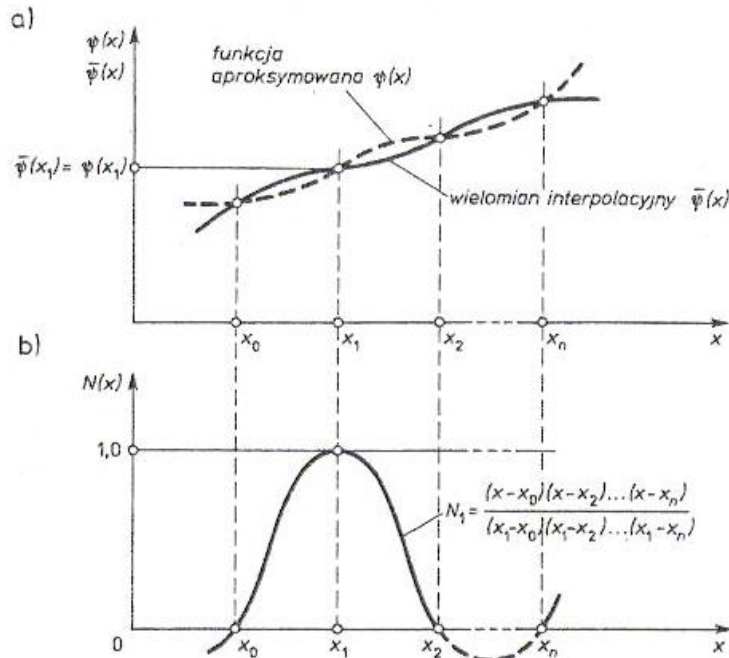
W szczególnych przypadkach $[\Theta] = [\Phi] = [\psi]$. Przyjmowane są także inne funkcje, np. te, które przytoczone były podczas omawiania klasyfikacji metod przybliżonych. Mając to w pamięci ogólnie zapiszmy, że $w(x_1, x_2, x_3) = [\psi]\{\alpha\}$ i zdefiniujmy na tej podstawie funkcję kształtu. Skoro funkcje przybliżające osiągają identyczne wartości z wartościami funkcji przybliżanych jedynie w węzłach elementów, to prawdziwe są sformułowania:

$$\{u\} = [\bar{\psi}]\{\alpha\} \text{ i } \{\alpha\} = [\bar{\psi}]^{-1}\{u\} \quad (2.24)$$

gdzie $\{u\}$ jest wektorem–kolumną węzłowych wartości w , $[\bar{\psi}]$ zaś macierzą powstałą z podstawienia do wyrażeń (2.22) wartości współrzędnych węzłów, identyfikujących wartości w z wartościami węzłowymi u . Zatem, w przypadku (2.22a) macierz $[\bar{\psi}]$ jest wektorem–wierszem $[1, x_{1m}, x_{1m}^2, \dots]$, gdzie x_{1m} jest współrzędną węzła m , w którym $w(x_{1m}) = u_m$. Wobec tego mamy:

$$w(x_1, x_2, x_3) = [\psi][\bar{\psi}]\{u\} = [N]\{u\} \quad (2.25)$$

gdzie wyrażenie $[N] = [\psi][\bar{\psi}]$ definiuje funkcję kształtu.



Rys. 2.11. Interpretacja graficzna matematycznego sensu aproksymacji funkcji wielomianem Lagrange'a

W metodzie elementów skończonych istotne jest także to, że funkcje kształtu mogą być obierane indywidualnie dla każdego elementu skończonego, bez konieczności znajomości geometrii, warunków początkowych i brzegowych obszaru badanego ośrodka. Pozwala to np. stabilizować raz na zawsze fizyczne charakterystyki elementów skończonych, zróżnicowanych geometrią, liczbą węzłów czy postacią przypisanych im funkcji kształtu. Przez pojęcie fizycznej charakterystyki elementu rozumie się teraz przybliżone zależności między zmiennymi stanu wewnątrz obszaru elementu a zmiennymi węzłowymi, określone jednoznacznie przyjętą kombinacją funkcji kształtu. Charakterystyka elementu skończonego jest odpowiednikiem równań ruchu czy równowagi statycznej badanego obszaru ośrodka, które przybierają postać macierzowych równań różniczkowych (w zagadnieniach przestrzenno-czasowych) lub macierzowych równań algebraicznych (w zagadnieniach przestrzennych).

Przykład 2.7. Zasada i skutki aproksymacji wielkości węzłowych materialnego continuum sprężystego

Jeśli utożsamimy w oraz jej węzłowe wartości u z polem przemieszczeń punktów materialnego continuum sprężystego i wykorzystamy

- związki kinematyczne między polem odkształceń i polem przemieszczeń:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{w\} \quad (a)$$

- związki konstytutywne między polem naprężeń i polem odkształceń

$$\{\sigma\} = [k]\{\varepsilon\} \quad (b)$$

oraz także definicje (2.23) i (2.24), to związki (a) i (b) możemy zapisać, że

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [D]\{w\} = [D][N]\{u\} = [B]\{u\}, \\ \{\sigma\} &= [k]\{\varepsilon\} = [k][D][N]\{u\} = [k][B]\{u\} \end{aligned} \quad (c)$$

Charakterystykę statyczną elementu skończonego ze zbioru wykorzystywanego do zagadnień statyki continuum sprężystego metoda elementów skończonych definiuje jako następujący bilans sił węzłowych $\{P\}$:

$$[K]\{u\} - \{P\} = \{0\} \quad (d)$$

gdzie:

$$[K] = \int_{\Delta V} [B]^t [k] [B] dv \quad (e)$$

jest macierzą sztywności elementu. Ta macierz i równanie (d) nie muszą być (na tym etapie) dodatnio określone.

W niektórych problemach fizycznych wystąpić mogą dodatkowe ograniczenia, nie wynikające ani z warunków brzegowych, ani z obranych funkcji kształtu. Wtedy pożyteczne lub konieczne (z punktu widzenia dokładności aproksymacji rzeczywistych funkcji stanu) może okazać się wprowadzenie dodatkowych zmiennych zagadnienia. Stanowią one wówczas zbiór zmiennych pozawęzłowych, związanych albo z elementami skończonymi, albo z ich powierzchniami brzegowymi. Uzupełniają zbiór niewiadomych problemu i są wyznaczone według tych samych zasad. Szczególną postacią zmiennych poza węzłowych są m.in. mnożniki występujące w znanych równaniach Lagrange’a.

W metodzie elementów skończonych stosuje się najczęściej aproksymację jednostajną rzeczywistych funkcji jako jeden z numerycznie wygodniejszych sposobów. Przy tym zastosowaniu podstawienie funkcji interpolacyjnej w miejsce funkcji aproksymowanej (por. Rys. 2.11.) oznacza przybliżenie interpolacyjne polegające na tym, że zdamy w wybranych punktach elementu skończo-

nego (węzłach) całkowitej równości wartości funkcji przybliżanej i wartości funkcji aproksymującej:

$$\psi(x_i) \equiv \bar{\psi}(x_i) \quad (2.26)$$

W szczególnym przypadku przybliżenia np. wielomianem posłużyć się można wzorami interpolacyjnymi Lagrange'a lub Hermite'a w następującym sensie:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x_i) &= N_0 \bar{\psi}_0 + N_1 \bar{\psi}_1 + N_2 \bar{\psi}_2 + \dots + N_{n-1} \bar{\psi}_{n-1} = \sum_i N_i \bar{\psi}_i = [N] \{\bar{\psi}\} \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$\text{przy czym} \quad N_i = 1, \text{ gdy } x = x_i, \text{ oraz } N_i = 0, \text{ gdy } x \neq x_i \quad (2.27)$$

Umożliwiają to interpolacyjne wielomiany Lagrange'a o ogólnej postaci:

$$N_i = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (2.27a)$$

W szczególności zaś mamy:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{n-1})}, \\ N_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n-1})}, \\ N_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{n-1})}, \\ N_{n-1} &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})} \end{aligned} \quad (2.27b)$$

Aproksymacja wielomianami Hermite'a z kolei polega jednak na tym, że żądamy w wybranych punktach elementu skończonego nie tylko całkowitej równości wartości funkcji przybliżanej i aproksymującej, lecz także równości ich pochodnych (istota tej aproksymacji i wielomiany Hermite'a pozwalające zachować ciągłość funkcji i jej pochodnych w rozpatrywanym przedziale, łącznie z jego brzegami przedstawione zostały w Przykładzie 2.4).

Wymagania stawiane funkcjom kształtu uzupełnić mogą kryteria zbieżności rozwiązania przybliżonego ze ścisłym. Jednostajna aproksymacja rzeczywistych funkcji wielomianami, w wielu przypadkach wystarcza do osiągnięcia zadowalającej dokładności rozwiązania. Ale jest to, oczywiście, jeden z możliwych sposobów przybliżonego opisanie rzeczywistego stanu elementu skończonego i uzyskania na tej podstawie poprawnych wyników.

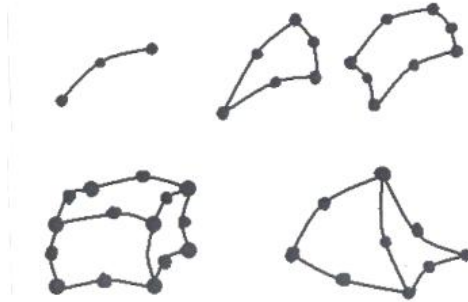
Ogólnie można powiedzieć, że precyzyjność metody elementów skończonych jest tym większa, im:

- funkcje kształtu dokładniej opisują rzeczywiste funkcje stanu elementu skończonego (co jest osiągalne np. przez zwiększenie liczby węzłów w obrębie elementu skończonego lub wykorzystanie funkcji innych niż wielomiany),
- większa jest liczba elementów skończonych idealizujących rozpatrywany obszar materialny układu mechanicznego (co jest osiągalne przez zmniejszenie ich wymiarów), a funkcje kształtu elementów spełniają stawiane wymagania i kryteria.

Trzeba dodać, że zwiększenie liczby węzłów w obrębie elementu skończonego umożliwiają tzw. izoparametryczne funkcje kształtu. Elementy skończone, których charakterystyki powstają na podstawie izoparametrycznych funkcji kształtu demonstruje rysunek 2.12. W uproszczeniu można powiedzieć, że te funkcje wynikają z zastosowania lokalnych, krzywoliniowych układów współrzędnych do opisu w tych układach współrzędnych elementu, jak i wielkości węzłowych funkcji przybliżających. Na każdej osi o kierunku i lokalnego układu współrzędnych zmienne zawarte są w przedziale $-1 \leq \zeta_i \leq +1$. Lokalne układy powiązane przy tym z globalnym układem są następujące:

$$x_1 = \sum_m N_i(\zeta) x_{1i}, x_2 = \sum_m N_i(\zeta) x_{2i}, x_3 = \sum_m N_i(\zeta) x_{3i}, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.28)$$

gdzie m jest liczbą węzłów w danym elemencie, N_i zaś wielomianem Serendipa.



Rys. 2.12. Przykłady elementów skończonych drugiego rodzaju (tj. takich, których charakterystyki budowane są na bazie izoparametrycznych funkcji kształtu)

Podobnie opisana jest wartość węzłowa przybliżanej funkcji:

$$u_1 = \sum_m N_i(\zeta) u_{1i}, u_2 = \sum_m N_i(\zeta) u_{2i}, u_3 = \sum_m N_i(\zeta) u_{3i}, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.29)$$

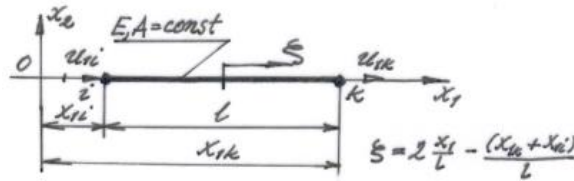
natomiast przejście z układu lokalnego do globalnego (i odwrotnie) przebiega wg zasady

$$\frac{\partial}{\partial x} = J \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (\text{lub} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial x}) \quad (2.30)$$

gdzie jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Przykład 2.8. Izoparametryczna funkcja kształtu liniowego elementu skończonego drugiego rodzaju (typu serendipowskiego)



Rys. 2.13. Założenia modelowe liniowego elementu skończonego drugiego rodzaju

W dwuwęzłowym liniowym elemencie skończonym (por. Rys. 2.13.) lokalny układ współrzędnych 0ζ pokrywa się kierunkiem z globalnym układem $0x_1$. Jeśli jego początek umieścimy w środku elementu, to spełni to wymaganie, by $-1 \leq \zeta \leq +1$, a powiązanie z układem globalnym (por. (2.28)) wyrazi się następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)x_{1i} + \frac{1}{2}(1 + \zeta)x_{1k} = N_i x_{1i} + N_k x_{1k} \quad (a)$$

gdzie
$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \zeta), N_k = \frac{1}{2}(1 + \zeta).$$

Podobnie opiszemy wielkości węzłowe u :

$$u_1 = N_i u_{1i} + N_k u_{1k} \quad (b)$$

Jeśli przyjmiemy, że rysunek 2.13 przedstawia liniowy element skończony, będący wycinkiem z rozciąganego sprężystego pręta pryzmatycznego, to u jest funkcją przemieszczeń, a u_{1i} i u_{1k} są jej wartościami węzłowymi. Mając dany moduł sprężystości podłużnej materiału pręta i pole jego przekroju poprzecznego A możemy opisać jego charakterystykę (por. Przykład 2.7):

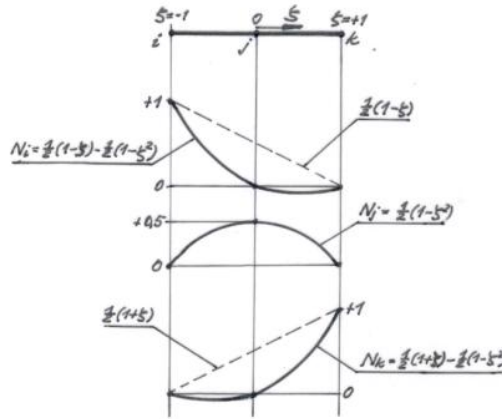
$$\varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{\left(\frac{du_1}{d\zeta}\right)}{\left(\frac{dx_1}{d\zeta}\right)} = \frac{(u_{1k} - u_{1i})}{l} = \frac{1}{l}[-1, 1][u_{1i} u_{1k}]^t \quad (c)$$

gdzie $\frac{du_1}{d\zeta} = \frac{1}{2}(u_{1k} - u_{1i}), \frac{dx_1}{d\zeta} = \frac{1}{2}(x_{1k} - x_{1i}) = \frac{l}{2} = J,$

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{E}{l}[-1, 1][u_{1i} u_{1k}]^t, \quad (d)$$

$$[K] = \frac{AE}{l^2} \int_{-1}^{+1} [-1, 1]^t [-1, 1] J d\zeta \quad (e)$$

Przykład 2.9. Zasada powiększania liczby węzłów i zmian funkcji kształtu na przykładzie liniowego elementu skończonego drugiego rodzaju



Rys. 2.14. Interpretacja prowadzącej do powiększenia liczby węzłów budowy izoparametrycznej funkcji kształtu liniowego elementu skończonego drugiego rodzaju

W przykładzie 2.8. użyty został dwuwęzłowy element skończony. Skutki powiększenia w nim liczby węzłów np. o dodatkowy, położony w początku lokalnego układu współrzędnych ilustruje rysunek 2.14.

Powiązanie współrzędnych i wartości węzłowych w tym przypadku objaśniają następujące zapisy:

$$x_1 = N_i x_{1i} + N_j x_{1j} + N_k x_{1k} = [N_i, N_j, N_k][x_{1i}, x_{1j}, x_{1k}]^t$$

$$u_1 = N_i u_{1i} + N_j u_{1j} + N_k u_{1k} = [N_i, N_j, N_k][u_{1i}, u_{1j}, u_{1k}]^t$$

gdzie

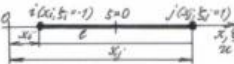
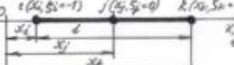
$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \zeta) - \frac{1}{2}(1 - \zeta^2),$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2),$$

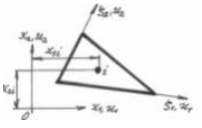
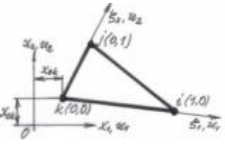
$$N_k = \frac{1}{2}(1 + \zeta) - \frac{1}{2}(1 - \zeta^2).$$

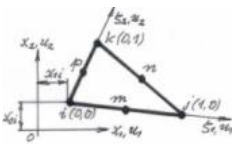
Rysunek 2.14. ilustruje zasadę doboru, właściwie dodawania wraz z nowym węzłem, nowych członów funkcji kształtu, co widzimy to na tle członów poprzednich (linie kreskowe, por. Przykład 2.8). Tablice 2.3a, 2.3b i 2.3c podają przykłady funkcji kształtu, stosowanych w jedno- i dwuwymiarowych zagadnieniach MES i MEB.

Tablica. 2.3a. Przykłady zastosowań funkcji kształtu w charakterystykach elementów skończonych liniowych (w zagadnieniach jednowymiarowych)

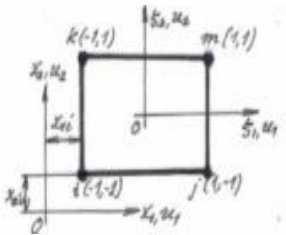
	Schemat elementu skończonego	Postać funkcji kształtu	
		I rodzaju	II rodzaju
1.		$u(x) = const = u_i$ $N_i = 1$	$u(\xi) = const = u_i$ $N_i = 1$
2.		$u(x) = [1, x][\alpha_1, \alpha_2]^t = [X]\{\alpha\}$ $\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\bar{u}\} = [\bar{X}]\{\alpha\}$ $\{\alpha\} = [\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\}$ $u(x) = [X][\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\} = [N]\{\bar{u}\}$ $N_i = \frac{(x_j - x)}{l}, N_j = \frac{(x - x_i)}{l} \quad (l = x_j - x_i)$	$u(\xi) = [N_i, N_j][u_i, u_j]^t \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u(\xi) = [N]\{\bar{u}\}$ $N_i = \frac{(1 - \xi)}{2}, N_j = \frac{(1 + \xi)}{2}.$
3.		$u(x) = [1, x, x^2][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^t = [X]\{\alpha\}$ $[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{bmatrix}, [X] = [1, x, x^2]$ $[N] = [X][\bar{X}]^{-1}, u(x) = [N][u_i, u_j, u_k]^t$	$u(\xi) = [N_i, N_j, N_k][u_i, u_j, u_k]^t \Leftrightarrow u(\xi) = [N]\{\bar{u}\}$ $N_i = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}, N_j = \frac{\xi(1 + \xi)}{2},$ $N_k = (1 - \xi)(1 + \xi)$

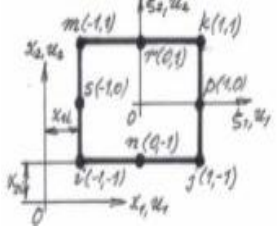
Tablica 2.3b. Przykłady zastosowań funkcji kształtu w charakterystykach trójkątnych elementów skończonych płaskich (w zagadnieniach dwuwymiarowych)

	Schemat elementu skończonego	Postać funkcji kształtu	
		I rodzaju	II rodzaju
6.		$u_1(x_1, x_2) = \text{const} = u_{1i}$ $u_2(x_1, x_2) = \text{const} = u_{2i}$ $N_{1i} = N_{2i} = 1$	$u_1(\xi_1, \xi_2) = \text{const} = u_{1i}$ $u_2(\xi_1, \xi_2) = \text{const} = u_{2i}$ $N_{1i} = N_{2i} = 1$
7.		$\begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]^t$ $\Rightarrow \{u(x_1, x_2)\} = [X]\{\alpha\}$ $[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix},$ $\{\alpha\} = [\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{1j}, u_{1k}, u_{2i}, u_{2j}, u_{2k}]^t$ $\left\{ u(x_1, x_2) = [N]\{\bar{u}\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} [\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\} \right\}$	$\begin{Bmatrix} u_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} = [N]\{\bar{u}\} =$ $= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}]^t$ $N_i = \xi_1(2\xi_1 - 1),$ $N_j = \xi_2(2\xi_2 - 1),$ $N_k = (1 - \xi_1 - \xi_2)(1 - 2\xi_1 - 2\xi_2).$

8.		$\begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} = \{u(x_1, x_2)\}[X]\{\alpha\} = [N]\{\bar{u}\}$ $[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$ $\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}]^t$ $\{\alpha\} = [\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\} \Rightarrow \{u(x_1, x_2)\} = [X][\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{1j}, u_{1k}, u_{1m}, u_{1n}, u_{1p}, u_{2i}, u_{2j}, u_{2k}, u_{2m}, u_{2n}, u_{2p}]^t$ $[\bar{X}] - \text{wg wzoru z poz. 2,3 i 7 tablic 2.3a i 2.3b}$	$\begin{Bmatrix} u_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} = [N]\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{1j}, u_{1k}, u_{1m}, u_{1n}, u_{1p}, u_{2i}, u_{2j}, u_{2k}, u_{2m}, u_{2n}, u_{2p}]^t$ $[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_m & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_m & 0 & N_p \end{bmatrix}$ $N_i = \xi_1(2\xi_1 - 1), \quad N_j = \xi_2(2\xi_2 - 1),$ $N_k = (1 - \xi_1 - \xi_2)(1 - 2\xi_1 - 2\xi_2),$ $N_m = 4\xi_1\xi_2, \quad N_n = 4\xi_2(1 - \xi_1 - \xi_2),$ $N_p = 4\xi_1(1 - \xi_1 - \xi_2).$
----	---	---	--

Tablica 2.3c. Przykłady zastosowań funkcji kształtu w charakterystykach czworobocznych elementów skończonych płaskich (w zagadnieniach dwuwymiarowych cd.)

	Schemat elementu skończonego	Postać funkcji kształtu	
		I rodzaju	II rodzaju
9.		$\begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} = \{u(x_1, x_2)\}[X]\{\alpha\} = [N]\{\bar{u}\}$ $[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}$ $\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8]^t$ $\{\alpha\} = [\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\} \Rightarrow \{(x_1, x_2)\} = [X][\bar{X}]^{-1}\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{1j}, u_{1k}, u_{1m}, u_{2i}, u_{2j}, u_{2k}, u_{2m}]^t$ $[\bar{X}] - \text{wg wzoru z poz. 2,3 i 7 tablic 2.3a i 2.3b}$	$\begin{Bmatrix} u_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} = [N]\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}, u_{1m}, u_{2m}]^t$ $[N] = \begin{bmatrix} [1]N_i, [1]N_j, [1]N_k, [1]N_m \\ [1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ $N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2),$ $N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2),$ $N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2),$ $N_m = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2).$

10.			$\begin{Bmatrix} u_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} = [N]\{\bar{u}\}$ $\{\bar{u}\} = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}, u_{1m}, u_{2m}]^t$ $[N] = [N'_i, N'_j, N'_k, N'_m, N'_n, N'_p, N'_r, N'_s]$ $[N'_l] = [1][N_l], [1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$ $(l = i, j, k, m, n, p, r, s)$ $N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1),$ $N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1),$ $N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1),$ $N_m = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1),$ $N_n = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2),$ $N_p = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2),$ $N_r = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2),$ $N_s = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_1),$
-----	---	--	---

Metoda elementów skończonych (MES)

Continuum materialne, oznaczenia i założenia

Koncepcja elementów skończonych pierwotnie wykorzystana została do rozwiązywania problemów fizycznych układów mechanicznych, których obszar materialny modelować można odkształcalnym ciałem stałym. Przedstawimy teraz ten pierwotny kierunek zastosowań, ogólną problematykę i algorytm metody przemieszczeń, podstawowej odmiany MES.

Podstawowym modelem nominalnym odkształcalnego jednorodnego ciała stałego jest continuum sprężyste. Stan fizyczny continuum w dowolnym punkcie opisuje stan odkształceń (jednostkowych przemieszczeń uogólnionych) i stan naprężeń (jednostkowych sił uogólnionych). Pod wpływem oddziaływań zewnętrznych (zewnętrznych sił skupionych, obciążeń powierzchniowych, sił masowych, czynników cieplnych, elektromagnetycznych itd.) continuum, obok ruchu właściwego ciałom sztywnym, doznaje zmiany objętości i zmiany postaci geometrycznej. Przyjmuje się przy tym, że istnieje tylko jeden naturalny stan continuum wyróżniający się brakiem odkształceń i naprężeń,

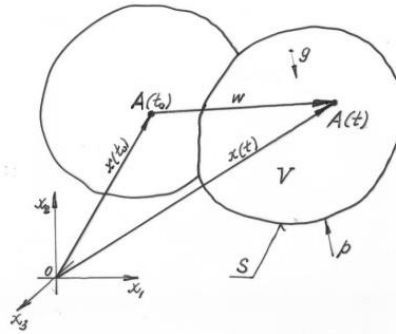
- przemieszczenia punktów continuum ze stanu naturalnego, wywołane czynnikami zewnętrznymi, są bardzo małe wobec każdego z jego wymiarów,
- zdeformowane działaniem czynników zewnętrznych continuum powraca do pierwotnej objętości i postaci geometrycznej po ustąpieniu (odciążeniu) działania takich sił,
- związki konstytutywne stanu odkształcenia i stanu naprężenia continuum są liniowe,
- oddziaływania zewnętrzne (siły czynne i bierne) są całkowicie niezależne od przemieszczeń sprężystych continuum,
- oddziaływania zewnętrzne w każdym określonym układzie ich wartości jednoczesnych czynią zadość warunkom równowagi,
- przemieszczenia i odkształcenia punktów continuum podlegają prawu superpozycji, tzn. skutki działania różnych oddziaływań zewnętrznych są równe sumie skutków każdego z osobna, niezależnie od kolejności występowania.

Oznacza to, że w obszarze continuum obowiązują twierdzenia Clapeyrona i Castigliano, zasada wzajemności prac Bettiego i zasada prac przygotowanych.

Oznaczmy przez M masę continuum; przez $p(x)$ jednostkowe obciążenie zewnętrzne powierzchni S continuum ($x \in S$), przez $g(x)$ jednostkowe objętościowe obciążenie wewnętrzne obszaru V continuum ($x \in V$). Wskazane obciążenia są skutkami wyodrębnienia continuum z jego otoczenia. Działanie tych obciążeń wywołują zmiany położenia materialnych punktów continuum (np. punktu A o współrzędnych $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$ należących do V – por. Rys. 3.1).

Przyjmijmy dalej, że:

- gęstość continuum w podobszarze continuum w obszarze ΔV zdążającym do zera to $\rho = \lim \Delta M / \Delta V = dM / dV$;
- przemieszczenie (np. p. A) $w_i = x_i(t) - x_i(t_0)$, gdzie t jest czasem;
- przemieszczenie jednostkowe $\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(w_{j,k} + w_{k,j})$, $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$ $j, k = 1, 2, 3$;
- jednoskowe siły wewnętrzne na wybranym fragmencie pola o powierzchni $\Delta S'$, zdążającej do zera $\sigma = \lim \Delta P' / \Delta S' = dP' / dS'$ (P' jest całkowitą siłą wewnętrzną obciążającą ten wybrany element pola powierzchni wewnętrznej), przy czym wewnątrz obszaru $\sigma(x) = \sigma_{ij}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$; a na jego powierzchni $\sigma(x) = \sigma_{ij}n_j = p$ (n – jest kierunkiem prostopadłej do zewnętrznej powierzchni S w rozpatrywanym punkcie x).



Rys. 3.1. Interpretacja przemieszczenia punktu materialnego A po odkształceniu continuum materialnego

W związku z takimi oznaczeniami założymy ponadto, że zachowane są prawa ciągłości materii (masy), warunek nierozdzielności i prawo zachowania momentu pędu, nie ma zewnętrznych źródeł energii, stan początkowy układu jest stanem naturalnym ($\varepsilon_0 = \sigma_0 = 0$), zmiany stanu są małe i izotermiczne, oraz że continuum ma stałą gęstość $\rho = \text{const}$.

W przestrzeni trójwymiarowej ($0 \ x_1 \ x_2 \ x_3$) możemy przy tych założeniach zapisać:

- małe, zależne od czasu przemieszczenia dowolnego punktu materialnego

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = [w_1, w_2, w_3]^t \quad (3.1)$$

gdzie w_i są kierunkowymi ($i = 1, 2, 3$) składowymi przemieszczenia w , małe t jest symbolem transformacji macierzy, w tym przypadku nakazującym odwrócenie zapisanego wektora–wiersza w wektor–kolumnę;

- zależne od czasu odkształcenia (liniowe ε i postaciowe γ) w tym punkcie

$$\varepsilon(x_1, w_2, x_3, t) = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]^t \quad (3.2)$$

$$\text{naprężenia} \quad \sigma(x_1, w_2, x_3, t) = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}]^t \quad (3.3)$$

- związki wzajemne (kinematyczne) odkształceń i przemieszczeń

$$\{\varepsilon\} = [D]\{w\}, \quad (3.4)$$

$$\text{gdzie} \quad [D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

- związki wzajemne (konstrytutywne) naprężeń i odkształceń

$$\{\sigma\} = [k_\sigma]\{\varepsilon\}, (\text{lub } \{\varepsilon\} = [k_\varepsilon]\{\sigma\}), \quad (3.6)$$

przy czym dla materiału izotropowego o module sprężystości liniowej E i liczbie Poissona ν

$$[k_\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left\{ [1]_{6 \times 6} + \frac{\nu}{1-2\nu} \begin{bmatrix} [1]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \right\} \quad (3.7a)$$

$$[k_\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} \left\{ [1]_{6 \times 6} - \frac{\nu}{1+\nu} \begin{bmatrix} [1]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \right\} \quad (3.7b)$$

W zagadnieniach osiowosymetrycznych izotropowego continuum sprężystego, tj. w przypadku gdy $\{w\} = [w_1, w_3]^t$, $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{13}]^t$, $\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{13}]^t$, mamy

$$[D]^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

$$[k_\sigma] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.7c)$$

- w zagadnieniach płaskich izotropowego continuum sprężystego, w przypadku płaskiego stanu naprężeń, tj. gdy $\{w\} = [w_1, w_2]^t$, $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^t$, $\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}]^t$, mamy

$$[D]^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

$$[k_\sigma] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7d)$$

- w zagadnieniach płaskich izotropowego continuum sprężystego, w przypadku płaskiego stanu odkształceń, tj. gdy $\{w\} = [w_1, w_2]^t$, $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^t$, $\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}]^t$, $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ obowiązują wzory (3.5b) i (3.7b), z tym że we wzorze (3.7b) zamiast E wpisać należy $E[1 - \nu^2/(1 + \nu)^2]$, a zamiast ν wpisać należy $\nu/1 + \nu$;
- w zagadnieniach jednowymiarowych, tj. w przypadku, gdy $\{w\} = w_1$, $\{\varepsilon\} = \varepsilon_{11}$, $\{\sigma\} = \sigma_{11}$, mamy natomiast odpowiedniki (3.5) i (3.7) zredukowane do $[D] = d/dx_1$ i $[k_\sigma] = E$.

W *ogólnym* natomiast przypadku anizotropowego materiału continuum macierze $[k_\sigma]$ i $[k_\varepsilon]$ wymiaru 6×6 , zależne są od współrzędnych rozpatrywanego punktu; nie mają zerowych elementów; są symetryczne względem przekątnej, co oznacza, że z 36-ciu elementów niezależnych jest 21. Można to zanotować w następujący sposób: $[k_\sigma] = [k_\sigma]^t$, $[k_\varepsilon] = [k_\varepsilon]^t$, $[k_\sigma] = [k_\varepsilon]^{-1}$.

Te 21 niezależnych współczynników (elementów macierzy $[k_\varepsilon]$) trzeba wyznaczać doświadczalnie w każdym konkretnym przypadku materiału. Dopiero w przypadku potrójnej symetrii (względem płaszczyzn układu współrzędnych) właściwości materiałowych, tj. w przypadku ortotropii można łatwiej te własności utożsamiać z modułami sprężystości podłużnej i postaciowej E i G oraz liczbą Poissona ν . Mamy w tym przypadku ($[k_\sigma] = [k_\varepsilon]^{-1}$):

$$[k_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Macierz ta upraszcza się w przypadku anizotropowości osiowosymetrycznej:

$$[k_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

lub w przypadku ortotropii płaskiej:

$$[k_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} & \frac{\nu E_2}{1-\nu_1^2} & 0 \\ \frac{\nu E_2}{1-\nu_1^2} & \frac{E_1}{1-\nu_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

Przypomnijmy na koniec, że energię odkształcenia sprężystego rozważanego continuum określa całka:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv \quad (3.9)$$

Wariacyjna koncepcja MES

Była już mowa o rezydualnej koncepcji tej metody, wspomniana także była (np. w Przykładzie 2.5) koncepcja wariacyjna. Teraz zatrzymamy się na tej drugiej i zagadnieniu continuum sprężystego.

Zasada wariacyjna formułuje w tym zagadnieniu następujący, obowiązujący w obszarach materialnych (tj. także w continuum) funkcjonal:

$$\chi = \int_V f\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \dots\right) dv + \int_S \varphi\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \dots\right) \quad (3.10)$$

gdzie $x(x_1, x_2, x_3)$ jest współrzędną trójwymiarowej przestrzeni (ortokartezjańskiej), V jest ograniczonym powierzchnią S pewnym ciągłym obszarem ważności funkcjonału χ . Wewnątrz tego obszaru i na części jego brzegu istnieje nieznana funkcja $\psi(x)$ i jej pochodne względem x , istnieje także, ważne w tym obszarze, wyżej zdefiniowane wyrażenie całkowe χ . Wyrażenie to jest funkcjonałem zależnym od nieznanymi funkcji f i φ . Funkcje te wyrazić zaś można kombinacjami:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} k_{ij} \psi_i \psi_j + \frac{1}{2} l_{ij} \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \frac{\partial\psi_j}{\partial x} + \frac{1}{2} m_{ij} \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \{\psi\}^t [k] \{\psi\} + \frac{1}{2} \frac{\partial\{\psi\}^t}{\partial x} [l] \frac{\partial\{\psi\}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\{\psi\}^t}{\partial x^2} [m] \frac{\partial^2\{\psi\}}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\varphi = -\sum_j (p_i \psi_i + r_i \frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \dots) = -\{\psi\}^t \{p\} - \frac{\partial\{\psi\}^t}{\partial x} \{r\} + \dots, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

w których k, l, m, p, r są współczynnikami kombinacji $i, j = 1, 2, \dots$; $\psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ uogólnioną współrzędną n – wymiarowej przestrzeni zmiennych stanu ważności funkcjonału; symbolika zapisu macierzowego wynika z założeń algebry macierzy.

Po wprowadzeniu funkcji kształtu $N(x)$ przybliżającej rzeczywistą zmienną stanu obiektu ψ jej wybranymi wartościami $\bar{\psi}$:

$$\{\psi\} \approx [N] \{\bar{\psi}\}, \quad \frac{\partial\{\psi\}}{\partial x} = \frac{\partial[N]}{\partial x} \{\bar{\psi}\}, \quad \frac{\partial^2\{\psi\}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} \{\bar{\psi}\} \quad (3.12)$$

funkcjonał przyjmuje postać

$$\chi = \frac{1}{2} \{\bar{\psi}\}^t [K] \{\bar{\psi}\} - \{\bar{\psi}\}^t \{P\} \quad (3.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V \left([N]^t [k] [N] + \frac{\partial[N]^t}{\partial x} [l] \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial^2[N]^t}{\partial x^2} [m] \frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} + \dots \right) dv, \\ \{P\} &= \int_S \left([N]^t \{p\} + \frac{\partial[N]^t}{\partial x} \{r\} + \dots \right) ds. \end{aligned}$$

Jeśli funkcjonał ten jest funkcją ciągłą i różniczkowalną w danym obszarze V , to warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jego ekstremum lokalnego są wymagania, aby:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial \{\bar{\psi}\}} &= \left[\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\psi}_1}, \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\psi}_2}, \dots \right]^t = [K]\{\bar{\psi}\} - \{P\} = \{0\}, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \{\bar{\psi}\}^2} &= [K] > [0], \text{ lub } \frac{\partial^2 \chi}{\partial \{\bar{\psi}\}^2} = [K] < [0]\end{aligned}\quad (3.14)$$

Dodatnia określoność macierzy $[K]$ jest warunkiem istnienia minimum lokalnego funkcjonału, podobnie ujemna określoność macierzy $[K]$ oznacza istnienie maksimum funkcjonału. Łatwo zauważyć, że warunki ekstremum funkcjonału są identyczne ze znanymi warunkami istnienia ekstremum elementarnych funkcji (zerowanie się pierwszej pochodnej funkcji, dodatnia lub ujemna wartość drugiej pochodnej). Tutaj odnoszą się do przedstawionych funkcji macierzowych i dodatnia lub ujemna określoność macierzy $[K]$ jest macierzowym odpowiednikiem dodatniej lub ujemnej wartości drugiej pochodnej elementarnej funkcji. Podobnie pierwszy z warunków (3.14) jest macierzowym odpowiednikiem pierwszej pochodnej elementarnej funkcji. Trójwymiarowa przestrzeń x jest natomiast przestrzenią definiowania objętości i ograniczających powierzchni rzeczywistych obiektów technicznych.

Ta sama koncepcja odnosi się do zastąpionego w swej przestrzeni m małymi, ale o skończonych miarach w przestrzeni x podobszarami, czyli *elementami skończonymi*, w każdym z których zachowuje ważność wyżej opisany funkcjonal i charakterystyczny indywidualnymi dla każdego podobszaru funkcjami kształtu N :

$$\{\bar{\psi}\} = [\{\bar{\psi}_1\}, \{\bar{\psi}_2\}, \dots, \{\bar{\psi}_m\}]^2, \quad [N] = [[N_1], [N_2], \dots, [N_m]] \quad (3.15)$$

Obowiązuje przy tym następująca zasada superpozycji:

$$\chi = \sum_m \chi^e, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \{\bar{\psi}\}} = \sum_m \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\psi}_e\}}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \{\bar{\psi}\}^2} = \sum_m \frac{\partial^2 \chi^e}{\partial \{\bar{\psi}_e\}^2} \quad (3.16)$$

gdzie χ^e jest indywidualnym funkcjonalem e -tego elementu skończonego, $\bar{\psi}_e$ zaś związanym z tym elementem podwektorem wielkości węzłowych $\bar{\psi}$.

Raz jeszcze podkreślić trzeba, że warunki (3.14) obowiązują zarówno w przypadku funkcjonałów χ^e , jak i funkcjonału χ . Zbiór rozwiązań względem $\bar{\psi}$ równań z pierwszego warunku (3.14), przy jednoczesnym spełnieniu drugiego z warunków, określa zbiór odpowiednio lokalnych minimów bądź lokalnych maksimów funkcjonału. Globalne minimum funkcjonału wyznacza takie rozwiązanie, dla którego wartość χ jest najmniejsza. Podobnie rozwiązanie, dla którego wartość funkcjonału jest największa, wyznacza globalne maksimum. W szczególnych przypadkach, gdy χ jest funkcją ściśle wypukłą lub ściśle wklęsłą, układ równań – pierwszy z warunków (3.13) – ma tylko jedno rozwiązanie i wówczas ekstremum lokalne jest również ekstremum globalnym funk-

cjonału. Występuje to m.in. wtedy, gdy funkcjonał jest formy kwadratowej, co osiąga się – tak jak wyżej pokazano – w przypadku odpowiedniej aproksymacji rzeczywistych zmiennych stanu zmiennymi wybranymi z użyciem funkcji kształtu. Funkcje kształtu dla elementów skończonych – dodajmy w tym miejscu – dobrane powinny być tak, aby:

- występujące w funkcjonałach χ funkcje f i φ pozostawały jednoznaczne i ciągłe, jeśli wymiary elementu dążą do zera,
- funkcjonał i jego pochodne o rząd niższy od występujących w funkcjach f i φ były ciągłe na powierzchniach brzegowych elementów.

Nietrudno zauważyć, że matematyczne zasady ekstremalizacji funkcjonału χ prowadzą do spełnienia warunków stanu równowagi fizycznej rzeczywistych obiektów. Jeśli zatem funkcjonał χ wyraża bilans energetyczny rozważanego układu mechanicznego, to układy równań pierwszego warunku (3.14) są równaniami stanu równowagi modelowanego elementami skończonymi continuum materialnego (sprężystego) oraz podobnych układów mechanicznych (sprężystych). Zagadnienie ekstremalizacji sprowadza się tym samym do poszukiwania minimum funkcjonału, czego warunkiem jest spełnienie drugiego żądania z (3.14).

Te same rezultaty otrzymamy stosując twierdzenia wariacyjne wymagające spełnienia podobnych warunków. I tak żądamy, by według:

- ekstremalnej zasady wariacyjnej (zasady minimum energii)

$$\delta\chi = 0 \text{ i } \delta^2\chi > 0 \quad (3.17)$$

gdzie χ jest funkcjonałem opisującym całkowitą energię potencjalną układu fizycznego;

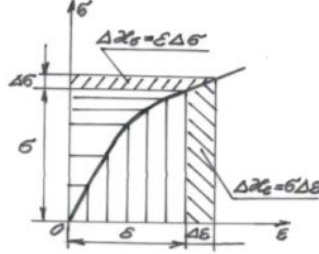
- twierdzenia Clapeyrona

$$\frac{\partial\chi_e}{\partial\varepsilon} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2\chi_e}{\partial\varepsilon^2} > 0 \quad (3.18)$$

gdy χ_e oznacza całkowitą energię potencjalną odkształcenia; albo

$$\frac{\partial\chi_\sigma}{\partial\sigma} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2\chi_\sigma}{\partial\sigma^2} > 0 \quad (3.19)$$

gdy χ_σ całkowitą energię uzupełniającą odkształcenia (Rys. 3.2.);



Rys. 3.2. Interpretacja pojęć całkowitej energii potencjalnej odkształcenia χ_ϵ i energii uzupełniającej odkształcenia χ_σ

- zasady prac przygotowanych (bilans prac)

$$\delta W_U = \delta W_B + \delta W_R + \delta W_Z \quad (3.20)$$

gdzie W_U jest pracą przygotowaną sił wewnętrznych układu, W_Z jest pracą przygotowaną sił zewnętrznych, W_R pracą przygotowaną sił rozproszenia energii, a W_B zaś pracą przygotowaną sił bezwładności;

- bilansu sił Lagrange'a

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial u_i}\right)}{dt} + \frac{\partial R}{\partial\left(\frac{du_i}{dt}\right)} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial u_i} = P_i + \sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial u_i} \quad (3.21)$$

gdzie t – oznacza czas, u_i – jest przemieszczenie uogólnione, P – uogólnioną siłą, T – energią kinetyczną układu, R – energią rozproszoną układu, $\bar{U}$ – energią potencjalną układu, f – równanie więzów układu, a λ – mnożniki Lagrange'a.

Budowa charakterystyk elementów skończonych i układów nimi modelowanych metodą przemieszczeń MES. Zagadnienia mechaniczne

Po dyskretyzacji continuum elementami skończonymi, w dowolnym punkcie obszaru dowolnego elementu zależne od przemieszczeń węzłowych u przemieszczenia w , odkształcenia ϵ i naprężenia σ wyrażają – jak to już było przedstawione w przykładzie 2.7 – odpowiednio następujące związki przybliżone:

$$\{w(x_1, x_2, x_3, t)\} = [N(x_1, x_2, x_3)]\{u(t)\} = [N]\{u\},$$

$$\{\varepsilon\} = [D]\{w\} = [D][N]\{u\} = [B]\{u\}, \quad (3.22)$$

$$\{\sigma\} = [k_\sigma]\{\varepsilon\} = [k_\sigma][D][N]\{u\} = [k_\sigma][B]\{u\}$$

Przyjmijmy, że potrzebna do skonkretyzowania związków (3.22) funkcja kształtu $N(x_1, x_2, x_3)$, została wybrana w myśl wymagań przedstawionych w rozdziale poświęconym funkcjom kształtu. Wyrażenie te są właściwe metodzie przemieszczeń MES, co trzeba w tym miejscu podkreślić, gdyż istnieje także mało eksploatowana, wyrażająca te same wielkości w naprężeniach metoda naprężeń MES. O tej odmianie MES, z założenia bez rozwijania szczegółów, będzie mowa dalej. Metodą przemieszczeń i na podstawie wybranych twierdzeń wariacyjnych wyprowadźmy teraz równania równowagi elementów skończonych i modelowanych nimi obiektów technicznych. Rezultat tych wyprowadzeń, tj. równania ruchu, równania stanu i równania równowagi statycznej, metoda nazywa charakterystyką elementu (układu).

Ekstremalna zasada wariacyjna

Stan obiektu niech opisuje funkcjonal $\chi_u(\{u\})$. Stan obiektu (odkształcalnego ciała stałego, w tym continuum sprężystego) po dowolnie małej zmianie $\delta\{u\}$ opisze więc funkcjonal $\chi'_u(\{u\} + \delta\{u\})$. Po rozpisaniu tego funkcjonału w szereg Taylora otrzymamy:

$$\chi'_u(\{u\} + \delta\{u\}) = \chi_u(\{u\}) + \frac{\partial \chi_u(\{u\})}{\partial \{u\}} \delta\{u\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_u(\{u\})}{\partial^2 \{u\}} \delta^2\{u\} + \dots \quad (3.23)$$

Przyrost energii na tej podstawie można wyrazić jak następuje:

$$\begin{aligned} \Delta \chi_u &= \chi'_u(\{u\} + \delta\{u\}) - \chi_u(\{u\}) = \frac{\partial \chi_u(\{u\})}{\partial \{u\}} \delta\{u\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_u(\{u\})}{\partial^2 \{u\}} \delta^2\{u\} + \dots = \\ &= \delta \chi_u(\{u\}) + \frac{1}{2} \delta^2 \chi_u(\{u\}) + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Stąd warunki (3.17), przy dowolnych wariacjach $\delta\{u\}$ i $\delta^2\{u\}$, zapiszemy w równoważnej postaci:

$$\delta \chi(\{u\}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \chi_u(\{u\})}{\partial \{u\}} = 0 \quad (3.25a)$$

$$\Delta \chi_u > 0 \Leftrightarrow \delta^2 \chi_u(\{u\}) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \chi_u(\{u\})}{\partial^2 \{u\}} > 0 \quad (3.25b)$$

Dla rozważanego elementu skończonego (zastąpionego elementami skończonymi obiektu) funkcjonal $\chi_u(\{u\})$ wyraża następujący bilans prac wykonanych przez siły odkształcające ten element skończony (obiekt):

$$\chi_u = \underbrace{\int_V \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv}_{\text{praca sił wewn.}} - \underbrace{\int_S \{w\}^t \{p\} ds}_{\text{praca sił zewn.}} - \underbrace{\int_V \{w\}^t \{g\} dv}_{\text{praca sił grawitacyjnych}} \quad (3.26)$$

gdzie $\{g\} = \{g_0\} - \mu\{\dot{w}\} - \rho\{\ddot{w}\}$, przy czym g_0 reprezentuje siły grawitacyjne (objętościowe), μ jest współczynnikiem rozproszenia energii (określany w jednostce objętości), ρ zaś masą właściwą (gęstością). Po wprowadzeniu do (3.26) związków (3.22) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \chi_u &= \{u\}^t \left(\int_V ([N]^t [D]) [k_\sigma] ([D]^t [N]) dv \right) \{u\} + \{u\}^t \left(\int_V [N]^t \rho [N] dv \right) \{\ddot{u}\} + \\ &\quad \{u\}^t \left(\int_V [N]^t \mu [N] dv \right) \{\dot{u}\} - \{u\}^t \left(\int_V [N]^t \{g_0\} dv \right) - \{u\}^t \left(\int_S [N]^t \{p\} ds \right) \\ &= \{u\}^t ([M]\{\ddot{u}\} + [F]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} - \{P\}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

gdzie $[K] = \int_V ([D]^t [N])^t [k_\sigma] ([D]^t [N]) dv = \int_V [B]^t [k_\sigma] [B] dv$ jest sztywnością elementu skończonego (układu), $[M] = \int_V [N]^t \rho [N] dv$ masą elementu (układu), $[F] = \int_V [N]^t \mu [N] dv$ tłumieniem wewnętrznym elementu (układu), $\{P\} = \int_V [N]^t \{g_0\} dv + \int_S [N]^t \{p\} ds$ wyraża zaś skupione w węzłach elementu (układu) siły ciężkości i oddziaływań powierzchniowych.

Po zastosowaniu warunków (3.25) z bilansu (3.27) otrzymujemy docelowe równanie ruchu elementu skończonego (układu):

$$\frac{\partial \chi_u}{\partial \{u\}} = 0 \Leftrightarrow [M]\{\ddot{u}\} + [F]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (3.28)$$

przy czym jednoznaczność rozwiązania tego równania wymaga jego dodatniej określoności, czyli spełnienia drugiego z warunków (3.25):

$$\frac{\partial^2 \chi_u}{\partial^2 \{u\}} > 0 \Rightarrow [M] > 0; [F] > 0; [K] > 0$$

Zasada prac przygotowanych

Składniki równania (3.20) można, po wprowadzeniu (3.22), przedstawić następującymi wyrażeniami:

$$\begin{aligned} \delta W_U &= \int_V \delta \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv = \int_V \delta ([D]^t \{w\}) [k_\sigma] ([D]^t \{w\}) dv = \\ &= \delta \{u\}^t \left(\int_V ([D]^t [N])^t [k_\sigma] ([D]^t [N]) dv \right) \{u\} = \delta \{u\}^t [K] \{u\}, \\ \delta W_B &= - \int_V \delta \{w\}^t \rho \{\ddot{w}\} dv = - \delta \{u\}^t \left(\int_V [N]^t \rho [N] dv \right) \{\ddot{u}\} = \delta \{u\}^t [M] \{\ddot{u}\}, \end{aligned}$$

$$\delta W_R = \int_V \delta\{w\}^t \mu \{\dot{w}\} dv = -\delta\{u\}^t \left(\int_V [N]^t \mu [N] dv \right) \{\dot{u}\} = -\delta\{u\}^t [F] \{\dot{u}\} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \delta W_Z &= \int_V \delta\{w\}^t \{g_0\} dv + \int_S \delta\{w\}^t \{p\} ds = \\ &= \delta\{w\}^t \left(\int_V [N]^t \{g_0\} dv + \int_S [N]^t \{p\} ds \right) = \delta\{w\}^t \{P\} \end{aligned}$$

Po zbilansowaniu ostatecznie mamy:

$$\delta\{u\}^t ([M]\{\ddot{u}\} + [F]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} - \{P\}) = 0 \quad (3.30)$$

zaś dla dowolnego $\delta\{u\}^t$ oznacza to, że:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [F]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} - \{P\} = \{0\} \quad (3.28b)$$

Bilans Lagrange'a

Podobnie jak poprzednio składniki równania (3.21) można, po wprowadzeniu (3.22), przedstawić następującymi wyrażeniami:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{w}\}^t \rho \{\dot{w}\} dv = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t \left(\int_V [N]^t \rho [N] dv \right) \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [M] \{\dot{u}\} \quad (3.31a)$$

$$R = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{w}\}^t \mu \{\dot{w}\} dv = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t \left(\int_V [N]^t \mu [N] dv \right) \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [F] \{\dot{u}\} \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv = \frac{1}{2} \int_V ([D]^t \{w\})^t [k_\sigma] ([D]^t \{w\}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \{u\}^t \left(\int_V ([D]^t [N])^t [k_\sigma] ([D]^t [N]) dv \right) \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^t [K] \{u\} \end{aligned} \quad (3.31c)$$

Mamy też, że

$$\frac{\partial T}{\partial \{\dot{u}\}} = [M] \{\dot{u}\}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{u}\}} \right) = [M] \{\ddot{u}\}, \quad \frac{\partial R}{\partial \{\dot{u}\}} = [F] \{\dot{u}\}, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{u\}} = [K] \{u\}$$

ponieważ
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{u}\}} \right) + \frac{\partial R}{\partial \{\dot{u}\}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{u\}} = \{P\},$$

to
$$[M] \{\ddot{u}\} + [F] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{P\} \quad (3.28c)$$

Warto zauważyć przy tym, że:

$$\delta W_B = \delta\{u\}^t [M] \{\ddot{u}\} = \delta\{u\}^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{u}\}} \right),$$

$$\delta W_R = \delta\{u\}^t [F] \{\dot{u}\} = \delta\{u\}^t \frac{\partial R}{\partial \{\dot{u}\}}, \quad (3.32)$$

$$\delta W_Z = \delta\{u\}^t [K] \{u\} = \delta\{u\}^t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{u\}}$$

Charakterystyka układu modelowego „m” elementami skończonymi

Jeśli utworzymy wspólny zbiór niewiadomych przemieszczeń dla układu, złożony z m przypisanych składowym elementom skończonym wektorów przemieszczeń, czyli zbiór o postaci:

$$\{u\} = [\{u\}^1, \{u\}^2, \{u\}^k \dots \{u\}^m]^T \quad (3.33)$$

a następnie zbiory kształtujących związki (3.22) funkcji kształtu N i jej pochodnych B , czyli zbiory o właściwości:

$$[N_k] = \begin{cases} [N]^k & \text{dla } k - \text{tego elementu} \\ [0] & \text{dla elementów innych} \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$[B_k] = \begin{cases} [B]^k & \text{dla } k - \text{tego elementu} \\ [0] & \text{dla elementów innych} \end{cases} \quad (3.34b)$$

to wówczas macierze równania ruchu (3.28) można wyrazić jak następuje:

$$[M] = \sum_{j=1}^m [M_{rs}^j] \quad (3.35)$$

gdzie $[M_{rs}^j] = (\int_V [N_r]^t \rho [N_s] dv)_j \quad (r, s, j = 1, 2, \dots, k, \dots, m),$

$$[F] = \sum_{j=1}^m [F_{rs}^j] \quad (3.36)$$

gdzie $[F_{rs}^j] = (\int_V [N_r]^t \mu [N_s] dv)_j,$

$$[K] = \sum_{j=1}^m [K_{rs}^j] \quad (3.37)$$

gdzie $[K_{rs}^j] = (\int_V [B_r]^t [k_\sigma] [B_s] dv)_j,$

$$\{P\} = \sum_{j=1}^m \{P^j\} \quad (3.38)$$

Skonkretyzowanie ogólnej charakterystyki (równania ruchu) napotyka na problem ustalenia współczynników μ „wiskotycznego”, wewnętrznego tłumienia materiału elementu skończonego (układu). Dla rzeczywistych układów trzeba by je ustalić doświadczalnie. Zagadnienie to mieści się w zakresie zaawan-

sowanej wiedzy i praktyki, i nie będzie dalej podnoszone. Wobec tego uprościmy dalsze rozważania pomijając (czyli przyjmując, że $\mu = 0$) wpływ tłumienia wewnętrznego. Wtedy równanie (3.28) zamieni się w równanie

$$[M] \frac{d^2\{u\}}{dt^2} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (3.39)$$

opisujące *drgania wymuszone* elementu skończonego (układu). W przypadku gdy dodatkowo wektor sił $\{P\} = \{0\}$, to równanie (3.39) staje się równaniem *drgań własnych* elementu (układu). Przyjmując do wiadomości możliwość wystąpienia w rzeczywistych układach mas skupionych i zakładając to skupienie w węzłach równanie drgań można wyrazić następująco:

$$([M_0] + [M_q]) \frac{d^2\{u\}}{dt^2} + [K]\{u\} = 0 \quad (3.40)$$

gdzie macierz mas skupionych w węzłach $[M_0]$ jest macierzą przekątną o składnikach

$$(m_{rs})_0 = M_r, \text{ gdy } r = s; (m_{rs})_0 = 0, \text{ gdy } r \neq s$$

natomiast macierz mas rozłożonych $[M_q]$ definiuje wzór (3.35)

$$(m_{rs})_e = \int_V [N_r]^t \rho [N_s] dv$$

Przyjmując następnie harmoniczną postać drgań np. $\{u\} = \{u^*\} \sin \omega t$, równanie (3.40) można zapisać

$$([K] - \omega^2 [M])\{u^*\} = \{0\} \quad (3.41)$$

Przy dowolnym $\{u^*\}$ częstotliwości drgań własnych $\omega_n (n = 1, 2, \dots)$ określi równanie charakterystyczne:

$$\det|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (3.42)$$

W przypadku, niezależności przemieszczeń $\{u\}$ od czasu równania (3.28) i (3.39) stają się równaniami statycznej równowagi elementu (układu):

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (3.43)$$

Jeszcze inne ujęcie charakterystyki przyniesie *zagadnienie stateczności*, związane z obojętnym (krytycznym) stanem równowagi elementu skończonego (układu).

Jeśli bardzo małe odchylenie stanu równowagi obiektu fizycznego wywoła dodatnią zmianę jego energii potencjalnej, to oznacza to, że takie odchylenie

wymagało dostarczenia energii, a obiekt znajduje się w stanie równowagi trwałej. Jeśli, natomiast, przy takim samym odchyleniu stanu równowagi następuje ujemna zmiana energii potencjalnej, to jest to oddawanie przez obiekt energii, jego przejście w położenie różne od pierwotnego oraz stan równowagi nietrwałej. Zerowa, z kolei, zmiana energii potencjalnej wskazuje, że obiekt może pozostać w pierwotnym położeniu lub przejść w inne położenie nie pobierając ani wydzielając energii potencjalnej i że jest to stan obojętnej równowagi.

Zmianę energii potencjalnej fizycznego obiektu (por. sformułowania (3.9), (3.11), (3.23), (3.26), (3.27), (3.31)) możemy zapisać następująco:

$$\Delta\chi = \left[\frac{\partial\chi}{\partial\{u_i\}} \right] d\{u_i\} + \frac{1}{2} d\{u_i\}^t \left[\frac{\partial^2\chi}{\partial\{u_i\}\partial\{u_k\}} \right] d\{u_i\} + \dots (i, k = 1, 2, \dots) \quad (3.44)$$

Koniecznym warunkiem równowagi jest, jak wiadomo, by

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial\{u_i\}} \right] d\{u_i\} = \{0\},$$

ale jeśli przy tym dodatkowo ma miejsce to, że

$$\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial\{u_i\}\partial\{u_k\}} \right] = [0] \quad (3.45)$$

to tak opisany obiekt znajduje się wtedy w stanie równowagi krytycznej (obojętnej), obciążenia krytyczne λ określa zaś warunek:

$$\det \left[\frac{\partial^2\chi(\lambda)}{\partial\{u_i\}\partial\{u_k\}} \right] = 0 \quad (3.46)$$

Zbudowane na przedstawionych podstawach charakterystyki statyczne (i wybrane dynamiczne) elementów skończonych pierwszego rodzaju zebrane zostały w Załączniku. Czytelnik znajdzie więc tam elementy skończone: linio-
we (przeznaczone do modelowania rozciąganych i ściskanych, skręcanych, zginanych, zginanych i ściskanych prętów pryzmatycznych), trójkątne i prostokątne powierzchniowe (przeznaczone do modelowania tarcz, płyt i powłok), osiowosymetryczne (przeznaczone do modelowania grubościennych rur, osiowosymetrycznych tarcz i powłok) oraz czworościenne (do modelowania obiektów przestrzennych).

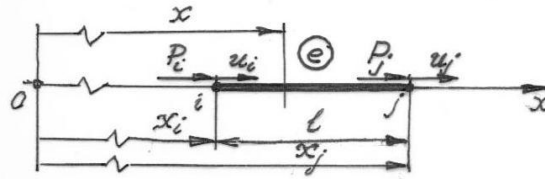
Przebieg powstawania zamieszczonych w Załączniku charakterystyk przedstawimy najbliższy przykład. Będzie o tym też mowa jeszcze w innych przykładach, zamieszczonych w dalszej treści opracowania.

Przykład 3.1. Budowa charakterystyki liniowego rozciąganego i ściskanego elementu skończonego

Charakterystykę zbudujemy dla dwuwęzłowego elementu skończonego, którego usytuowanie przestrzenne przedstawiono na rysunku 3.3. Zakłada się przy tym, że ewentualne siły ściskające nie osiągają stanu krytycznego. Przyjęte też zostały następujące oznaczenia: e – numer elementu, $k = i, j$ – numery węzłów; u_k – przemieszczenia węzłów k ; P_k – siły określone w węzłach k . Zадane są: $l = x_j - x_i$ – długość elementu; A – jego stały na długości przekrój poprzeczny; E – stały na długości moduł sprężystości podłużnej jego materiału; ρ – gęstość tego materiału.

Kroki postępowania na drodze do pełnego opisu charakterystyki są następujące (por. tablica Z.1 w Załączniku).

Krok 1. Ustalenie postaci funkcji kształtu $N(x)$



Rys. 3.3. Założenia modelowe liniowego elementu skończonego w układzie lokalnym (0x)

Ten krok rozpoczyna założenie, że będzie to funkcja liniowa. Oznacza ono, że przemieszczenie punktów, leżących na długości elementu ($x_i \leq x \leq x_j$) (Rys. 3.3) można przedstawić wielomianem pierwszego stopnia Lagrange'a lub wprost, że $w(x) = a_1 + a_2x$, przy czym w węzłach i, j ma osiągać wartości węzłowe $w(x_i) = u_i$ i $w(x_j) = u_j$. Ten ostatni warunek (por. równania (2.23) i (2.24)) prowadzi do dwu równań:

$$a_1 + a_2x_i = u_i, a_1 + a_2x_j = u_j,$$

z których po rozwiązaniu względem a_1 i a_2 otrzymamy wartości tych współczynników:

$$a_1 = \frac{(u_ix_j - u_jx_i)}{(x_j - x_i)}, a_2 = \frac{(u_j - u_i)}{(x_j - x_i)}$$

oraz konkretną postać wyrażenia opisującego przemieszczenia rozpatrywanego elementu:

$$w(x) = \frac{(x_j - x)u_i}{(x_j - x_i)} + \frac{(x - x_i)u_j}{(x_j - x_i)}.$$

Ponieważ $w(x) = [N(x)]\{u^e\}$, przy czym $(x_j - x_i) = l$, a $\{u^e\} = [u_i, u_j]^t$ to mamy:

$$[N(x)] = [N_i(x), N_j(x)] = \frac{1}{l} [x_j - x, x - x_i].$$

Krok 2. Określenie macierzy odkształceń $[B(x)]$

Macierz odkształceń definiuje operator związku kinematycznego, występujący w zależności odkształcenia–przemieszczenia, a mianowicie mamy, że $[B(x)] = [D][N(x)]$. W przypadku rozpatrywanego elementu skończonego $[D] = d/dx$. Stąd:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{-1}{l}, \frac{dN_j}{dx} = \frac{1}{l}, \text{ oraz } [B] = [B_i, B_j] = \frac{1}{l} [-1, 1].$$

Krok 3. Określenie macierzy naprężeń $[S] = [k_\sigma][B]$

W przypadku rozpatrywanego elementu zależność naprężenia–odkształcenia, czyli prawo Hooke’a brzmi $[k_\sigma] = E$. Wobec tego

$$[S] = [S_i, S_j] = \frac{E}{l} [-1, 1].$$

Krok 4. Określenie macierzy sztywności $[K]$

Dokonujemy tego na podstawie sformułowania (3.37), a stąd mamy:

$$[K] = \int_0^l [B]^t [k_\sigma] [B] A dx = [B]^t [k_\sigma] [B] A \int_0^l dx = \frac{EA}{l} ([-1, 1]^t [-1, 1]),$$

lub jej cztery elementy $K_{rs} = \int_0^l [B_r]^t [k_\sigma] [B_s] A dx$ ($r, s = i, j$):

$$K_{ii} = K_{jj} = EA \left(\frac{-1}{l}\right) \left(\frac{-1}{l}\right) \int_0^l dx = \frac{EA}{l}, K_{ij} = K_{ji} = EA \left(\frac{-1}{l}\right) \left(\frac{1}{l}\right) \int_0^l dx = \frac{-EA}{l}.$$

Krok 5. Określenie macierzy masy $[M]$

Tę macierz definiuje, z kolei, wzór (3.35), z którego przy założeniu $[M_0] = 0$ wynika, że $[M] = \int_V [N]^t \rho [N] dv$ w rozpatrywanym przykładzie będzie miała cztery następujące składniki:

$$m_{ii} = m_{jj} = \int_0^l \left[\frac{1}{l}(x_j - x)\right] \rho \left[\frac{1}{l}(x_j - x)\right] A dx = \frac{m}{3},$$

$$m_{ij} = m_{ji} = \int_0^l \left[\frac{1}{l}(x - x_i)\right] \rho \left[\frac{1}{l}(x - x_i)\right] A dx = \frac{m}{6},$$

gdzie $m = \rho Al$ jest masą całkowitą elementu.

Krok 6. Określenie wektorów sił P

W tym miejscu należy obliczyć węzłowe wartości sił czynnych (tj. sił, które odkształcają układ). Krok ten wykonujemy tylko w przypadku elementów skończonych brzegowych, leżących na części obciążonej naciskami p , lub we wszystkich elementach kiedy, zgodnie z wzorem (3.35), tj.

$$\{P\} = \int_V [N]^t \{g_0\} dv + \int_S [N]^t \{p\} ds,$$

należy uwzględnić obciążenia objętościowe (grawitacyjne) g_0 . W założeniach przykładu obciążenia te nie występują.

Krok 7. Określenie sił węzłowych oraz przemieszczeń, odkształceń i naprężeń (w tym wyteżenia).

Krok ten występuje po rozwiązaniu zagadnienia, w którym użyty był omawiany element skończony, to znaczy wtedy, gdy np. z równania (3.43) wyznaczony został niewiadomy wektor przemieszczeń węzłowych badanego układu elementów skończonych ($\{u\} = [K]^{-1}\{P\}$), a następnie wyodrębniony z niego wektor $\{u\}_e$ przynależny do omawianego elementu. W przykładzie krok ten określa siły węzłowe $\{P_e\} = [K]_e \{u\}_e$ elementu skończonego, czyli

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}.$$

Ten krok przygotowuje także do skonkretyzowania zależności (3.22), które służyć będą określeniu pól tytułowych wielkości po zakończeniu obliczeń (tj. po utworzeniu charakterystyki układu przez zsumowanie charakterystyk elementów skończonych wg wynikającej z wzorów (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) i (3.38) zasady, wprowadzeniu do tak utworzonego równania równowagi wszystkich warunków brzegowych wraz z określonymi w kroku 6-tym, oraz po obliczeniu niewiadomego wektora przemieszczeń węzłowych $\{u\}$). Konkretyzacja polega więc na podstawieniu obliczonych wartości podwektorów $\{u\}_e$ do zależności (3.22) odniesionych do każdego e -tego elementu skończonego.

W miarę potrzeb, ramach przygotowania do obliczeń pól naprężeń zadania tego kroku mogą być poszerzone o wzory do obliczeń naprężeń głównych, maksymalnych, zastępczych itp.

Przykład 3.2. Budowa charakterystyki liniowego, zginanego i ściskanego smukłego elementu skończonego (zagadnienie stateczności)

Wprowadzając w szczególności omówionego wcześniej zagadnienia stateczności zbadajmy zachowanie zginanego i ściskanego pręta w postaci belki wspornikowej (Rys. 3.4a), zastąpionej dwuwęzłowym (numery węzłów: i, k) elementem skończonym (Rys. 3.4b). Przyjęte zostały następujące oznaczenia: P jednostkowa siła ściskająca, przyłożona do swobodnego końca belki; $u(x)$ przemieszczenia wzdłużne przekrojów belki, przy czym $u(0) = 0$, $u(l) = u_c$; $w(x)$ poprzeczne ugięcia belki, przy czym $w(0) = 0$, $w(l) = 0$; $\varphi(x)$ kąt ugięcia belki, przy czym $\varphi(0) = 0$. Zadane są: $l = x_k - x_i$ – długość belki; A – jej stały na długości przekrój poprzeczny; J – stały na długości osiowy moment bezwładności przekroju belki, prostopadły do płaszczyzny (u, w) ; E – stały na długości moduł sprężystości podłużnej jego materiału; ρ – gęstość tego materiału. Do opisu zagadnienia stateczności tej użyjemy metody przemieszczeń MES i elementu skończonego o charakterystyce opisane tablicą Z.4 (por. Załącznik).

Do opisu wykorzystamy też założenia, które zamieszczone są na rysunku 3.4. Czytelnika odsyłamy też do przykładu 2.2.

Przyrost energii potencjalnej zginania i ściskania dla obranego elementu skończonego zapiszemy więc następująco:

$$\Delta\chi = \Delta U - \Delta W \quad (a)$$

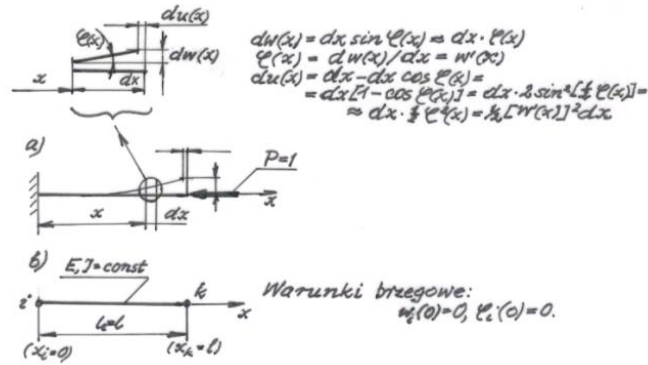
gdzie

$$\Delta U = \int_0^l \frac{1}{2} EJ \left[\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

wyraża przyrost energii potencjalnej zgięciowej;

$$\Delta W = \frac{\int_0^l [\lambda P(x)] \left[\frac{\partial w(x)}{\partial x} \right]^2 dx}{2}$$

wyraża zaś pracę siły ściskania na przemieszczeniach podłużnych (por. założenia podane na Rys. 3.4a), wywołanych zaburzeniem stanu równowagi elementu skończonego (belki), $\lambda P(x)$ jest przy tym ilorazem dowolnego współczynnika proporcjonalności i siły ściskającej, określanej w przekroju poprzecznym o współrzędnej x rozważanego elementu. W obliczeniach, jeśli przyjmie się w nich wartość $P(x) = 1$, to współczynnik λ utożsamia się fizycznie z siłą krytyczną i on jest niewiadomą zagadnienia.



Rys. 3.4. Założenia modelowe liniowego elementu skończonego i zagadnienia jego stateczności

Zgodnie z charakterystyką elementu skończonego i po oznaczeniu wielkości węzłowych elementu skończonego przez $\{u^*\} = [w_i, \varphi_i, w_k, \varphi_k]$ mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= [N(x)]\{u^*\}, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial x} = w'(x) = \left[\frac{\partial N(x)}{\partial x} \right] \{u^*\} = [N'(x)]\{u^*\}, \\ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} &= w''(x) = \left[\frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right] \{u^*\} = [N''(x)]\{u^*\} \end{aligned} \quad (b)$$

Przyrost energii elementu, po wprowadzeniu (b) do wyrażenia (a), można przedstawić nowym wzorem:

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= \frac{1}{2} EJ \{u^*\}^t \left(\int_0^l [N''(x)]^t [N''(x)] dx \right) \{u^*\} - \\ &- \frac{1}{2} \lambda \{u^*\}^t \left(\int_0^l [P(x)] [N'(x)]^t [N'(x)] dx \right) \{u^*\} = \frac{1}{2} \{u^*\}^t ([K] - \lambda [K_s]) \{u^*\} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\text{gdzie} \quad [K] = EJ \int_0^l [N''(x)]^t [N''(x)] dx \quad (c1)$$

jest macierzą sztywności elementu;

$$[K_s] = \int_0^l [P(x)] [N'(x)]^t [N'(x)] dx \quad (c2)$$

macierzą wynikających ze ściskania „naprężeń początkowych” dla tego elementu. Warunki stateczności elementu tym samym są następujące:

$$\frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial\{u^*\}} = ([K] - \lambda [K_s])\{u^*\} = \{0\}, \quad \frac{\partial^2(\Delta\chi)}{\partial\{u^*\}^2} = ([K] - \lambda [K_s]) = \{0\} \quad (d)$$

Niewiadomą zagadnienia λ określi natomiast równanie charakterystyczne:

$$\det \left| \frac{\partial^2 (\Delta \chi)}{\partial \{u^*\}^2} \right| = \det |([K] - \lambda [K_s])| = 0 \quad (d1)$$

W tym przykładzie budowa charakterystyki rozważanego elementu skończonego jest – aż do Kroku 4 włącznie – podobna do przedstawionej w przykładzie 3.1. Zgodnie z powyższym wprowadzeniem (por. tablica Z.4 w Załączniku) dodać należy jeszcze:

Krok 1. Określenie macierzy $[K_s]$

Macierz tę określa wzór (c2), konkretyzuje ostatecznie założenie co do rozkładu $P(x)$, które w przypadku skupionej w węźle końcowym może być wyrażone jako $P(l) = 1$, lub też jako dowolna funkcja x (w tym liniowa).

Krok 2. Określenie równania charakterystycznego (czyli równania (d1) i ogólnego (3.46))

Budowa charakterystyk elementów skończonych i układów nimi modelowanych metodą przemieszczeń MES. Zagadnienia ciepłno-mechaniczne

Zagadnienia ciepłno-mechaniczne przedstawione zostały ogólnie w przykładzie 2.5, a jego najprostszy przypadek szczególny podjęty był w przykładzie 2.1. Powracając do tego zagadnienia i budując potrzebną charakterystykę stosowanych elementów skończonych, rozszerzymy rozważanie na mechaniczne skutki pól temperatur w elemencie (układzie). Odwołując się, zatem, do przypominanych przykładów, po dyskretyzacji continuum układu elementami skończonymi, w dowolnym punkcie obszaru dowolnego elementu zależne od temperatur węzłowych T' (w przykładzie 2.5 oznaczonych przez ψ') temperatury T (w przykładzie 2.5 – ψ) wyraża przybliżenie

$$[T(x_1, x_2, x_3, t)] \approx [N(x_1, x_2, x_3)] \{\bar{T}(t)\} \quad (3.47)$$

do którego funkcja kształtu N przyjmowana jest podobnie jak w zagadnieniach mechanicznych. Zagadnienie natomiast opisują równania algebraiczne o postaci:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Delta V} \left\{ \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_1} \right) k_1 \left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_2} \right) k_2 \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_3} \right) k_3 \left(\frac{\partial N}{\partial x_3} \right) \right\} dv + \right. \\ & \left. + \int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p N ds \right] \psi_i - \int_{\Delta V} N_r Q dv + \int_{\Delta S_2} N_r q ds - \int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p T_0 ds = 0, \\ & i, r = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.48a)$$

gdzie r jest numerem węzła, N_r przypisaną węzłowi r częścią funkcji kształtu, k_j ($j = 1, 2, 3$) jest współczynnikiem przewodności cieplnej (w przykładzie 2.5 oznaczonym przez q_j) określanym dla j -tego kierunku współrzędnych $0x_1x_2x_3$, α_p jest współczynnikiem przejmowania ciepła (w przykładzie 2.5 – η) przez otoczenie o temperaturze T_o , Q jest prędkością wytwarzania ciepła (w przykładzie 2.5 – θ) ze źródła wewnętrznego (czyli ułożonego wewnątrz obszaru ΔV lub V), q wydatkiem odbieranego od otoczenia (lub oddawanego do otoczenia) ciepła przez jednostkę powierzchni brzegowej. Całki powierzchniowe $\int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p \mathbf{N} ds$, $\int_{\Delta S_2} N_r q ds$ i $\int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p T_o ds$ nie będą przy tym występować w elementach skończonych, położonych pod powierzchnią obszaru układu; ΔS_2 określa tę ścianę zewnętrzną elementów skończonych brzegowych, która po podziale obszaru na elementy skończone współtworzy przybliżoną geometrię powierzchni ograniczającej S .

Równania (3.48a) mogą być zapisane skrótem:

$$[H]_e \{\bar{T}\}_e - \{P\}_e = \{0\} \quad (3.48b)$$

gdzie elementy macierzy $[H]_e$ określa zależność

$$h_{rs} = \left[\int_V \left\{ k_1 \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial N_s}{\partial x_1} \right) + k_2 \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial N_s}{\partial x_2} \right) + k_3 \left(\frac{\partial N_r}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial N_s}{\partial x_3} \right) \right\} dv + \right. \\ \left. + \int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p \mathbf{N} ds \right] \quad (3.48c)$$

zaś elementy wektora $\{P\}_e$

$$\{P_r\} = \int_{\Delta V} N_r Q dv - \int_{\Delta S_2} N_r q ds + \int_{\Delta S_2} N_r \alpha_p T_o ds \quad (3.48d)$$

Korzystając z zasady określonej wzorami od (3.34) do (3.38) (lub z przykładu (2.5)) możemy dla układu m elementów skończonych zapisać pełny (w liczbie $m \times r$) układ równań algebraicznych:

$$[H]\{\bar{T}\} - \{P\} = \{0\} \quad (3.49)$$

z którego przy danych $[H]$ i $\{P\}$ wyznacza się niewiadomy wektor temperatur węzłowych $\{\bar{T}\}$, to zaś z kolei – wg 3.47 – prowadzi do ostatecznego określenia pola (rozkładu) temperatur w elementach skończonych.

Konsekwencją wywołanej przepływem ciepła zmiany temperatur punktów materialnych elementu skończonego (układu) będą skutki mechaniczne, m.in. takie jak zmiana pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Ograniczając się tylko do ustalonego w czasie zjawiska rozszerzalności cieplnej materiału elementu (układu) powiemy, że jeśli wektor mechanicznych odkształceń sprężystych (w zakresie pra-

wa Hooke'a) opisujemy wektorem $\{\varepsilon_H\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]^t$, to odpowiadające wywołanemu wzrostem temperatury zjawisku rozszerzalności odkształcenia cieplne można opisać podobnie:

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha_1 \Delta T, \alpha_2 \Delta T, \alpha_3 \Delta T, 0, 0, 0]^t \quad (3.50)$$

gdzie $\alpha_j (j = 1, 2, 3)$ to kierunkowe, ortotropowe współczynniki rozszerzalności cieplnej, $\Delta T = T - T_o$ jest przyrostem temperatury ponad temperaturę początkową T_o otoczenia. W dowolnym punkcie obszaru elementu skończonego (układu) mamy więc całkowite odkształcenia:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_H\} + \{\varepsilon_0\}, \text{ przy czym } \{\varepsilon_H\} = [k_\varepsilon]\{\sigma_H\} = [k_\sigma]^{-1}\{\sigma_H\} \quad (3.51)$$

oraz naprężenia

$$\{\sigma_H\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}]^t = [k_\sigma](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (3.52)$$

Jeśli przybliżone w myśl metody przemieszczeń MES wartości odkształceń sprężystych $\{\varepsilon_H\} = [B]\{u\}$ podstawimy do (3.51), a następnie obie strony równania pomnożymy przez $[k_\sigma]$, to otrzymamy naprężenia sformułowane następująco:

$$\{\sigma\} = [k_\sigma]\{\varepsilon\} = [k_\sigma][B]\{u\} + [k_\sigma]\{\varepsilon_0\} \quad (3.53)$$

gdzie $\{u\}$ jest niezależnym od czasu wektorem przemieszczeń węzłowych rozpatrywanego elementu skończonego. Po zastosowaniu zasady prac przygotowanych, określeniu sprężystej energii potencjalnej odkształconego elementu i jej pierwszej wariacji, oraz po zanotowaniu, że $\delta W_B = \delta W_R = 0$, $\delta W_Z = \delta\{u\}^t\{P\}$, $\delta W_U - \delta W_Z = 0$ i $\delta\{\varepsilon\} = [B]\delta\{u\}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta W_U &= \int_V \delta\{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv = \delta\{u\}^t \int_V [B]^t \{\sigma\} dv = \\ &= \delta\{u\}^t \int_V [B]^t ([k_\sigma][B]\{u\} + [k_\sigma]\{\varepsilon_0\}) dv = \\ &= \delta\{u\}^t \left(\int_V [B]^t [k_\sigma][B] dv \{u\} + \int_V [B]^t [k_\sigma]\{\varepsilon_0\} dv \right) = \\ &= \delta\{u\}^t ([K]\{u\} - \{P(\varepsilon_0)\}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Uwzględniając w bilansie prac przygotowanych wariację δW_Z i dowolność $\delta\{u\}$ ostatecznie mamy:

$$[K]\{u\} - \{P(\varepsilon_0)\} - \{P\} = \{0\} \quad (3.55)$$

gdzie $\{P\}$ wyraża działające na element skończony zewnętrzne siły węzłowe mechaniczne, zaś $\{P(\varepsilon_0)\} = - \int_V [B]^T [k_\sigma] \{\varepsilon_0\} dv$ siły węzłowe pochodzenia cieplnego.

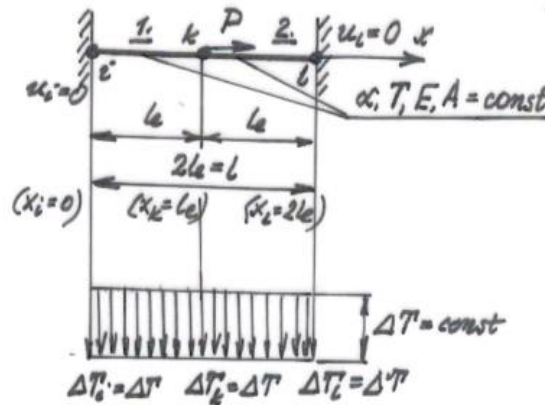
Należy dodać, że w rzeczywistości pochodzenie dodatkowych (początkowych) odkształceń lub dodatkowych (własnych) naprężeń może być różne. Procesy ich powstawania czy rejestrowania są zaawansowanymi zagadnieniami i nie będzie tu o tym mowy. Jeśli założyć, że ε_0 w rozpatrzonym zagadnieniu może reprezentować inne, dodatkowe odkształcenia, to sposób uwzględnienia ich skutków metodą przemieszczeń został przedstawiony. Bardzo podobne jest postępowanie przy uwzględnianiu skutków dowolnego pochodzenia naprężeń początkowych σ_0 . Przeprowadzając to samo postępowanie przy $\{\varepsilon_H\} = [B]\{u\}$ i $\{\sigma\} = [k_\sigma][B]\{u\} + \{\sigma_0\}$, stwierdzimy, że równanie (3.55) rozwinie się do następującego:

$$[K]\{u\} - \{P(\sigma_0)\} - \{P(\varepsilon_0)\} - \{P\} = \{0\} \quad (3.56)$$

gdzie siły węzłowe wyrażające skutek występowania w obszarze elementu skończonego naprężeń (początkowych) określa zależność $\{P(\sigma_0)\} = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dv$.

Przykład 3.3. Budowa charakterystyki cieplno-mechanicznej liniowych elementów skończonych

Charakterystykę dla pręta o długości l i o stałym polu przekroju poprzecznego A zbudujemy przy założeniu, że występujące mechaniczne i termiczne siły ściskające pręt nie osiągają wartości krytycznych. Materiał pręta opisuje stały na długości moduł sprężystości podłużnej E i stały współczynnik rozszerzalności liniowej α . Pręt ma zamurowane końce i jest obciążony podłużną siłą P , przyłożoną w środkowym jego przekroju. Pręt ponadto jest podgrzewany w taki sposób, że w całej jego objętości utrzymuje się stały przyrost temperatury ΔT . W celu przybliżonego rozwiązania rzeczywisty pręt został zastąpiony dwoma identycznymi, dwuwęzłowymi i liniowymi elementami skończonymi, których usytuowanie przestrzenne przedstawia rysunek 3.5. Przyjęte zostały następujące oznaczenia: $e = 1, 2$ – numery elementów, $r = i, k, l$ – numery węzłów, przy czym węzeł k leży w środkowym przekroju pręta i łączy końce elementów skończonych; u_r przemieszczenia węzłów r ; P_r siły określone w węzłach r . Zadane są: $l_e = x_l - x_k = x_k - x_i = l/2$ – długości elementów; A, E, α w elementach skończonych pozostają takie same jak w pręcie. Charakterystyki mechaniczne elementów skończonych identyczne jak w przypadku elementu z przykładu 3.1 (por. też Tabl. Z.1 w Załączniku).



Rys. 3.5. Założenia modelowe równomiernie nagrzanego układu dwuliniowych elementów skończonych

Budowę przybliżonej charakterystyki cieplno-mechanicznej – nie tylko opisanego w danych tego przykładu – zaczynają w pierwszym etapie kroki związane z zagadnieniem zmian temperatury rozważanego obiektu. Ponieważ zagadnienie przewodnictwa ciepła było już wielokrotnie omawiane, ponieważ ponadto zagadnienie przewodnictwa ciepła przez płaski trójkątny i przez czworoboczny element skończony oraz budowa ich charakterystyki zostały stabilizowane (por. Tabl. Z.7 i Tabl. Z.10, obie w Załączniku), to teraz i tutaj ograniczymy się jedynie do wyliczenia potrzebnych kroków postępowania. Po podziale na elementy skończone rozpatrywanego obszaru i określeniu wektora temperatur węzłowych będą to mianowicie:

- Krok 1. Dobór funkcji kształtu $\mathbf{N}$ dla wszystkich elementów skończonych (por. równanie 3.47).
- Krok 2. Określenie macierzy „sztywności” cieplnej $\mathbf{H}$ dla wszystkich elementów skończonych (por. wzory 3.48b i 3.48c).
- Krok 3. Określenie wektora węzłowych „obciążeń” cieplnych $\mathbf{P}$ dla wszystkich elementów skończonych (por. wzór 3.48d).
- Krok 4. Określenie macierzy „sztywności” $\mathbf{H}$ zbioru wszystkich elementów skończonych, odwzorowujących obszar zagadnienia (por. równanie 3.49 i zasady podane wzorami od 3.34 do 3.38).
- Krok 5. Określenie wektora węzłowych „obciążeń” cieplnych $\mathbf{P}_T$ przybliżonego elementami skończonymi obszaru, wprowadzenie warunków brzegowych i wynikająca z tego redukcja macierzy $\mathbf{H}$ macierzy dodatnio określonej.

Krok 6. Określenie wektora niewiadomych temperatur węzłowych pola temperatur T' w elementach skończonych i w obszarze (powrót do równania 3.47).

W przykładzie natomiast rozkład temperatur został zadany jako stały na długości obu elementów skończonych. Wobec tego – bez formalnego realizowania kroków od 1 do 6 wiemy, że:

- wektor przyrostów temperatur węzłowych pierwszego elementu skończonego
 $\{T\}_1 = [\Delta T_i, \Delta T_k]^t = [1, 1]^t \Delta T$,
 oraz dla elementu drugiego
 $\{T\}_2 = [\Delta T_k, \Delta T_l]^t = [1, 1]^t \Delta T$;
- funkcje kształtu pierwszego elementu skończonego
 $[N]_1 = [N_{1i}, N_{1k}] = [x_k - x/l_e, x - x_i/l_e] = [(1 - x/l_e), x/l_e]$,
 oraz dla elementu drugiego
 $[N]_2 = [N_{2i}, N_{2k}] = [x_l - x/l_e, x - x_k/l_e] = [(2 - x/l_e), (x/l_e - 1)]$;
- macierze odkształceń pierwszego elementu skończonego
 $[B]_1 = [B_{1i}, B_{1k}] = [-1, 1]$,
 oraz dla elementu drugiego
 $[B]_2 = [B_{2i}, B_{2k}] = [-1, 1]$;
- obciążenia cieplne w węzłach pierwszego elementu skończonego (por. wzór 3.48d)
 $\{P_T\}_1 = \int_0^{l_e} \left\{ \frac{1}{l_e} [-1, 1]^t E \alpha \left[\left(1 - \frac{1}{l_e}\right), \frac{1}{l_e} \right] [1, 1]^t \Delta T \right\} A dx = \alpha E A \Delta T [-1, 1]^t$,
 oraz w węzłach elementu drugiego

$$\begin{aligned} \{P_T\}_2 &= \int_0^{l_e} \left\{ \frac{1}{l_e} [-1, 1]^t E \alpha \left[\left(2 - \frac{1}{l_e}\right), \left(\frac{1}{l_e} - 1\right) \right] [1, 1]^t \Delta T \right\} A dx \\ &= \alpha E A \Delta T [-1, 1]^t; \end{aligned}$$

- wektor obciążeń węzłowych dla pręta, czyli łączny dla obu elementów skończonych

$$\{P_T\} = \{P_T\}_1 + \{P_T\}_2 = \alpha E A \Delta T [-1, 1, 0]^t + \alpha E A \Delta T [-1, 1]^t.$$

W drugim etapie postępowania kroki od 7 do 10 dotyczą wyłącznie zagadnienia mechanicznego i identyfikują się z krokami od 1 do 4 z przykładu 3.1. W rezultacie otrzymujemy po tym drugim etapie macierz sztywności $[K]$ układu, wektor czynnych, zewnętrznych i wewnętrznych sił węzłowych $\{P\}$. Znamy też funkcje kształtu $[N]$ i macierze odkształceń $[B]$ i naprężeń $[S]$ oraz wektor poszukiwanych przemieszczeń $\{u\}$.

Powracając do przykładu, to dla układu dwuliniowych elementów skończonych po tych czterech krokach drugiego etapu mamy:

- funkcje kształtu $[N]$ i macierze odkształceń $[B]$ identyczne jak w etapie pierwszym cieplnym;
- wektor przemieszczeń węzłowych $\{u\} = [u_i, u_k, u_l]^t$ (po uwzględnieniu warunków brzegowych $\{u\} = [0, u_k, 0]^t$);
- wektor sił węzłowych $\{P\} = [P_i, P_k, P_l]^t$ (po uwzględnieniu warunków brzegowych $\{P\} = (R_i, P, R_l)^t$, gdzie R_i i R_l są nieznanymi reakcjami w węzłach i oraz l);
- macierz sztywności $[K]$ o elementach

$$\begin{aligned} k_{ii} &= \frac{EA}{l_e}, k_{jk} = -\frac{EA}{l_e}, k_{il} = 0, \\ k_{kj} &= -\frac{EA}{l_e}, k_{kk} = 2\frac{EA}{l_e}, k_{kl} = -\frac{EA}{l_e}, \\ k_{li} &= 0, k_{lk} = -\frac{EA}{l_e}, k_{ll} = \frac{EA}{l_e}. \end{aligned}$$

Etap trzeci, cieplno-mechaniczny wyprzedzić musi rozwiązanie układu równań (3.55) względem wektora przemieszczeń węzłowych, tj. obliczenie wartości elementów tego wektora, co polega na przeprowadzeniu działań

$$\{u\} = [K]^{-1}(\{P\} + \{P(\varepsilon_0)\}) = [K]^{-1}(\{P\} + \{P_T\}) \quad (a)$$

W rozpatrywanym przykładzie układ równań (3.55) przyjął postać układu następujących trzech równań:

$$\begin{aligned} u_k \frac{EA}{l_e} &= R_i - \alpha EA \Delta T, \\ 2u_k \frac{EA}{l_e} &= P, \\ u_k \frac{EA}{l_e} &= R_l + \alpha EA \Delta T \end{aligned} \quad (b)$$

Działania (a) na układzie (b) prowadzą natomiast do rezultatu:

$$u_k = \frac{Pl_e}{2EA}, R_i = -\frac{P}{2} + \alpha EA \Delta T, R_l = -\frac{P}{2} - \alpha EA \Delta T \quad (c)$$

które pozwalają zakończyć budowę charakterystyki układu, do czego potrzebne są trzy ostatnie kroki.

Krok 11. Określenie funkcji przemieszczeń cieplno-mechanicznych w elementach skończonych ($w = [N]\{u\}$) i układzie.

Krok 12. Określenie funkcji odkształceń cieplno-mechanicznych w elementach skończonych ($\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$) i układzie.

Krok 13. Określenie funkcji naprężeń cieplno-mechanicznych w elementach skończonych ($\{\sigma\} = [k_\sigma][B]\{u\}$) i układzie.

We wszystkich krokach $\{u\} = [K]^{-1}(\{P\} + \{P^T\})$.

Na podstawie rozwiązania (c) w naszym przykładzie po tych ostatnich trzech krokach otrzymamy dla pierwszego elementu skończonego

$$w_1 = \left(\frac{x}{l_e}\right) u_k, \varepsilon_1 = \frac{u_k}{l_e}, \sigma_1 = E \left(\frac{u_k}{l_e} - \alpha \Delta T\right)$$

oraz dla elementu drugiego

$$w_2 = \left[\frac{(2-x)}{l_e}\right] u_k, \varepsilon_2 = -\frac{u_k}{l_e}, \sigma_2 = E \left(-\frac{u_k}{l_e} - \alpha \Delta T\right).$$

Algorytm rozwiązania metodą przemieszczeń MES

Pełna procedura rozwiązania obejmuje:

- wybór modelu nominalnego rzeczywistego obiektu (np. przestrzenne continuum sprężyste, powłoki i grubościennne rury, dwuwymiarowe i osiowo-symetryczne płyty i tarcze, ramy, kratownice i pręty pryzmatyczne),
- możliwie dokładną idealizację geometryczną modelu nominalnego za pomocą elementów skończonych,
- wybór lub określenie charakterystyki zastosowanych rodzajów elementów skończonych z uwzględnieniem potrzeb ewentualnej idealizacji rozkładu własności fizycznych,
- określenie charakterystyki całości przyjętego modelu (model matematyczny) zgodnie z przyjętymi podzbiorami przemieszczeń i podzbiorami ich wymuszeń oraz dyskretyzację czynnych obciążeń zewnętrznych (wymuszeń),
- redukcję układu równań równowagi z punktu widzenia występujących warunków brzegowych; ciągłości czy symetrii,
- rozwiązanie zredukowanego układu równań równowagi względem zmiennych niezależnych (przemieszczeń),
- określenie z pomocą wcześniej wyeliminowanych równań na podstawie wyznaczonych zmiennych niezależnych innych niewiadomych wielkości (reakcji oraz węzłowych przemieszczeń i sił zależnych),
- określenie (i ew. retransformacja względem przyjętych układów współrzędnych) pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wewnątrz elementów skończonych, określenie (z wizualizacją) pól przemieszczeń, odkształceń

i naprężeń (wraz z ich wielkościami pochodnymi) w całym (lub wskazanym) obszarze modelu z uwzględnieniem kompensacji ewentualnych anomalii tych wielkości.

Ideę tej procedury ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 3.6. W typowym przypadku postępowanie sprowadzić można do bloków operacyjnych oznaczonych symbolami od *B1* do *B7*.

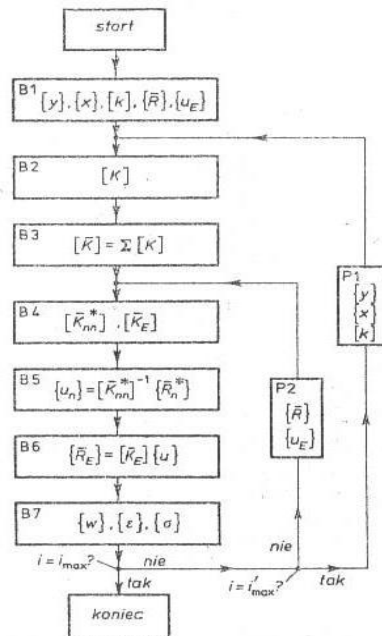
Pierwszy blok (*B1*) dotyczy operacji przygotowania danych podstawowych oraz ich przetworzenia na użytek dalszej procedury. Powinien zawierać czynności wymagane do realizacji rozwiązania, a mianowicie czynności takie jak:

- wybór globalnego układu współrzędnych $\{y\}$ po ustaleniu modelu nominalnego;
- wybór rodzaju, liczby i sposobu numeracji elementów skończonych, określenie położenia lokalnych układów współrzędnych $\{x\}$ i ich orientacji względem układu globalnego, ustalenie liczby, sposobu numeracji i współrzędnych węzłów poszczególnych elementów skończonych (siatki podziału modelu), dobór funkcji kształtu, ustalenie danych materiałowych i postaci macierzy sprężystości, przyjęcie założeń co do stanu początkowego materiału elementów skończonych, przyjęcie założeń co do stanu czynników zewnętrznych, określenie i uporządkowanie zbiorów sił węzłowych w odniesieniu do elementów skończonych i odwzorowywanego nimi obiektu, ustalenie założeń co do warunków brzegowych i warunków ciągłości lub symetrii, uporządkowanie zbiorów przemieszczeń, sił oraz podmacierzy masy tłumienia i sztywności, ustalenie ekonomicznego systemu zapamiętywania (zapisywania), wielokrotnego wykorzystywania i przetwarzania tak otrzymanych danych oraz systemu sterowania operacjami numerycznymi.

W zależności od możliwości technicznych (wielkości i rodzaju eksploatowanych maszyn cyfrowych) czynności te mogą być wykonane ręcznie, półautomatycznie (np. ręczne przygotowanie danych podstawowych i ich przetworzenie maszynowe) lub automatycznie (na podstawie niezbędnych założeń np. przy tworzeniu systemem CAD siatki elementów skończonych). Czynnikiem nadrzędnym (kryterium) postępowania na tym etapie procedury pozostaje maksymalne zbliżenie modelu do jego pierwowzoru (rzeczywistego obiektu) oraz optymalna ekonomika obliczeń.

Z punktu widzenia potrzeb metody przemieszczeń następne bloki (od *B2* do *B5*) obejmować będą operacje na macierzach sztywności elementów skończonych i macierzy sztywności rozważanego modelu nominalnego. Blok *B2* zawiera obliczenia współczynników masy, tłumienia i sztywności elementów skończonych na podstawie wynikowych danych bloku *B1* oraz tworzenie macierzy sztywności i jej podzbiorów sztywności według sekwencji zastosowanego porządku numeracji węzłów i numeracji podzbiorów wyróżnionych wielko-

ści węzłowych. Są to czynności powtarzalne zależnie od liczby i rodzaju przyjętych elementów skończonych lub postaci funkcji kształtu. W szczególnych przypadkach potrzeby tworzenia elementów skończonych wyższego rodzaju (np. z elementów podstawowych) w bloku tym mogą się znaleźć operacje superpozycji i przekształcenia charakterystyk (odpowiedniki operacji następnego bloku $B3$). Blok $B3$ obejmuje sumowanie macierzy sztywności elementów skończonych w sposób uzależniony od przyporządkowania numerów węzłów numerom elementów skończonych. Z tak obliczonej macierzy sztywności należy w następnym bloku ($B4$) wydzielić pod macierze odpowiadające podzbiorom przemieszczeń i sił węzłowych. Wynik tego etapu operacji musi prowadzić do ustalenia składowych podmacierzy według powyżej przedstawionych idei.



Rys. 3.6. Schemat algorytmu zastosowania i przebiegu rozwiązania metody przemieszczeń

Właściwe rozwiązanie podjętego zagadnienia następuje w bloku $B5$, którego działania polegają (por. wzór (3.66)) na:

- ustaleniu zredukowanych czynnych sił węzłowych $\{R_n^*\}$,
- odwróceniu macierzy $[K_{nn}^*]$,
- obliczeniu poszukiwanych niezależnych przemieszczeń węzłowych $\{u_n\}$.

Rozwiązanie zadania zamykają obliczenia wartości i rozkładów wielkości zależnych od obliczonych przemieszczeń. Prowadzące do tego operacje ujęto w blokach $B6$ i $B7$. Blok $B6$ obejmuje ostateczne określenie podzbiorów biernych sił

węzłowych. W miarę potrzeby blok ten może zawierać obliczenia składowych sił węzłowych w dowolnych węzłach dowolnych elementów skończonych. Ostatni blok obliczeń (*B7*) ma na celu wyznaczenie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w punktach elementów skończonych i modelowanego nimi obiektu. Może też zawierać numeryczne procedury wizualizacji uzyskanych wyników.

W schemacie procedury (Rys. 3.6) naniesiono dodatkowo dwie pętle operacyjne, których użycie jest albo niezbędne, albo potrzebne przy wielowariantowym rozwiązywaniu postawionego zagadnienia. Gdy wynik rozwiązania wymaga uściślenia (np. w obszarach wysokich gradientów przemieszczeń lub naprężeń), wówczas niezbędne jest użycie pętli P_1 . Następuje to po korekcie (najczęściej zagęszczeniu) liczby elementów skończonych. Może być ona także użyta jako operator sterujący na przykład wybieraniem wariantów danych. Pętla P_2 służyć może np. wielokrotnym rozwiązaniom danego problemu w różnych wariantach obciążeń zewnętrznych lub warunków brzegowych.

Przykład 3.4. Zagadnienie statyki żurawika przyściennego

Model nominalny żurawika, czyli płaską kratownicę przegubową przedstawia rysunek 3.7a.

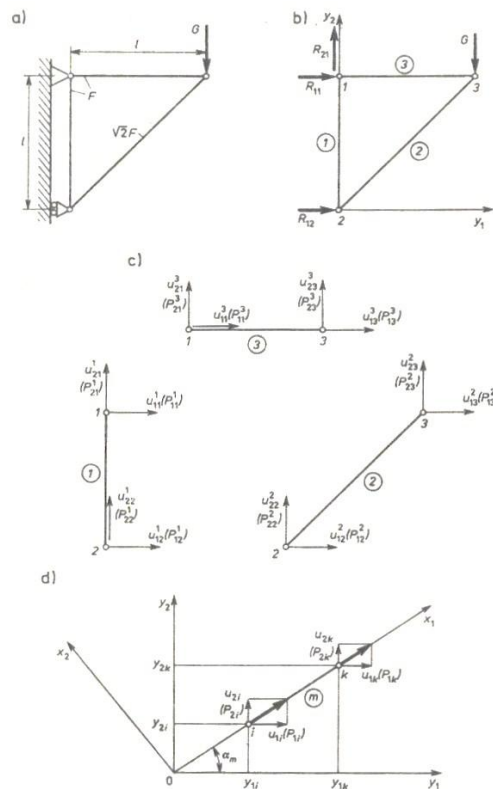
Postawione zagadnienie polegać będzie na wyznaczeniu sił wewnętrznych w prętach kratownicy, zewnętrznych sił biernych (reakcji w podporach kratownicy) i przemieszczeń jej przegubów dla zadanej geometrii, materiału prętów i udźwigu żurawika. Zakłada się przy tym, że wartości ściskających sił wewnętrznych w prętach kratownicy nie osiągają stanu krytycznego. Dane zadania (por. Rys. Rys. 3.7a, 3.7b i 3.7c): długości prętów $l_1 = l_2 = l$, $l_3 = \sqrt{2}l$; przekroje poprzeczne prętów $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = \sqrt{2}F$; moduł sprężystości liniowej materiałów prętów $E_1 = E_2 = E_3 = E$; udźwig żurawika wyrażony pionową siłą G , skierowaną ku dołowi i przyłożoną do swobodnego przegubu; przemieszczenia przegubów podpartych $u_{11} = u_{21} = u_{12} = 0$. Wielkości poszukiwane: prętowe siły wewnętrzne P_1, P_2, P_3 interpretowane jako siły działające wzdłuż osi odpowiednich prętów; bierne (reakcje podpór) siły zewnętrzne R_{11}, R_{21}, R_{12} ; przemieszczenia przegubów u_{22}, u_{13}, u_{33} .

Rozwiązanie przebiegać będzie w kilku etapach.

Etap 1. Zdefiniowanie modelu dyskretnego kratownicy i wybór globalnego układu współrzędnych (w algorytmie MES blok B1)

Model dyskretny żurawika jest identyczny z jego modelem nominalnym, albowiem elementami skończonymi pozostać mogą jego pręty (na Rys. 3.7b oznaczone obwiedzionymi i pogrubionymi liczbami 1, 2 i 3), węzłami zaś ich przeguby (na tym samym rysunku oznaczone liczbami 1, 2 i 3). Oznacza to, że będziemy mieć do czynienia z trzema liniowymi elementami skończonymi o dwu węzłach (o omawianych już charakterystykach, a także dostępnych

w bibliotece charakterystyk elementów skończonych – por. Tabl. Z.1 w Załączniku), z których każdy jest odmiennie, ale w znany sposób usytuowany względem siebie. To drugie z kolei wymusza, już na tym etapie postępowania, wybór wspólnego, globalnego układu współrzędnych, który arbitralnie powiązany został (por. Rys. 3.7b) z przegubem (węzłem) 2.



Ze względu na różnorodne ustawienie prętów względem osi przyjętego wspólnego (globalnego) układu współrzędnych, zachodzi potrzeba transformacji charakterystyki naszych elementów liniowych, którą podaje np. tablica Z.1 w Załączniku:

$$[K]_x^m = \frac{E_m F_m}{l_m} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie indeks m wskazuje numer elementu, a indeks x – lokalny układ współrzędnych, w tym przypadku jednoosiowy ($0x_1$). Gdyby te elementy liniowe opisać, nie zmieniając położenia osi $0x_1$, w prostokątnym układzie współrzędnych lokalnych ($0, x_1, x_2$), to mielibyśmy: $\{x\} = [x_1, 0]^t$, $\{u_r\}_x = [u_{1r}, 0]_x^t$, $\{P_r\}_x = [P_{1r}, 0]_x^t$, $r = i, k$.

Transformata koniecznego przekształcenia w rozpatrywanym, płaskim przypadku (por. Rys. Rys. 3.7c i 3.7d) ma postać:

$$[T_m] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m \\ \sin \alpha_m & \cos \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Przejście do globalnego dwuosiowego, prostokątnego układu współrzędnych ($0, y_1, y_2$) polega, zatem na wykonaniu na przemieszczeniach i siłach węzła elementu liniowego następujących operacji:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{1r} \\ u_{2r} \end{Bmatrix}_y^m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m \\ \sin \alpha_m & \cos \alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1r} \\ 0 \end{Bmatrix}_x^m = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_m \\ \sin \alpha_m \end{Bmatrix} (u_{1r})_x^m, \\ \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \end{Bmatrix}_y^m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m \\ \sin \alpha_m & \cos \alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ 0 \end{Bmatrix}_x^m = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_m \\ \sin \alpha_m \end{Bmatrix} (P_{1r})_x^m. \end{aligned}$$

W rezultacie dla dwuwęzłowego liniowego elementu skończonego mamy:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{1l} \\ u_{1k} \end{Bmatrix}_x^m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & \sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1l} \\ u_{2l} \\ u_{1k} \\ u_{2k} \end{Bmatrix}_y^m, \\ \begin{Bmatrix} P_{1l} \\ P_{2l} \\ P_{1k} \\ P_{2k} \end{Bmatrix}_y^m &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & 0 \\ \sin \alpha_m & 0 \\ 0 & \cos \alpha_m \\ 0 & \sin \alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1l} \\ P_{1k} \end{Bmatrix}_x^m. \end{aligned}$$

Innymi słowy, następuje w ten sposób (por. Rys. 3.7d) rozkład wektorów przemieszczeń i sił węzłowych na ich składowe w nowym układzie współrzędnych.

Natomiast jego charakterystyka (macierz sztywności) po takiej transformacji przekształci się do ogólnej postaci:

$$[K]_y^m = \frac{E_m F_m}{l_m} \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & 0 \\ \sin \alpha_m & 0 \\ 0 & \cos \alpha_m \\ 0 & \sin \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & \sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E_m F_m}{l_m} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_m & \sin \alpha_m \cos \alpha_m & -\cos^2 \alpha_m & -\sin \alpha_m \cos \alpha_m \\ \sin \alpha_m \cos \alpha_m & \sin^2 \alpha_m & -\sin \alpha_m \cos \alpha_m & -\sin^2 \alpha_m \\ -\cos^2 \alpha_m & -\sin \alpha_m \cos \alpha_m & \cos^2 \alpha_m & \sin \alpha_m \cos \alpha_m \\ -\sin \alpha_m \cos \alpha_m & -\sin^2 \alpha_m & \sin \alpha_m \cos \alpha_m & \sin^2 \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Macierz sztywności elementu **1** z tego wyrażenia otrzymamy po podstawieniu: $m = 1$, $\alpha_1 = \pi/2$ oraz $E_1 F_1 / l = EF / l$. Wtedy otrzyma się:

$$[K]_y^l = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W związku z tym (i po uwzględnieniu numerów węzłów $i = 1$, $k = 2$) równanie statycznego stanu tego elementu przyjmie postać:

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{Bmatrix}_y^1 = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}_y^1.$$

Postępując podobnie, uzyskamy równanie stanu elementu **2** ($m = 2$, $\alpha_2 = \pi/4$, $E_2 F_2 / l_2 = EF / l$, $i = 2$, $k = 3$):

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{Bmatrix}_y^2 = [K]_y^2 \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^2 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^2$$

oraz dla elementu **3** ($m = 3$, $\alpha_3 = 0$, $E_3 F_3 / l_3 = EF / l$, $i = 1$, $k = 3$):

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{Bmatrix}_y^3 [K]_y^3 \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^3 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^3$$

Uwzględnienie warunków zgodności przemieszczeń węzłów, tj.:

$$\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}_y^1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}_y^3, \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}_y^1 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}_y^2, \begin{Bmatrix} u \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^2 = \begin{Bmatrix} u \\ u_{23} \end{Bmatrix}_y^3,$$

pozwalą na następujące przekształcenia charakterystyk elementów:

$$\{P\}_y^m = [K^*]_y^m \{u\}_y, \quad m = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$\{u\}_y = [u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}, u_{13}, u_{23}]_y^t,$$

$$\{P\}_y^1 = ([P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}, P_{13}, P_{23}]_y^1)^t,$$

$$\{P\}_y^2 = ([0, 0, P_{12}, P_{22}, P_{13}, P_{23}]_y^2)^t,$$

$$\{P\}_y^3 = ([P_{11}, P_{21}, 0, 0, P_{13}, P_{23}]_y^3)^t,$$

$$[K^*]_y^1 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K^*]_y^2 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[K^*]_y^3 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Etap 3. Określenie charakterystyki i równania stanu kratownicy (B3)

Zbiór węzłowych sił zewnętrznych działających na kratownicę można przedstawić w ogólnej postaci:

$$\{\bar{Q}\}_y = [\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{21}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{13}, \bar{Q}_{23}]_y^t.$$

Siły te konkretyzują się po wprowadzeniu danych zadania (por. Rys. 3.7b) i sprowadzają powyższy zbiór do następującej postaci:

$$\{\bar{Q}\}_y = [R_{11}, R_{21}, R_{12}, 0, 0, -G]^t.$$

Równanie statycznej równowagi kratownicy przedstawia następująca zależność:

$$\{P\}_y^1 + \{P\}_y^2 + \{P\}_y^3 = \{\bar{Q}\}_y.$$

Zależność ta, po wstawieniu wyprowadzonych wyżej charakterystyk elementów skończonych, czyli związków wewnętrznych sił węzłowych z węzłowymi przemieszczeniami, przekształca się do opisującej charakterystykę kratownicy (jej dyskretnego modelu) formuły:

$$[\bar{K}]_y \{u\}_y = \{\bar{Q}\}_y$$

$$\frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{12} \\ 0 \\ 0 \\ -G \end{Bmatrix}.$$

Warto zauważyć, że w tym równaniu stanu regułą jest także sumowanie się macierzy sztywności w następującym sensie:

$$[\bar{K}]_y = [K^*]_y^1 + [K^*]_y^2 + [K^*]_y^3 = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Etap 4. Rozwiązanie zadania względem niewiadomych przemieszczeń (B4, B5)

W tej części dokonać należy:

- redukcji otrzymanego w etapie 3 układu równań, mającej na celu uwzględnienie warunków brzegowych zadania;
- rozwiązania zredukowanego układu równań względem przemieszczeń;
- na podstawie wyznaczonych przemieszczeń określenia sił biernych, wyrażonych na początku wyrugowanymi z rozpatrywanego układu równaniami.

Opierając się na danych zadania, zbiór przemieszczeń wygodnie jest podzielić na podzbiory: $\{u_0\} = [u_{11}, u_{21}, u_{12}]^t = \{0\}$, $\{u_n\} = [u_{22}, u_{13}, u_{23}]^t$.

Pierwszy podzbiór (zerowych przemieszczeń) określa warunki brzegowe, drugi zaś zmienne niezależne zadania. Z tego podziału wynika odpowiedni podział zewnętrznych sił węzłowych: $\{Q_0\} = [R_{11}, R_{21}, R_{12}]^t$, $\{Q\} = [0, 0, -G]^t$ oraz macierzy sztywności kratownicy:

$$[\bar{K}]_y = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{00}] & [\bar{K}_{0n}] \\ [\bar{K}_{00}]^t & [\bar{K}_{nn}] \end{bmatrix},$$

gdzie

$$[\bar{K}_{00}] = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\bar{K}_{0n}] = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, [\bar{K}_{nn}] = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zredukowany układ równań równowagi

$$[\bar{K}_{nn}]\{u_n\} = \{\bar{Q}_n\}$$

przyjmie postać szczegółową

$$\frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{Bmatrix},$$

poszukiwane zaś reakcje określają wyeliminowane równania, tj. zależności:

$$\{\bar{Q}_0\} = [\bar{K}_{0n}]\{u_n\} \text{ lub } \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{12} \end{Bmatrix} = \frac{EF}{2l} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix}.$$

Rozwiązując zredukowany układ równań, otrzyma się poszukiwane przemieszczenia:

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = [\bar{K}_{nn}]^{-1}\{\bar{Q}_n\} = \frac{1}{EF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{Bmatrix} \frac{Gl}{EF}$$

oraz, na ich podstawie, także nieznane reakcje podpór kratownicy:

$$\begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} G.$$

Etap 5. Określenie prętowych sił wewnętrznych (B6)

Problem ten sprowadza się do określenia węzłowych sił poszczególnych elementów skończonych i retransformacji tego zbioru do lokalnego układu współrzędnych tych elementów. Na podstawie wyznaczonych przemieszczeń mamy:

$$([u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}]_y^1)^l = \frac{Gl}{EF} [0, 0, 0, -1]^t,$$

$$([u_{11}, u_{22}, u_{13}, u_{23}]_y^2)^l = \frac{Gl}{EF} [0, -1, 1, -4]^t,$$

$$([u_{11}, u_{21}, u_{13}, u_{23}]_y^3)^l = \frac{Gl}{EF} [0, 0, 1, -4]^t.$$

Podstawienie tego wyniku do wyrażeń opisujących charakterystykę elementów skończonych prowadzi odpowiednio do:

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{Bmatrix}_y^1 = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} G,$$

$$\begin{Bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{13} \\ P_{23} \end{Bmatrix}_y^2 = \frac{1}{2} G \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} G,$$

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{13} \\ P_{23} \end{Bmatrix}_y^3 = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} G.$$

Retransformacja tych sił przeprowadzona w myśl operacji

$$\begin{Bmatrix} P_{1i} \\ P_{1k} \end{Bmatrix}_x^m = \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & \sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{1k} \\ P_{2k} \end{Bmatrix}_y^m, m = 1, 2, 3,$$

daje ostateczny wynik:

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix}_x^1 = G \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} G,$$

$$\begin{Bmatrix} P_{12} \\ P_{13} \end{Bmatrix}_x^2 = G \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \sqrt{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} G,$$

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{13} \end{Bmatrix}_x^3 = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} G$$

lub w myśl przyjętej w tablicy Z.1 z Załącznika definicji sił węzłowych: $P_1 = G$, $P_2 = -2^{1/2}G$, $P_3 = G$, gdzie wartości dodatnie oznaczają rozciąganie, ujemne zaś ściskanie prętów.

Gdyby to było celem zadania, to następnym etapem rozwiązania (B6) byłoby oznaczenie naprężeń i odkształceń w przekrojach prętów. Postępowanie w tym kierunku objęłoby w pierwszym kroku transformację podzbiorów otrzymanych węzłowych przemieszczeń do lokalnych układów współrzędnych poszczególnych elementów, a następnie na podstawie tak przekształconych wartości przemieszczeń objęłoby oznaczenie odkształceń i naprężeń. W bardziej skomplikowanych zagadnieniach występuje ponadto etap wizualizacji otrzymanych wyników. W tym zadaniu wizualizacją można by było objąć, wywołane zewnętrznym obciążeniem, zmiany położenia węzłów i mógłby to być rysunek odkształconej geometrii żurawika.

Przedstawione zadanie, ograniczone np. do zagadnienia oznaczania zewnętrznych sił biernych i sił wewnętrznych w prętach żurawika, ma – oczywiście – krótsze, nie wymagające dyskretyzacji modelu nominalnego rozwiązanie mechaniki technicznej (w zakresie statyki płaskich kratownic). Jest ono dydaktycznym wzorem zadań bardziej rozwiniętych, w tym zadań określania pól przemieszczeń węzłów, w których niska pracochłonność komputerowa usuwa z kręgu konkurencji tradycyjne i klasyczne metody.

W rozwiązaniu przedstawionego zadania pominięto objaśnianie elementarnej algebry macierzowej, w tym np. możliwości i zasady odwracania macierzy. Wszystko to, co w tym zadaniu wymagało wiedzy z algebry, ograniczyło się do umiejętności rozwiązywania trzech równań algebraicznych z trzema niewiadomymi.

Przykład 3.5. Zagadnienie wyboczenia zginanego i ściskanego smukłego pręta pryzmatycznego (cd)

Będzie to kontynuacja przykładu 3.2, w tej części ilustrująca sposób formułowania warunku stateczności belki, równania charakterystycznego oraz sposób określania siły krytycznej. Z przykładu 3.2 przeniesione zostają potrzebne założenia (m.in. wektor przemieszczeń węzłowych $\{u\} = [u_i, \varphi_i, u_k, \varphi_k]t$) i wyniki zastosowania metody przemieszczeń MES w zagadnieniu, czyli wyprowadzone tam warunki stateczności (d), (d1) i definicje macierzy (c1), (c2). Do tego konieczne jest skonstatowanie na wstępie postaci macierzy $[K]$ i $[K_s]$, określonych w tablicy Z.4 (w Załączniku), odpowiednich dla przyjętego typu elementu skończonego. Postaci tych macierze konkretyzują warunek (d) w następujący sposób:

$$\left(\frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -3l & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & l^2 \\ -3l & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) [u_i, \varphi_i, u_k, \varphi_k]^t = \{0\} \quad (a)$$

Warunki brzegowe $u_i = 0$ i $\varphi_i = 0$ redukują układ równań (a) do dwu równań związanych z węzłem k:

$$\left(\frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l \\ -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) [u_k, \varphi_k]^t = \{0\} \quad (b)$$

Dopiero z równania (b) możemy wywieść warunek (d1). Jeśli zatem pomocniczo wprowadzimy niewiadomą $\lambda' = \lambda l^2 / 60EJ$, to warunek ten przyjmie postać:

$$\det \begin{vmatrix} 6 - 36\lambda' & -3 + 3l\lambda' \\ -3l + 3l\lambda' & 2l^2 - 4l^2\lambda' \end{vmatrix} = 0, \text{ lub } 45(\lambda')^2 - 26\lambda' + 1 = 0 \quad (c)$$

Równanie charakterystyczne (c) spełniają pierwiastki $\lambda'_1 = 6,1/90$ i $\lambda'_2 = 45,9/90$, z których mniejszy wskazuje poszukiwaną siłę krytyczną

$$P_{kr} = \lambda_{kr} = \lambda_1 \approx \lambda'_1 \frac{60EJ}{l^2} = 4,0 \frac{EJ}{l^2}$$

Teoretyczna wartość siły krytycznej dla rozważanego przypadku smukłego pręta wynosi $P_{kr} = \pi^2 EJ / l^2 \approx 9,8596$.

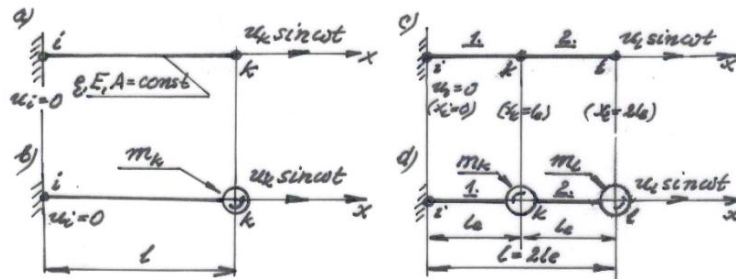
Przykład 3.6. Częstości drgań własnych podłużnych rozciąganego pręta pryzmatycznego

Ilustrując rozwiązanie zagadnienia drgań własnych użyjemy raz jeszcze najprostszego przykładu rozciąganego pręta pryzmatycznego i jego skutecznego w zagadnieniach statycznych zastępcy – dwuwęzłowego elementu skończonego, opisanego w wariantach na Rys. 3.8. Przyjęte zostały następujące oznaczenia:

- wariant z Rys. 3.8 a,b $e = 1$ – numer (i liczba) elementu, $r=i,k$ – numery węzłów; $u_i = 0, u_k$ – przemieszczenia węzłów; $l = x_k - x_i$ – długość elementu; $m_k = \rho Al$ – masa skupiona w węzle k ;
- wariant z Rys. 3.8 c,d $e = 1, 2$ – numery obu elementów skończonych, $r=i,k,l$ – numery węzłów, przy czym k jest węzłem wspólnym elementów; $u_i = 0, u_k, u_l$ – przemieszczenia węzłów; $l_e = x_k - x_i = x_l - x_k = \frac{l}{2}$
- długości elementów; $m_k = m_l = \rho Al_e$ – masy skupione w węzłach k, l .

Zadane w obu wariantach są: A – jego stały na długości przekrój poprzeczny; E – stały na długości moduł sprężystości podłużnej jego materiału; ρ – gęstość tego materiału.

Znana jest charakterystyka zastosowanego liniowego elementu skończonego (por. Przykład 3.1, Tabl. Z.1 w Załączniku).



Rys. 3.8. Założenia modelowe co do rozłożenia mas (Rys. Rys. a,c lub b,d) i co do liczby elementów skończonych (Rys. Rys. a,c) podłużnie drgającego pręta pryzmatycznego

W obu wariantach częstości drgań własnych w celach porównawczych określane będą osobno dla naturalnego przypadku masy rozłożonej wzdłuż długości elementu skończonego i dla przypadku masy skupionej w węzłach elementu.

Podstawą obliczeń są równania (3.40), (3.41) i kryterium (3.42).

Wariant pierwszy, przypadek masy rozłożonej ($[M_0] = 0, [M_q] \neq 0$, Rys. 3.8a).

Z charakterystyki elementu skończonego zapisujemy, że

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, [M_q] = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Równanie (3.41) zatem ma następującą postać:

$$\left(\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\omega^2 \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) [u_i, u_k]^t = \{0\},$$

natomiast warunek brzegowy $u_i = 0$ redukuje ten układ do drugiego z równań, a nałożone na to drugie równanie kryterium (3.42) wtedy mówi, że

$$\frac{EA}{l} - \omega^2 \frac{\rho Al}{3} = 0, \text{ lub że } \omega = \sqrt{\frac{3E}{\rho l^2}} = 1,732 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}.$$

Wynik ścisły dla pręta, jak w rozpatrywanym przykładzie, to

$$\omega = 1,571 \sqrt{E/\rho l^2}.$$

Wariant pierwszy, przypadek masy skupionej ($[M_0] \neq 0, [M_q] = 0$, Rys. 3.8b).

W tym przypadku macierz sztywności $[K]$ elementu skończonego pozostaje bez zmian, natomiast zamienimy macierze masy $[M_q]$ na

$$[M_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_k \end{bmatrix}$$

Notując, że $m_k = \rho Al$ wprowadzimy dodatkowe oznaczenie $k = EA/l$. Identyczne jak w przypadku masy rozłożonej postępowanie zamieni nam rezultat (a) na następujący

$$\frac{EA}{l} - \omega^2 \rho Al = 0, \text{ albo } k - \omega^2 m_k = 0, \text{ oraz że } \omega = \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} \text{ lub } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_k}} \quad (\text{b})$$

co dla tego przypadku (sprężyny o podatności k z podwieszoną masą m) jest wynikiem ścisłym.

Wariant drugi, przypadek masy rozłożonej ($[M_0] = 0, [M_q] \neq 0$, Rys. 3.8c).

Charakterystyki obu elementów skończonych w tym przypadku są identyczne, lecz teraz pierwszym zadaniem jest utworzenie charakterystyki układu dwu elementów. Zsumowanie tych charakterystyk przynosi macierze sztywności i masy tego układu i zmienia równanie (3.41) w następujący sposób:

$$\left(\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) [u_i, u_k, u_l]^t = \{0\}$$

a po wprowadzeniu warunku brzegowego $u_i = 0$ do postaci końcowej:

$$\left(\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u_k, u_l \right) = \{0\}.$$

Po oznaczeniu $\xi = \omega^2 \rho A l_e^2 / 6E$ kryterium (3.42) można zapisać jako wartość wyznacznika

$$\det \begin{vmatrix} 2 - 4\xi & -1 - \xi \\ -1 - \xi & 1 - 2\xi \end{vmatrix} = 0, \text{ lub jako równanie } 7\xi^2 - 10\xi + 1 = 0 \quad (c)$$

z pierwiastkami $\xi_1 \cong 0,11$ i $\xi_2 \cong 1,32$. To oznacza, że rozpatrywany układ dwu elementów skończonych ma dwie częstości drgań własnych

$$\omega_1 = \left(\frac{6\xi_1}{\rho A l_e} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,806 \frac{\left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}{l_e} = 1,612 \frac{\left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}{l},$$

$$\omega_2 = \left(\frac{6\xi_2}{\rho A l_e} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2,815 \frac{\left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}{l_e} = 5,630 \frac{\left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}{l}.$$

Wariant drugi, przypadek masy skupionej ($[Mo] \neq 0$, $[Mq] = 0$, Rys. 3.8d).

Macierz masy w tym przypadku będzie odpowiadać założeniu o skupieniu masy w węzłach k i j , mamy więc teraz:

$$[M_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & m_l \end{bmatrix}.$$

Po zanotowaniu, że $m_k = m_l = m_e = \rho A l_e$, oznaczeniu $k_e = EA/l_e$ i $\xi = \omega^2 m_e / k_e$, oraz po przeprowadzonych jak w poprzedzającym przypadku przekształceniach dojdziemy do kryterium (3.42) w następującej postaci:

$$\det \begin{vmatrix} 2 - \xi & -1 \\ -1 & 1 - \xi \end{vmatrix} = 0$$

a w konsekwencji do równania

$$\xi^2 - 3\xi + 1 = 0 \quad (d)$$

z pierwiastkami $\xi_1 = 0,382$ i $\xi_2 = 2,618$. Otrzymujemy stąd, że

$$\omega_1 == 0,618 \left(\frac{k_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 == 1,618 \left(\frac{k_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Przykład 3.7. Częstości drgań własnych zginanego pręta pryzmatycznego

Dodatkowo ilustrując rozwiązanie zagadnienia drgań własnych użyjemy przykładu zginanego pręta pryzmatycznego (belki) i modelującego go – dwuwęzłowego, z czterema wielkościami węzłowymi elementu skończonego, opisanego w wariantach na Rys. 3.9. W tym przykładzie przyjęte zostały następujące oznaczenia:

- wariant z rysunku 3.9 a,b $e = 1$ – numer (i liczba) elementu, $r = i, k$ – numery węzłów; $u_{2i} = 0, \varphi_i = 0, u_{2k}, \varphi_k$ – węzłowe przemieszczenia i kąty ugięcia; $l = x_k - x_i$ – długość elementu; $m_k = \rho Al$ – masa skupiona w węźle k ;
- wariant z rysunku 3.9 c,d $e = 1, 2$ – numery obu elementów skończonych, $r = i, k, l$ – numery węzłów, przy czym k jest węzłem wspólnym elementów; $u_{2i} = 0, \varphi_i = 0, u_{2k}, \varphi_k, u_{2l} = 0, \varphi_{2l} = 0$ – węzłowe przemieszczenia i kąty ugięcia; $l_e = x_k - x_i = x_l - x_k = \frac{l}{2}$ – długości elementów; $m_k = \rho Al$ – masa skupiona w węźle k .

Zadane w obu wariantach są: A – jego stały na długości przekrój poprzeczny elementów; J – stały na długości elementów skończonych osiowy moment bezwładności ich przekroju o wektorze prostopadłym do płaszczyzny Ox_1x_2 ; E – stały na długości moduł sprężystości podłużnej materiału elementów skończonych; ρ – gęstość tego materiału.

Znana jest charakterystyka zastosowanego elementu skończonego (por. Przykład 3.2, Tabl. Z.4 w Załączniku), w tym znane są macierze sztywności i masy.

W obu wariantach częstości drgań własnych w celach porównawczych określone zostaną osobno dla naturalnego przypadku masy rozłożonej wzdłuż długości elementu skończonego i dla przypadku masy skupionej w węzłach elementu.

Podstawą obliczeń są równania (3.40), (3.41) i kryterium (3.42). Przykład ten podstawą obliczeń, ich przebiegiem i wariantami założeń jest uderzająco podobny do przykładu 3.6. Jednak dotyczy drgań giętnych, poprzecznych, do opisu których potrzebne są elementy skończone o bardziej złożonych charakterystykach. Nie będą zatem powtarzane wyprowadzenia równań charakterystycznych, będą natomiast zestawione końcowe postaci równań z rozwiązaniami.

Wariant pierwszy, przypadek masy rozłożonej ($[M_0] = 0, [M_q] \neq 0$, rys. 3.9a)

Równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{vmatrix} 6 - 156\xi, & -3l + 22l\xi \\ -3l + 22l\xi, & 2l^2 - 4l^2\xi \end{vmatrix} = 0 \text{ lub } 140\xi^2 - 204\xi + 3 = 0, \text{ gdzie } \xi = \omega^2 \frac{\rho Al^4}{840EJ}.$$

Częstości drgań własnych:

$$\omega_1 = \frac{3,533}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, \quad \omega_2 = \frac{34,81}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}},$$

natomiast wartość teoretyczna wynosi $\omega = 3,52/l^2 \sqrt{(EJ/\rho A)}$.

Wariant pierwszy, przypadek masy skupionej ($[M_o] \neq 0, [M_q] = 0$, Rys. 3.9b)

Równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{vmatrix} 6 - \xi & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ lub } 2\xi - 3 = 0,$$

gdzie $\xi = \omega^2 \frac{\rho A l^4}{2EJ}$. Częstość drgań własnych (wynik zgodny ze ścisłym):

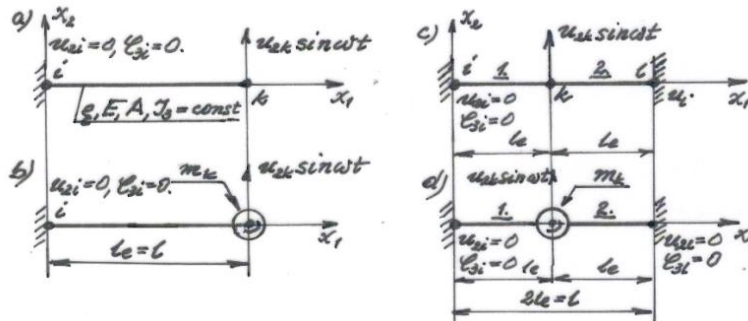
$$\omega = \frac{1,732}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}.$$

Wariant drugi, przypadek masy rozłożonej ($[M_o] = 0, [M_q] \neq 0$, Rys. 3.9c)

Równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{vmatrix} 12 - 312\xi & 0 \\ 0 & 4l_e^2 - 8l_e^2\xi \end{vmatrix} = 0 \text{ lub } (12 - 312\xi)(4l_e^2 - 8l_e^2\xi) = 0,$$

gdzie $\xi = \omega^2 \frac{\rho A l^4}{840EJ}$.



Rys. 3.9. Założenia modelowe co do rozłożenia mas (Rys. Rys. a,c lub b,d) i co do liczby elementów skończonych (Rys. Rys. a,c) giętnie drgającego pręta pryzmatycznego

Częstości drgań własnych:

$$\omega_1 = 7,190 \frac{\left(\frac{EJ}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}}{l^2}, \quad \omega_2 = 81,976 \frac{\left(\frac{EJ}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}}{l^2},$$

natomiast wartość teoretyczna z powodu istotnych różnic modelowych odbiega od otrzymanego wyniku i wynosi $\omega_1 = 22,37/l^2 \sqrt{(EJ/\rho A)}$.

Wariant drugi, przypadek masy skupionej ($[M_o] \neq 0, [M_q] = 0$, Rys. 3.9d)

Równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{vmatrix} 12 - 2\xi, & 0 \\ 0, & 4l_e^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ lub } 12 - 2\xi = 0, \text{ gdzie } \xi = \frac{m_k l_e^3}{2EJ}.$$

Częstość drgań własnych:

$$\omega = \left(\frac{12EJ}{m_k l_e^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{6EJ}{0A} \right)^{\frac{1}{2}}}{l_e^2} = 4 \frac{\left(\frac{6EJ}{0A} \right)^{\frac{1}{2}}}{l^2} = 9,798 \frac{\left(\frac{EJ}{0A} \right)^{\frac{1}{2}}}{l^2}$$

i jest to wynik odbiegający z podobnych powodów od teoretycznego.

Zagadnienia praktyczne rozwiązań metodą przemieszczeń MES

Uwzględnianie warunków brzegowych

Zbiór przemieszczeń punktów rozpatrywanego continuum materialnego można uporządkować według warunków brzegowych następująco

$$\{u\} = [\{u_0\}, \{u_p\}, \{u_z\}, \{u_n\}]^t \quad (3.57)$$

gdzie $\{u_0\} = \{0\}$ to podzbiór przemieszczeń zerowych (danych z warunków podparcia continuum lub z warunków jego symetrii), $\{u_p\}$ – podzbiór przemieszczeń niezerowych (danych lub założonych przy zachodzeniu w rozpatrywanym przypadku kinematycznego wymuszenia stanu naprężeń), $\{u_z\}$ – podzbiór przemieszczeń zależnych (wynikających np. z warunków ciągłości przy celowych podziałach obszaru continuum lub ze wzajemnego oddziaływania różnych obiektów fizycznych modelowanych jako continuum), $\{u_n\}$ – podzbiór przemieszczeń niezależnych (głównych niewiadomych problemu).

Sposób, uwzględnienia warunków brzegowych funkcji przemieszczeń w ilustracyjnie dostatecznym stopniu ujawni przykład algorytmu rozwiązywania zagadnień statyki, w których równanie stanu obiektu materialnego ogranicza się do postaci:

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (3.58)$$

Jeśli w tym macierzowym równaniu, w istocie pasmową macierz współczynników sztywności $[K]$ podzielimy na podmacierze odpowiadające wyżej zdefiniowanym podzbiорom przemieszczeń i podobnie postąpimy z wektorem obciążeń węzłowych $\{P\}$, to przekształci się ono do postaci:

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{op} & K_{oz} & K_{on} \\ K_{op}^t & K_{pp} & K_{pz} & K_{pn} \\ K_{oz}^t & K_{pz}^t & K_{zz} & K_{zn} \\ K_{on}^t & K_{pn}^t & K_{zn}^t & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_p \\ u_z \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_o \\ R_p \\ P_z \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Trzeba w tym miejscu zauważyć, że $\{R_o\}$ i $\{R_p\}$ są to węzłowe bierne obciążenia (reakcje), wynikające z więzów obszaru obiektu, jakimi są dane lub zadane przemieszczenia tych samych węzłów oraz, że te zbiory reakcji są dodatkowymi, podrzędnymi niewiadomymi rozpatrywanego problemu. Obydwa pozostałe podzbiory węzłowych sił $\{P_z\}$ i $\{P_n\}$, to w istocie, sprowadzone w myśl metody przemieszczeń do sił węzłowych, czynne obciążenia zewnętrzne. W węzłach zastąpionego elementami skończonymi obszaru, którym narzucony byłby warunek ciągłości przemieszczeń i równocześnie, w których nie występują czynne obciążenia, to ponadto $\{P_z\} = \{0\}$, co wynika z warunków równowagi tych węzłów (dalej będzie o tym jeszcze mowa). Jeśli w rozpatrywanym problemie występuje niezerowy podzbiór przemieszczeń $\{u_p\}$, to w szczególnym przypadku może być $\{P_n\} = \{0\}$. W przeciwnym przypadku, tj. przy braku kinematycznego wymuszenia deformacji continuum, podzbiór $\{P_n\}$ musi być niezerowy. Procedura poprawnego rozwiązania podjętego problemu polegać, więc będzie na stopniowej eliminacji niewiadomych zależnych (reakcji) i przebiegać w kilku fazach. Po podstawieniu do równania statyki rozpatrywanego obiektu $\{u_o\} = \{0\}$ w pierwszej fazie wyeliminujemy podzbiór reakcji w tych właśnie unieruchomionych węzłach:

$$\{R_o\} = [K_{op}]\{u_p\} + [K_{oz}]\{u_z\} + [K_{on}]\{u_n\} \quad (3.60)$$

Po tej eliminacji zbiór równań stanu continuum przyjmie zredukowaną postać:

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pz} & K_{pn} \\ K_{pz}^t & K_{zz} & K_{zn} \\ K_{pn}^t & K_{zn}^t & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_z \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_p \\ P_z \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

W drugiej fazie należy podobnie wyeliminować podzbiór reakcji w węzłach o zadanych, niezerowych przemieszczeniach $\{u_p\}$, czyli:

$$\{R_p\} = [K_{pp}]\{u_p\} + [K_{pz}]\{u_z\} + [K_{pn}]\{u_n\} \quad (3.62)$$

Wartości pozostałych niewiadomych problemu $\{u_z\}$ i $\{u_n\}$ po tej fazie eliminacji wiąże zatem następujący układ dwu równań

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zn} \\ K_{zn}^t & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_z\} - [K_{pz}]^t \{u_p\} \\ \{P_n\} - [K_{pn}]^t \{u_p\} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Z pierwszego z tych równań po macierzowych przekształceniach

$$[K_{zz}]\{u_z\} = \{P_z\} - [K_{pz}]^t \{u_p\} - [K_{zn}]\{u_n\}$$

otrzymamy:

$$\{u_z\} = [K_{zz}]^{-1} \{P_z\} - [K_{zz}]^{-1} [K_{pz}]^t \{u_p\} - [K_{zz}]^{-1} [K_{zn}]\{u_n\} \quad (3.64)$$

Po wstawieniu do drugiego z równań (3.63) otrzymanej niewiadomej $\{u_z\}$ i po podobnych przekształceniach otrzymamy podstawowe, najbardziej zredukowane równanie metody przemieszczeń w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} ([K_{nn}] - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} [K_{zn}])\{u_n\} &= \{P_n\} - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} \{P_z\} - \\ &\quad \left([K_{pn}]^t - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} [K_{pn}]^t \right) \{u_p\} \end{aligned} \quad (3.65a)$$

$$\text{lub skróconej:} \quad [K_{nn}^*]\{u_n\} = \{P_n^*\} \quad (3.65b)$$

$$\text{gdzie} \quad [K_{nn}^*] = [K_{nn}] - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} [K_{zn}],$$

$$\{P_n^*\} = \{P_n\} - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} \{P_z\} - \left([K_{pn}]^t - [K_{zn}]^t [K_{zz}]^{-1} [K_{pn}]^t \right) \{u_p\}.$$

Rozwiązanie, czyli wyznaczenie głównych niewiadomych problemu wymaga odwrócenia zredukowanej macierzy sztywności $[K_{nn}^*]$. Jeśli ona i podmacierz $[K_{zz}]$ są dodatnio określone, to:

$$\{u_n\} = [K_{nn}^*]^{-1} \{P_n^*\} \quad (3.66)$$

oraz

$$\{u_z\} = [K_{zz}]^{-1} \{P_z\} - [K_{zz}]^{-1} [K_{pz}]^t \{u_p\} - [K_{zz}]^{-1} [K_{zn}][K_{nn}^*]^{-1} \{P_n^*\} \quad (3.67)$$

Następnie, po podstawieniu tych przemieszczeń do wyżej wyznaczonych odpowiednich zależności (3.60) i (3.62), określimy podzbiory $\{R_o\}$ i $\{R_p\}$.

Każdy problem techniczny, w którym metoda przemieszczeń znalazła efektywne zastosowanie (tj. wyznaczone zostały węzłowe przemieszczenia zastąpionych elementami skończonymi i tak badanego obiektu technicznego), koń-

czy wyznaczenie pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w całym obszarze obiektu wg zasady (3.22), czyli, że:

$$\{w(x)\} = [N(x)]\{u\}; \quad \{\varepsilon\} = [B(x)]\{u\}; \quad \{\sigma\} = [D\sigma][B(x)]\{u\} \quad (3.68)$$

Na tej podstawie badane mogą być w końcowej fazie np. pola wyężenia materiału continuum, trajektorie maksymalnych i minimalnych naprężeń głównych czy maksymalnych naprężeń stycznych. W ogólnym przypadku (zagadnienia dynamiki obiektu) metoda przemieszczeń oprócz przemieszczeń węzłowych, pozwala wyznaczyć prędkości i przyspieszenia węzłów, a następnie podobne (jak w statyce) pola także zależnych o czasu pochodnych wielkości.

Zmiany stanu obiektu materialnego wymuszane kinematycznie

Tę możliwość można traktować jako szczególny przypadek przedstawionego sposobu uwzględniania warunków brzegowych. Przedstawimy ją zatem wykorzystując zademonstrowany wyżej algorytm i te same założenia główne, z tym że dla uproszczenia zbiór przemieszczeń węzłowych wyrazimy tylko trzema podzbiorami $\{u_o\} = \{0\}$, $\{u_p\}$ i $\{u_n\}$. Wymuszające deformację i zmiany pól naprężeń w obszarze materialnym badanego obiektu są przemieszczenia $\{u_p\}$. Na początek przyjmujemy jednak możliwość równoczesnego wystąpienia, także wymuszających deformację i zmiany pól naprężeń, obciążeń zewnętrznych $\{P_n\} = \{R\}$ węzłów innych niż te, w których zadane są przemieszczenia u_o lub u_p . Innymi słowy, przy zachowaniu tych samych indeksów równanie stanu obiektu w tym zagadnieniu powstanie przez wykreślenie trzeciego wiersza w macierzach sztywności, przemieszczeń i sił oraz trzeciej kolumny w macierzy sztywności z równania (3.59) poprzedniego zagadnienia. Procedura redukcji tak otrzymanego nowego równania stanu jest identyczna i doprowadzi w rezultacie do określenia niewiadomych zagadnienia:

$$\begin{aligned} \{R_o\} &= [K_{op}]\{u_p\} + [K_{on}]\{u_n\}; \quad \{R_p\} = [K_{pp}]\{u_p\} + [K_{pn}]\{u_n\}, \\ \{u_n\} &= [K_{nn}]^{-1} \left(\{R\} - [K_{pn}]^t \{u_p\} \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

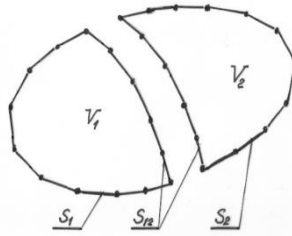
W szczególnym przypadku czystego (przy $\{R\} = \{0\}$), kinematycznego wymuszenia deformacji continuum tym samym sposobem otrzymamy:

$$\{u_n\} = -[K_{nn}]^{-1} [K_{pn}]^t \{u_p\},$$

$$\{R_o\} = ([K_{op}] - [K_{on}][K_{nn}]^{-1}[K_{pn}]^t)\{u_p\}, \quad (3.70)$$

$$\{R_p\} = ([K_{pp}] - [K_{pn}][K_{nn}]^{-1}[K_{pn}]^t)\{u_p\}$$

Redukcja liczby równań stanu obiektu materialnego przez jego podział na podobszary (superelementy)



Rys. 3.10. Obszar obiektu zastąpiony dwoma podobszarami

W praktyce zastosowań MES, już na etapie przygotowań siatki podziału badanego obiektu materialnego na elementy skończone, zwłaszcza ze względu na problemy numerycznej dokładności, może być konieczny podział obszaru tego obiektu na podobszary. Ma to miejsce wtedy, gdy badany obiekt materialny jest niehomogeniczny własnościami materialnymi, albo nieregularny wymiarowo. Problemy dokładności obliczeń wywołują np. nieproporcjonalnie wydłużone i bliskie utraty wypukłości elementy skończone, które mogą wystąpić podczas badania długich obiektów. Ilustrując sens postępowania zaradczego rozważmy pewien obiekt materialny (techniczny), którego obszar V podzielony został na podobszary V_1 i V_2 (por. Rys. 3.10).

Na początek rozważmy stan każdego z osobna z obranych podobszarów, poczynając od podobszaru pierwszego. Stan tego podobszaru V_1 niech wyrażają sformułowane wg metody przemieszczeń MES następujące równania (dla uproszczenia ponownie jest to równanie równowagi statycznej, zachowujące podobieństwo do równań z dwu poprzednich zagadnień, ale dla prostoty wywodu z jeszcze bardziej ogólnym podziałem zbiorów przemieszczeń, sił i macierzy sztywności):

$$\begin{aligned} [K_{nn}]_1\{u_n\}_1 + [K_{nz}]_1\{u_z\}_1 &= \{P_n\}_1, \\ [K_{zn}]_1\{u_n\}_1 + [K_{zz}]_1\{u_z\}_1 &= \{P_z\}_1 \end{aligned} \quad (3.71)$$

gdzie $\{u_n\}_1, \{P_n\}_1$ są przemieszczeniami i zewnętrznymi obciążeniami węzłów podobszaru z wyjątkiem węzłów leżących na wspólnej powierzchni (S_{12}) podziału i przynależnych do tego podobszaru; $\{u_z\}_1$ i $\{P_z\}_1$ są odpowiednio przemieszczeniami i zewnętrznymi obciążeniami właśnie węzłów z tej powierzchni tego podobszaru.

Stan drugiego podobszaru niech wyraża, ważne w V_2 , analogiczne równanie:

$$\begin{aligned} [K_{zz}]_2 \{u_z\}_2 + [K_{zn}]_2 \{u_n\}_2 &= \{P_z\}_2, \\ [K_{nz}]_2 \{u_z\}_2 + [K_{nn}]_2 \{u_n\}_2 &= \{P_n\}_2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

gdzie $\{u_n\}_2$ i $\{P_n\}_2$ są przemieszczeniami i zewnętrznymi obciążeniami węzłów tego podobszaru z wyjątkiem węzłów leżących na powierzchni (S_{12}) separacji podobszarów; $\{u_z\}_2$ i $\{P_z\}_2$ są przemieszczeniami i zewnętrznymi obciążeniami węzłów z tej powierzchni tego podobszaru.

Zależne przemieszczenia i obciążenia węzłów obu podobszarów leżące na wspólnej powierzchni S_{12} spełniają następujące warunki odpowiednio ciągłości i równowagi:

$$\begin{aligned} \{u_z\} &= \{u_z\}_1 = \{u_z\}_2, \\ \{P_z\} &= \{P_z\}_1 = -\{P_z\}_2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Wprowadzając te warunki do równań stanu obu podobszarów odpowiednio w rezultacie otrzymujemy w podobszarze V_1 :

$$\begin{aligned} [K_{nn}]_1 \{u_n\}_1 + [K_{nz}]_1 \{u_z\} &= \{P_n\}_1, \\ [K_{zn}]_1 \{u_n\}_1 + [K_{zz}]_1 \{u_z\} - \{P_z\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.74a)$$

oraz w podobszarze V_2 :

$$\begin{aligned} [K_{zz}]_2 \{u_z\} + \{P_z\} + [K_{zn}]_2 \{u_n\}_2 &= \{0\}, \\ [K_{nz}]_2 \{u_z\} + [K_{nn}]_2 \{u_n\}_2 &= \{P_n\}_2 \end{aligned} \quad (3.74b)$$

Równania te potraktowane łącznie obowiązują w całym obszarze V i są zbiorem jego równań stanu. Nowe niewiadome zagadnienia $\{u_z\}$ i $\{P_z\}$ należy, jak reakcje w poprzednich zagadnieniach, wyeliminować i ten układ równań zredukować. Po analogicznych działaniach otrzymamy zatem:

$$\begin{aligned} \{P_z\} &= [K_{zn}]_1 \{u_n\}_1 + [K_{zz}]_1 \{u_z\}, \\ \{u_z\} &= -([K_{zz}]_1 + [K_{zz}]_2)^{-1} ([K_{zn}]_1 \{u_n\}_1 + [K_{zn}]_2 \{u_n\}_2) \end{aligned} \quad (3.75)$$

oraz podlegający po uwzględnieniu zadanych warunków brzegowych ostatecznemu rozwiązaniu względem podstawowych niewiadomych $\{u_n\}_1$ i $\{u_n\}_2$ zredukowany układ równań:

$$\begin{aligned} ([K_{nn}]_1 - [K_{nz}]_1[K_z]^{-1}[K_{zn}]_1)\{u_1\} - [K_{nz}]_1[K_{zz}]^{-1}[K_{zn}]_2\{u_n\}_2 &= \{P_n\}_1, \\ [K_{nz}]_2[K_{zz}]^{-1}[K_{zn}]_1\{u_n\}_1 + ([K_{nn}]_2 - [K_{nz}]_2[K_{zz}]^{-1}[K_{zn}]_2)\{u_n\}_2 &= \{P_n\}_2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

w którym

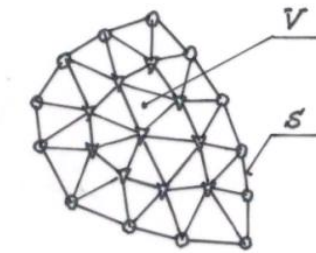
$$[K_{zz}] = [K_{zz}]_{-1} + [K_{zz}]_2.$$

Po tych przekształceniach otrzymujemy zmniejszony układ równań, oraz w rozwiązaniu problemu gwarancję ścisłego zachowania ciągłości przemieszczeń i zrównoważenia sił na powierzchniach wspólnych podobszarów. W metodzie przemieszczeń MES, jak wiadomo i warto zauważyć, elementy skończone zachowanie warunków ciągłości gwarantują tylko w węzłach.

Ta idea numeryczna jest skuteczna w przypadkach prawidłowej (powierzchnia S_{12} tworzona jest zwykle w strefie zagrożenia numerycznej dokładności rozwiązania) separacji części badanego obszaru, może być przy tym zastosowana przy konieczności podziału obszaru obiektu materialnego na większą niż dwa podobszary. Jest odpowiednio wykorzystywana w rozwiązaniach MES problemów mechaniki kontaktu.

Obniżaniu trudności numerycznych i liczby równań służy stosowanie *superelementów*. To zaś ponownie sprowadza się do wyrugowania drogą dekompozycji z układu równań równowagi (przyjmijmy: równań równowagi uwzględniających występujące warunki brzegowe), w tym przypadku, równań związanych z węzłami wewnętrznymi.

Stan pokazanego na rysunku 3.11 i zastąpionego elementami skończonymi podobszaru V z powierzchnią ograniczającą S niech wyrażają sformułowane wg metody przemieszczeń MES następujące równania:



Rys. 3.11. Superelement z zaznaczonymi podrzędnymi węzłami wewnętrznymi (▼) i z nadrzędnymi węzłami zewnętrznymi (○)

$$\begin{aligned} [K_{ss}]\{u_s\} + [K_{sv}]\{u_v\} &= \{P_s\} + \{Q_s\}, \\ [K_{vs}]\{u_s\} + [K_{vv}]\{u_v\} &= \{P_v\} + \{Q_v\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

gdzie $\{u_s\}$, $\{P_s\}$ i $\{Q_s\}$ są odpowiednio przemieszczeniami, zewnętrznymi i objętościowymi obciążeniami leżącymi na powierzchni S węzłów podobszaru; $\{u_v\}$, $\{P_v\}$ i $\{Q_v\}$ są odpowiednio przemieszczeniami, zewnętrznymi i objętościowymi obciążeniami pozostałych, wewnętrznych węzłów tego podobszaru. Odpowiednio do wyselekcjonowanych grup węzłowych przemieszczeń i obciążeń oznaczone zostały zdekomponowane części macierzy sztywności. Liczbę równań układu (3.77) obniżymy traktując równania związane z węzłami wewnętrznymi jako podrzędne i zależne od nadrzędnej grupy niewiadomych $\{u_s\}$. Jeśli np. $\{P_v\} = \{0\}$, wtedy to uzależnienie zapewnimy następującą eliminacją:

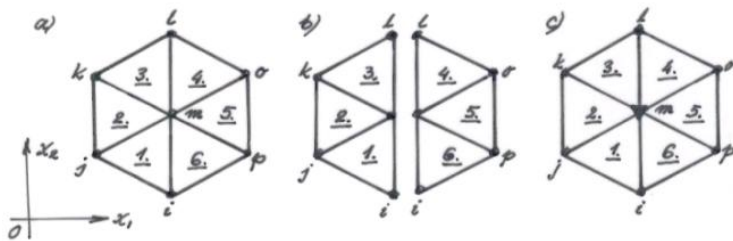
$$\{u_v\} = -[K_{vv}]^{-1}[K_{vs}]\{u_s\} + [K_{vv}]^{-1}\{Q_v\} \quad (3.78)$$

Układ równań (3.77) zmniejsza się wtedy do swej pierwszej części, która po wprowadzeniu (3.78) przyjmie postać:

$$([K_{ss}] - [K_{sv}][K_{vv}]^{-1}[K_{vs}])\{u_s\} = \{P_s\} + \{Q_s\} - [K_{sv}][K_{vv}]^{-1}\{Q_v\} \quad (3.79)$$

którą można nazwać charakterystyką superelementu.

Jest to dość radykalna redukcja liczby równań, gdyż liczba węzłów wewnętrznych przeważa (zwłaszcza w geometrycznie dużych obszarach) liczbę węzłów leżących na powierzchni ograniczającej. Rozwiązanie zagadnienia, w którym zastosowane byłyby superelementy, rozkłada się na dwa prostsze numerycznie etapy: pierwszy, polegający na wyznaczeniu z (3.79) nadrzędnych niewiadomych $\{u_s\}$ oraz drugi, polegający na obliczeniu na podstawie (3.78) podrzędnych w tej koncepcji niewiadomych $\{u_v\}$.



Rys. 3.12. Założenia modelowe wybranego układu elementów skończonych (rys. a), jego podziału na podukłady (rys. b) oraz superelementu (rys. c)

Przykład 3.8. Charakterystyka sztywności podobszaru i superelementu

Dane jest geometryczne przybliżenie pewnego fizycznego obszaru rozeta sześciu płaskich trójkątnych elementów skończonych (por. Rys. 3.12a). Znana jest statyczna charakterystyka każdego z tych elementów o podobnej postaci macierzy sztywności wymiaru 6×6 (por. Tabl. Z.6 w Załączniku):

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{qq}] & [K_{qr}] & [K_{qs}] \\ [K_{rq}] & [K_{rr}] & [K_{rs}] \\ [K_{sq}] & [K_{sr}] & [K_{ss}] \end{bmatrix},$$

przy czym podmacierze sztywności są wymiaru 2×2 , odpowiednio do dwukierunkowych składników wektorów przemieszczeń $\{u\} = [u_q, u_r, u_s]^t$ i sił węzłowych $\{P\} = [P_q, P_r, P_s]^t$ opisanych w układzie współrzędnych $0x_1x_2$; q, r, s są numerami węzłów elementów skończonych. Numery elementów skończonych: 1,2,3,4,5,6.

W przykładzie określimy charakterystyki statyczne wyodrębnionych jak na Rysunku 3.12b podobszarów rozpatrywanego układu elementów skończonych, efekt zastąpienia obszaru (Rys. 3.12a) dwoma podobszarami oraz podobną charakterystykę obszaru potraktowanego jako superelement skończony (Rys. 3.12c).

Charakterystyka podobszaru złożonego z 1,2 i 3 elementu skończonego

Upraszczające zapis założenie: w macierzy elementu pierwszego (o węzłach $q = i, r = j, s = m$) symbol współczynników sztywności K zastąpiony zostaje przez A ; w macierzy elementu drugiego (o węzłach $q = j, r = k, s = m$) symbol K zastąpiony zostaje przez B ; w macierzy elementu trzeciego (o węzłach $q = k, r = l, s = m$) symbol K zastąpiony zostaje przez C .

Po rozwinięciu (odpowiednio do liczby węzłów podobszaru – por. Przykład 3.4) wektorów przemieszczeń $\{u\} = [u_i, u_j, u_k, u_l, u_m]^t$ i sił węzłowych $\{P\} = [P_i, P_j, P_k, P_l, P_m]^t$ oraz po przyporządkowaniu tym rozwinięciom składników macierzy sztywności poszczególnych elementów skończonych powstanie następująca macierz sztywności rozważanego podobszaru:

$$[K'] = \begin{bmatrix} [A_{ii}] & [A_{ij}] & [0] & [0] & [A_{im}] \\ [A_{ij}] & [A_{jj} + B_{jj}] & [B_{jk}] & [0] & [A_{jm} + B_{jm}] \\ [0] & [B_{kj}] & [B_{kk} + C_{kk}] & [C_{kl}] & [B_{km} + C_{km}] \\ [0] & [0] & [C_{lk}] & [C_{ll}] & [C_{lm}] \\ [A_{mi}] & [A_{mj} + B_{mj}] & [B_{mk} + C_{mk}] & [C_{ml}] & [A_{mm} + B_{mm} + C_{mm}] \end{bmatrix} \quad (a)$$

Węzły i, l, m leżą na powierzchni podziału obszaru, poza nią leżą węzły j, k . Gdyby na podstawie uzyskanej macierzy (a) trzeba było odtworzyć

dekompozycję (3.71) i (3.72), czyli utworzyć macierze związane z grupami węzłów leżących na powierzchni podziału i poza nią, to dla rozważanego podobszaru otrzymalibyśmy:

$$\begin{bmatrix} [A_{jj} + B_{jj}] & [B_{jk}] \\ [B_{kj}] & [B_{kk} + C_{kk}] \end{bmatrix} [u_j, u_k]^t + \\ + \begin{bmatrix} [A_{ji}] & [0] & [A_{jm} + B_{jm}] \\ [0] & [C_{kl}] & [B_{km} + C_{km}] \end{bmatrix} [u_i, u_l, u_m]^t = [P_j, P_k]^t \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} [A_{ij}] & [0] \\ [0] & [C_{lk}] \end{bmatrix} [u_j, u_k]^t + \\ + \begin{bmatrix} [A_{ii}] & [0] & [A_{im}] \\ [0] & [C_{ll}] & [C_{lm}] \\ [A_{mi}] & [C_{ml}] & [A_{mm} + B_{mm} + C_{mm}] \end{bmatrix} [u_i, u_l, u_m]^t = [P_i, P_l, P_m]^t \quad (c)$$

Charakterystyka podobszaru złożonego z 4,5 i 6-go elementu skończonego

Upraszczając zapis założenie: w macierzy elementu czwartego (o węzłach $q = l, r = o, s = m$) symbol współczynników sztywności K zastąpiony zostaje przez D ; w macierzy elementu piątego (o węzłach $q = m, r = o, s = p$) symbol K zastąpiony zostaje przez E ; w macierzy elementu szóstego (o węzłach $q = i, r = m, s = p$) symbol K zastąpiony zostaje przez F .

Po rozwinięciu (odpowiednio do liczby węzłów podobszaru – por. Przykład 3.4) wektorów przemieszczeń $\{u\} = [u_i, u_l, u_m, u_o, u_p]^t$ i sił węzłowych $\{P\} = [P_i, P_j, P_m, P_o, P_p]^t$ oraz po przyporządkowaniu tym rozwinięciom składników macierzy sztywności poszczególnych elementów skończonych powstanie następująca macierz sztywności rozważanego podobszaru:

$$[K''] = \begin{bmatrix} [F_{ii}] & [0] & [F_{im}] & [0] & [F_{ip}] \\ [0] & [D_{ll}] & [D_{lm}] & [D_{lo}] & [0] \\ [F_{mi}] & [D_{ml}] & [D_{mm} + E_{mm} + F_{mm}] & [D_{mo} + E_{mo}] & [E_{mp} + F_{mp}] \\ [0] & [D_{ol}] & [D_{om} + E_{om}] & [D_{oo} + E_{oo}] & [E_{op}] \\ [F_{pi}] & [0] & [E_{pm} + F_{pm}] & [E_{po}] & [E_{pp} + F_{pp}] \end{bmatrix} \quad (d)$$

Do tego dodajmy zdekomponowane równania, odpowiedniki (b) i (c):

$$\begin{bmatrix} [F_{ii}] & [0] & [F_{im}] \\ [0] & [D_{ll}] & [D_{lm}] \\ [F_{mi}] & [D_{ml}] & [D_{mm} + E_{mm} + F_{mm}] \end{bmatrix} [u_i, u_l, u_m]^t +$$

$$\begin{bmatrix} [0] & [F_{ip}] \\ [D_{lo}] & [0] \\ [D_{mo} + E_{mo}] & [E_{mp} + F_{mp}] \end{bmatrix} [u_o, u_p]^t = [P_i, P_l, P_m]^t \quad (e)$$

$$\begin{bmatrix} [0] & [D_{ol}] & [D_{om} + E_{om}] \\ [F_{pi}] & [0] & [E_{pm} + F_{pm}] \end{bmatrix} [u_i, u_l, u_m]^t +$$

$$\begin{bmatrix} [D_{oo} + E_{oo}] & [E_{op}] \\ [E_{po}] & [E_{pp} + F_{pp}] \end{bmatrix} [u_o, u_p]^t = [P_o, P_p]^t \quad (f)$$

Charakterystyka obszaru jako układu podobszarów

Nadanie w rozważanym przykładzie identycznej – dla obu podobszarów – numeracji węzłom i, l, m leżącym na płaszczyźnie podziału w istocie oznacza spełnienie warunków (3.73). Dekompozycja (b), (c), (e) i (f) przygotowuje natomiast do eliminacji powstałych przez ten fakt równań zależnych (c) i (e). Eliminacja tych równań polega na wyznaczeniu np. z (e) wektora sił $[P_i, P_l, P_m]^t$ i podstawienia potem tej wartości do (c). Wynik podstawienia:

$$\begin{bmatrix} [A_{ij}] & [0] \\ [0] & [C_{lk}] \\ [A_{mj} + B_{mj}] & [B_{mk} + C_{mk}] \end{bmatrix} [u_j, u_k]^t + \begin{bmatrix} [0] & [F_{ip}] \\ [D_{lo}] & [0] \\ [D_{mo} + E_{mo}] & [E_{mp} + F_{mp}] \end{bmatrix} [u_o, u_p]^t +$$

$$+ \begin{bmatrix} [A_{ii} + F_{ii}] & [0] & [A_{im} + F_{im}] \\ [0] & [C_{ll} + D_{ll}] & [C_{lm} + D_{lm}] \\ [A_{mi} + F_{mi}] & [C_{ml} + D_{ml}] & [A_{mm} + B_{mm} + C_{mm} + D_{mm} + E_{mm} + F_{mm}] \end{bmatrix} [u_i, u_l, u_m]^t = \{0\} \quad (g)$$

pozwala z kolei wyznaczyć wektor przemieszczeń $[u_i, u_l, u_m]^t$. Podstawienie to kończy redukcję początkowego układu do przekształconych równań (b) i (f), czyli odpowiednika równań (3.76). Przekształcenia wg sekwencji podanej wzorami od (3.72) do (3.76) nie wnosząc nowych informacji zostały tu pominięte. Powyższe macierze łatwo już można utożsamić z oznaczonymi w cytowanych wzorach.

Charakterystyka superelementu

Przewodnią myślą tworzenia superelementu jest, jak poprzednio, redukcja liczby równań algebraicznych, w przybliżony sposób opisujących równania równowagi badanych obiektów technicznych. W tym przypadku redukcja ta polega na wyrugowaniu z układu równań związanych z węzłami wewnętrznymi. W rozpatrywanym przykładzie węzeł m pełni funkcję przedstawiciela wewnętrznych węzłów. Podstawą tej techniki jest dekompozycja typowej (o pełnowymiarowych macierzach) charakterystyki obszaru jako układu elementów skończonych (por. Rys. 3.11a), którą opisują wzory (3.77), (3.78) i (3.79). W omawianym przykładzie wektory przemieszczeń i sił węzłowych (pominie my siły $\{Q\}$ dla większej prostoty) należy pogrupować zgodnie z ww. koncepcją w podwektorach:

$$\begin{aligned}\{u_s\} &= [u_i, u_j, u_k, u_l, u_o, u_p]^t, \\ \{u_v\} &= \{u_m\}, \{P_s\} = [P_i, P_j, P_k, P_l, P_o, P_p]^t, \\ \{P\} &= \{P_m\} = \{0\}.\end{aligned}$$

Odpowiadające tym podwektorom podmacierze sztywności są następujące:

$$[K_{ss}] = \begin{bmatrix} [A_{ii} + F_{ii}] & [A_{ij}] & [0] & [0] & [0] & [F_{ip}] \\ [A_{ji}] & [A_{jj} + B_{jj}] & [B_{jk}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B_{kj}] & [B_{kk} + C_{kk}] & [C_{kl}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [C_{lk}] & [C_{ll} + D_{ll}] & [D_{lo}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [D_{ol}] & [D_{oo} + E_{oo}] & [E_{op}] \\ [F_{pi}] & [0] & [0] & [0] & [E_{po}] & [E_{pp} + F_{pp}] \end{bmatrix},$$

$$[K_{sv}] = [A_{im} + F_{im}, [A_{jm} + B_{jm}], [B_{km} + C_{km}], [C_{lm} + D_{lm}], [D_{om} + E_{om}], [E_{pm} + F_{pm}]]^t,$$

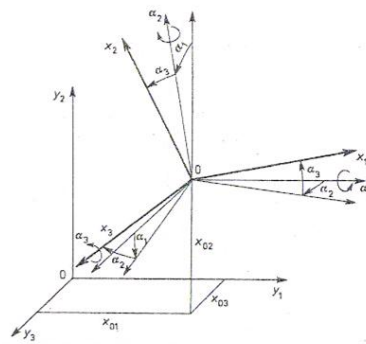
$$[K_{vs}] = [A_{mi} + F_{mi}, [A_{mj} + B_{mj}], [B_{mk} + C_{mk}], [C_{ml} + D_{ml}], [D_{mo} + E_{mo}], [E_{mp} + F_{mp}]],$$

$$[K_{vv}] = [A_{mm} + B_{mm} + C_{mm} + D_{mm} + E_{mm} + F_{mm}].$$

$$\{u_s\} = ([K_{ss}] - [K_{sv}][K_{vv}]^{-1}[K_{vs}])^{-1}\{P_s\},$$

$$\{u_v\} = -[K_{vv}]^{-1}[K_{vs}]([K_{ss}] - [K_{sv}][K_{vv}]^{-1}[K_{vs}])^{-1}\{P_s\}.$$

Transformacja współrzędnych i wielkości węzłowych oraz przekształcanie charakterystyk elementów skończonych



Rys. 3.13. Interpretacja składników macierzy współrzędnych układów lokalnych do układu globalnego (i odwrotnie)

Przyjmijmy, że niezmiennie położony w przestrzeni układ współrzędnych globalnych $0y_1y_2y_3$ i nie pokrywający się z nim układ współrzędnych lokalnych $0x_1x_2x_3$ są układami ortokartezjańskimi (Rys. 3.13). Jeśli wektor $\{y_0\} = [y_{01}, y_{02}, y_{03}]^t$ określa położenie początku układu współrzędnych lokalnych, a wektor $\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^t$ określa odpowiednio składowe kąty obrotu tego układu do aktualnego położenia, mierzone względem kolejno kierunków osi układu globalnego $0y_1, 0y_2$ i $0y_3$, to globalne współrzędne położenia dowolnego punktu, określonego wektorem $\{x\} = [x_1, x_2, x_3]^t$ w układzie współrzędnych lokalnych, wyznaczmy po następującej transformacji:

$$\{y\} = \{y_0\} + [T]\{x\} \quad (3.80)$$

gdzie $[T] = [T_1][T_2][T_3]$, $[T]^t[T] = [1]$,

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, [T_2] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, [T_3] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W przypadku transformacji wektorów wielkości węzłowych podobnie mamy:

$$\begin{aligned} \{u\}_y &= [T]\{u\}_x \text{ oraz } \{u\}_x = [T]^{-1}\{u\}_y, \\ \{P\}_y &= [T]\{P\}_x \text{ oraz } \{P\}_x = [T]^{-1}\{P\}_y \end{aligned} \quad (3.81)$$

Odpowiednio do tego w układzie globalnym zmienia się też przeniesiona z układu współrzędnych lokalnych charakterystyka elementu skończonego:

$$\{P\}_y = [K]_y\{u\}_y \quad (3.82)$$

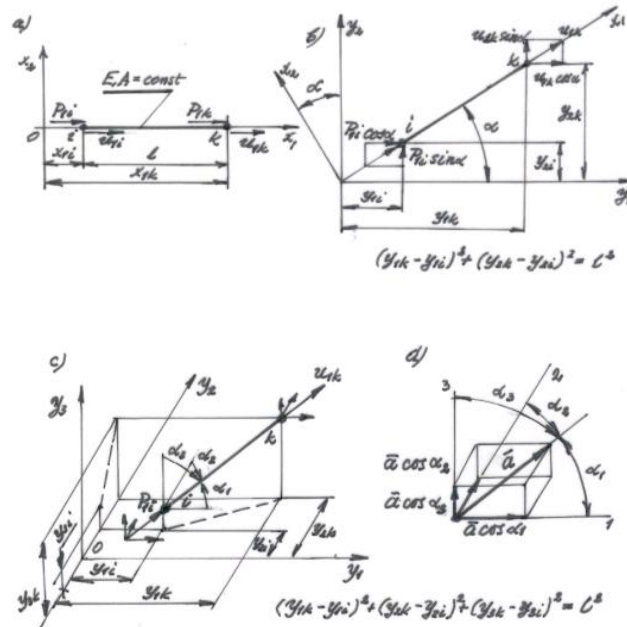
gdzie $[K]_y = [T][K]_x[T]^t$,

$$\{P\}_y = [T](\{P(\varepsilon_o)\}_x + \{P(\sigma_o)\}_x + \{P(g)\}_x + \{P(p)\}_x + \{P(Q)\}_x).$$

Przedstawione zasady transformacji użyte już były w przykładzie 3.4. Stosując modyfikacje definicji kątów wzajemnego odchylenia osi współrzędnych układów globalnego i lokalnego przećwiczmy to raz jeszcze w kolejnych przykładach.

Przykład 3.9. Przekształcenia liniowego elementu skończonego

Przekształcenie płaskie



Rys.3.14. Interpretacja przekształcenia charakterystyki liniowego elementu skończonego z jednowymiarowej (rys. a) w dwuwymiarową (płaską, rys. b) oraz w przestrzenną (rys. c,d)

Oznaczenia:

- liniowy element skończony opisany we współrzędnych $0x_1x_2$ (Rys. 3.14a):

$$\{u\}_x = [u_{1i}, u_{1k}]_x^t, \{P\}_x = [P_{1i}, P_{1k}]_x^t, [K]_x \{u\}_x = \{P\}_x,$$

- obrócony o kąt α względem pierwotnych współrzędnych $0x_1x_2$ ten sam liniowy element skończony i opisany we współrzędnych $0y_1y_2$ (Rys. 3.14b):

$$\{u\}_y = [T] \{u\}_x, \{P\}_y = [T] \{P\}_x, [K]_y \{u\}_y = \{P\}_y,$$

gdzie w tym przypadku

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Na tej podstawie znajdujemy nową, przekształconą charakterystykę elementu liniowego o postaci:

$$[K]_y = [T]^t [K]_x [T] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Przekształcenie przestrzenne

Oznaczenia:

- liniowy element skończony opisany we współrzędnych $0x_1x_2$ (Rys. 3.14a):

$$\{u\}_x = [u_{1i}, u_{1k}]_x^t, \quad \{P\}_x = [P_{1i}, P_{1k}]_x^t, \quad [K]_x \{u\}_x = \{P\}_x;$$

- ten sam liniowy element skończony odchylony o kąty α_j ($j = 1, 2, 3$) od osi współrzędnych $0y_1y_2y_3$ i w tych współrzędnych opisany (Rys. 3.14c, d):

$$\{u\}_y = [T] \{u\}_x, \quad \{P\}_y = [T] \{P\}_x, \quad [K]_y \{u\}_y = \{P\}_y$$

gdzie w tym jeszcze innym szczególnym przypadku określenia kątów przestrzennego położenia elementu

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Na tej podstawie podobnie mamy:

$$[K]_y = [T]^t [K]_x [T] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \\ & \cos^2 \alpha_2 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ & & \cos^2 \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 & -\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\cos^2 \alpha \\ (sym) & & & \cos^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \\ & & & & \cos^2 \alpha_2 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ & & & & & \cos^2 \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Uzyskane tym sposobem elementy skończone są przydatne w modelowaniu płaskich i przestrzennych ustrojów mechanicznych z prętami łączonymi przegubowo (kratownic).

Przykład 3.10. Przekształcenia rozszerzające charakterystyki elementów skończonych

Uogólniona charakterystyka liniowego elementu skończonego

Zbudujemy tę charakterystykę z czterech charakterystyk podstawowych liniowych elementów skończonych, kolejno od góry przedstawionych na rysunku 3.15, a także opisanych w Załączniku w tablicach Z.1, Z.3 i Z.4. Docelowy element skończony jest również elementem skończonym liniowym – przedstawia go ostatni (dolny) z rysunku 3.15. Uogólniona charakterystyka docelowego elementu ma odpowiadać najogólniejszemu przypadkowi dwunastoelementowych wektorów węzłowych, liniowych i kątowych przemieszczeń i dwunastoelementowych wektorów węzłowych sił i momentów. Procedura tej przebudowy charakterystyki liniowego elementu skończonego polegać będzie na odpowiednim złożeniu gotowych, bibliotecznych charakterystyk elementów skończonych, modelujących efekty sił podłużnych (por. pierwszy, górny z Rys. 3.15), momentów skręcających (por. drugi, następny z Rys. 3.15), sił poprzecznych i momentów zginających (por. trzeci z Rys. 3.15c) i podobnych sił poprzecznych i momentów zginających, lecz o kierunkach prostopadłych do poprzednich (por. czwarty z Rys. 3.15). Charakterystyka czwartego elementu skończonego z Rys. 3.15 jest przekształconą (przez zmianę przyporządkowania kierunków wielkości węzłowych) charakterystyką elementu trzeciego (określoną w Tabl. Z.4).

Oznaczenia pomocnicze:

- liniowy element skończony z rysunku 3.15a (Tabl. Z.1):

$$\{u\} = [u_{1i}, u_{1k}]^t, \{P\} = [P_{1i}, P_{1k}]^t,$$

macierz $[K]$ o składnikach $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ na tablicy 3.1 w schemacie tablicowym sygnalizowanych znakiem $\circ$;

- liniowy element skończony z rysunku 3.15b (Tabl. Z.3):

$$\{u\} = [\varphi_{1i}, \varphi_{1k}]^t, \{P\} = [M_{1i}, M_{1k}]^t,$$

macierz $[K]$ o składnikach $b_{11}, b_{12} = b_{21}, b_{22}$ na tablicy 3.2 w schemacie tablicowym sygnalizowanych znakiem $\boxtimes$;

- liniowy element skończony z rysunku 3.15c (Tabl. Z.4):

$$\{u\} = [u_{2i}, \varphi_{3i}, u_{2k}, \varphi_{3k}]^t, \{P\} = [P_{2i}, M_{3i}, P_{2k}, M_{3k}]^t,$$

macierz $[K]$ o składnikach

$$c_{11}, c_{12} = c_{21}, c_{13} = c_{31}, c_{14} = c_{41}, c_{22}, c_{23} = c_{32}, c_{24} = c_{42}, c_{33}, c_{34} = c_{43}, c_{44}$$

na tablicy 3.2 w schemacie tablicowym sygnalizowanych znakiem $\times$;

- liniowy element skończony z rys. 3.15d (Tabl. Z.4, po zmianie oznaczeń) :

$$\{u\} = [u_{3i}, \varphi_{2i}, u_{3k}, \varphi_{2k}]^t, \{P\} = [P_{3i}, M_{2i}, P_{3k}, M_{2k}]^t,$$

macierz $[K]$ o składnikach

$$d_{11}, d_{12} = d_{21}, d_{13} = d_{31}, d_{14} = d_{41}, d_{22}, d_{23} = d_{32}, d_{24} = d_{42}, d_{33}, d_{34} = d_{43}, d_{44}$$

na tablicy 3.2 w schemacie tablicowym sygnalizowanych znakiem Δ .

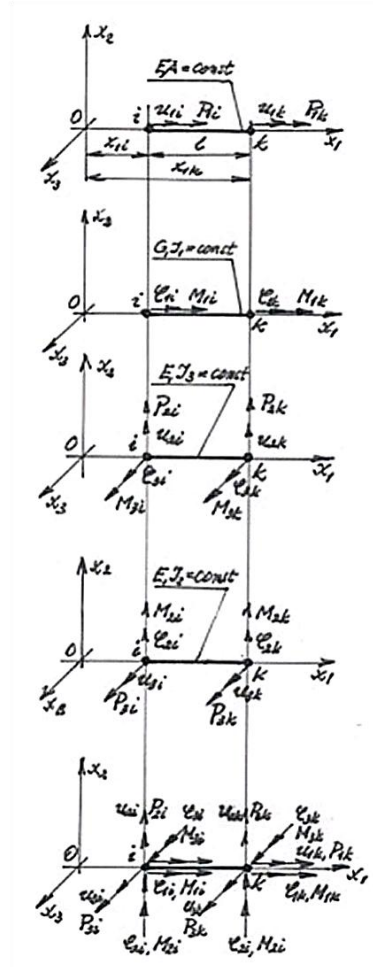
Tworzony w zadaniu nowy element skończony ma mieć następujące wektory wartości węzłowych:

$$\{u\} = [u_{li}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{li}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}, u_{lk}, u_{2k}, u_{3k}, \varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \varphi_{3k}]^t, \quad (a)$$

$$\{P\} = [P_{li}, P_{2i}, P_{3i}, M_{li}, M_{2i}, M_{3i}, P_{lk}, P_{2k}, P_{3k}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}]^t$$

Jego, znana z literatury macierz sztywności jest następująca (por. też Tabl. 3.3):

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EJ_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_3}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_3}{l^2} \\ & & \frac{12EJ_2}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_2}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_2}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_2}{l^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EJ_2}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_2}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_2}{l} & 0 \\ & & & & & \frac{4EJ_3}{l} & 0 & -\frac{12EJ_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_3}{l} \\ & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EJ_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_3}{l^2} \\ & & & & & & & & \frac{12EJ_2}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_2}{l^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EJ_2}{l} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EJ_3}{l} \end{bmatrix} \quad (b)$$



Rys. 3.15. Zasada superpozycji wielkości węzłowych liniowych elementów skończonych w celu uogólnienia ich charakterystyki

Tablica 3.1. Schemat rozwijania charakterystyki elementu liniowego i przenoszenia elementów pierwotnych macierzy sztywności elementu składowego do macierzy docelowego elementu skończonego na przykładzie pierwszego elementu. Przedstawiona (po rozwinięciu do postaci z dolnej części tablicy) macierz ma składniki niezerowe tylko te, które położeniem odpowiadają strukturze macierzy sztywności elementu wyjściowego (□). Położenie składników macierzy określają numery węzłów (NW), rodzaj wielkości węzłowych (WW) i kierunki składowych tych wielkości (KW). Ta i podobnie przedstawione macierze pozostałych elementów składowych mogą być do siebie dodawane

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} [u_{1i}, u_{1k}]^t = [P_{1i}, P_{1k}]^t,$$

↓

i	k		←	NW
u	u	←	WW	↓
1	1	KW	↓	
	□	1	u	i
□	□	1	u	k

↓

i	i	i	i	i	i	k	k	k	k	k	k		←	NW
u	u	u	φ	φ	φ	u	u	u	φ	φ	φ	←	WW	↓
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	KW	↓	
□	0	0	0	0	0	□	0	0	0	0	0	1	u	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	u	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	u	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	φ	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	φ	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	φ	i
□	0	0	0	0	0	□	0	0	0	0	0	1	u	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	u	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	u	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	φ	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	φ	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	φ	k

Tablica 3.2. Uporządkowane struktury pozostałych elementów składowych

i	k		$\leftarrow$	NW
φ	φ	$\leftarrow$	WW	$\downarrow$
1	1	KW	$\downarrow$	
$\times$	$\times$	1	φ	i
$\times$	$\times$	1	φ	k

i	i	k	k		$\leftarrow$	NW
u	φ	u	φ	$\leftarrow$	WW	$\downarrow$
2	3	2	3	KW	$\downarrow$	
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	2	u	i
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	3	φ	i
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	2	u	k
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	3	φ	k

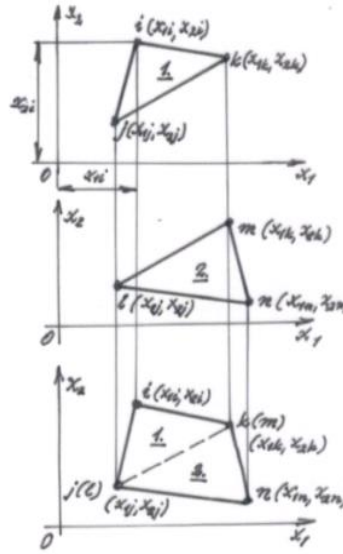
i	i	k	k		$\leftarrow$	NW
u	φ	u	φ	$\leftarrow$	WW	$\downarrow$
3	2	3	2	KW	$\downarrow$	
Δ	Δ	Δ	Δ	3	u	i
Δ	Δ	Δ	Δ	2	φ	i
Δ	Δ	Δ	Δ	3	u	k
Δ	Δ	Δ	Δ	2	φ	k

Tablica 3.3. Struktura niezerowych składników macierzy sztywności docelowego elementu skończonego.

i	i	i	i	i	i	k	k	k	k	k	k		$\leftarrow$	NW
u	u	u	φ	φ	φ	u	u	u	φ	φ	φ	$\leftarrow$	WW	$\downarrow$
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	KW	$\downarrow$	
$\boxtimes$						$\boxtimes$						1	u	i
	$\circ$				$\circ$		$\circ$				$\circ$	2	u	i
		Δ		Δ				Δ		Δ		3	u	i
			$\times$						$\times$			1	φ	i
		Δ		Δ				Δ		Δ		2	φ	i
	$\circ$				$\circ$		$\circ$				$\circ$	3	φ	i
$\boxtimes$						$\boxtimes$						1	u	k
	$\circ$				$\circ$		$\circ$				$\circ$	2	u	k
		Δ		Δ				Δ		Δ		3	u	k
			$\times$						$\times$			1	φ	k
		Δ		Δ				Δ		Δ		2	φ	k
	$\circ$				$\circ$		$\circ$					3	φ	k

Budowa płaskich wielobocznych elementów skończonych

Budowa elementu czworobocznego



Rys. 3.16 . Założenia do przekształcenia dwu trójkątnych elementów skończonych w czworoboczny element skończony

Zbudujemy teraz charakterystykę płaskiego czworobocznego elementu skończonego, opartą o charakterystykę trójkątnego elementu. Czworoboczny element skończony utworzą dwa elementy trójkątne (wieloboczne elementy skończone budować zaś można podobnie dodając kolejne trójkątne elementy skończone i to właśnie leży u podstaw przedstawionej w tej części przykładu – i na Rys. 3.16 – koncepcji). Identyczne charakterystyki użytych do tego celu trójkątnych elementów skończonych opisane są w Załączniku w tablicy Z.6. Charakterystyka docelowego elementu skończonego ma odpowiadać przypadkowi ośmioelementowych wektorów węzłowych przemieszczeń i sił. Procedura tej budowy polegać będzie - jak poprzednio - na odpowiednim złożeniu bibliotecznych charakterystyk dwu wyjściowych elementów skończonych.

Oznaczenia pomocnicze:

- trójkątny element skończony z węzłami i, j, k (por. górna część Rys. 3.16):

$$\{u\}_A = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}]_A^t, \{P\}_A = [P_{1i}, P_{2i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{1k}, P_{2k}]_A^t,$$

macierz sztywności $[K]_A$ o dwuelementowych składnikach

$$A_{ii}, A_{ij} = A_{ji}, A_{ik} = A_{ki}, A_{jj}, A_{jk} = A_{kj}, A_{kk};$$

- trójkątny element skończony z węzłami l, m, n (por. środkowa część Rys. 3.16):

$$\{u\}_B = [u_{1l}, u_{2l}, u_{1m}, u_{2m}, u_{1n}, u_{2n}]_B^t, \{P\}_B = [P_{1l}, P_{2l}, P_{1m}, P_{2m}, P_{1n}, P_{2n}]_B^t,$$

macierz $[K]_B$ o dwuelementowych składnikach

$$B_{ll}, B_{lm} = B_{ml}, B_{ln} = B_{nl}, B_{mm}, B_{mn} = B_{nm}, B_{nn}.$$

Założenia:

- współrzędne węzłów j, l oraz węzłów k, m są takie same (tzn., że $x_{1l} = x_{1j}, x_{2l} = x_{2j}, x_{1m} = x_{1k}, x_{2m} = x_{2k}$;
- wielkości węzłowe $\{u_l\} = \{u_j\}, \{u_m\} = \{u_k\}$;
- wskutek tego numery węzłów są zamienne i można numery l, m w opisie charakterystyki docelowego elementu skończonego zastąpić odpowiednio numerami j, k . Docelowy element skończony (por. dolna część Rys. 3.16) będzie miał zatem następujące wektory przemieszczeń i sił węzłowych:

$$\{u\} = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}, u_{1n}, u_{2n}]^t,$$

$$\{P\} = [P_{1i}, P_{2i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{1k}, P_{2k}, P_{1n}, P_{2n}]^t$$

i utrzyma zalety charakterystyki elementu trójkątnego (tj. stałe wartości odkształceń), a zbudowana wg schematu z tablic 3.1, 3.2 i 3.2 jego macierz sztywności

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} & K_{in} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk} & K_{jn} \\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk} & K_{kn} \\ K_{ni} & K_{nj} & K_{nk} & K_{nn} \end{bmatrix}$$

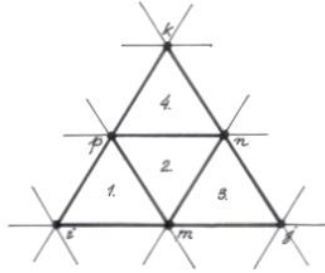
będzie miała następujące czteroelementowe składniki:

$$K_{ii} = A_{ii}, K_{ij} = K_{ji} = A_{ij}, K_{ik} = K_{ki} = A_{ik}, K_{in} = K_{ni} = 0, K_{jj} = A_{jj} + B_{ll}, K_{jk} = K_{kj}$$

$$= A_{jk} + B_{lm}, K_{jn} = K_{nj} = B_{ln}, K_{kk} = A_{kk} + B_{mm}, K_{kn} = K_{nk} = B_{mn}, K_{nn} = B_{nn}.$$

Budowa elementu trójkątnego sześciowęzłowego

Postępowanie przebiega identycznie jak w przypadku budowy elementu czworobocznego. Docelowy element przedstawia rysunek 3.17. Koncepcja budowy podobna jest też do koncepcji budowy superelementu.



Rys. 3.17. Założenia do przekształcenia czterech trójkątnych elementów skończonych w trójkątny sześciowzłowy element skończony

Oznaczenia pomocnicze:

- pierwszy składowy trójkątny element skończony z węzłami i, m, p :

$$\{u\}_A = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1m}, u_{2m}, u_{1p}, u_{2p}]_A^t, \{P\}_A = [P_{1i}, P_{2i}, P_{1m}, P_{2m}, P_{1p}, P_{2p}]_A^t,$$

macierz $[K]_A$ o dwuelementowych składnikach

$$A_{ii}, A_{im} = A_{mi}, A_{ip} = A_{pi}, A_{mm}, A_{mp} = A_{pm}, A_{pp};$$

- drugi składowy trójkątny element skończony z węzłami m, n, p :

$$\{u\}_B = [u_{1m}, u_{2m}, u_{1n}, u_{2n}, u_{1p}, u_{2p}]_B^t,$$

$$\{P\}_B = [P_{1m}, P_{2m}, P_{1n}, P_{2n}, P_{1p}, P_{2p}]_B^t,$$

macierz $[K]_B$ o dwuelementowych składnikach

$$B_{mm}, B_{mn} = B_{nm}, B_{mp} = B_{pm}, B_{nn}, B_{np} = B_{pn}, B_{pp};$$

- trzeci składowy trójkątny element skończony z węzłami j, n, m :

$$\{u\}_C = [u_{1j}, u_{2j}, u_{1n}, u_{2n}, u_{1m}, u_{2m}]_C^t,$$

$$\{P\}_C = [P_{1j}, P_{2j}, P_{1n}, P_{2n}, P_{1m}, P_{2m}]_C^t,$$

macierz $[K]_C$ o dwuelementowych składnikach

$$C_{jj}, C_{jn} = C_{nj}, C_{jm} = C_{mj}, C_{nn}, C_{nm} = C_{mn}, C_{mm};$$

- czwarty składowy trójkątny element skończony z węzłami k, p, n :

$$\{u\}_D = [u_{1k}, u_{2k}, u_{1p}, u_{2p}, u_{1n}, u_{2n}]_D^t,$$

$$\{P\}_D = [P_{1k}, P_{2k}, P_{1p}, P_{2p}, P_{1n}, P_{2n}]_D^t,$$

macierz $[K]_D$ o dwuelementowych składnikach

$$D_{kk}, D_{kp} = D_{pk}, D_{kn} = D_{nk}, D_{pp}, D_{pn} = D_{np}, D_{nn}.$$

Docelowy element skończony (por. dolna część Rys.3.17) będzie miał zatem następujące wektory przemieszczeń i sił węzłowych:

$$\{u\} = [u_{1i}, u_{2i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{1k}, u_{2k}, u_{1m}, u_{2m}, u_{1n}, u_{2n}, u_{1p}, u_{2p}]^t,$$

$$\{P\} = [P_{1i}, P_{2i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{1k}, P_{2k}, P_{1m}, P_{2m}, P_{1n}, P_{2n}, P_{1p}, P_{2p}]^t,$$

a jego macierz sztywności $[K]$ będzie miała następujące dwuelementowe składniki:

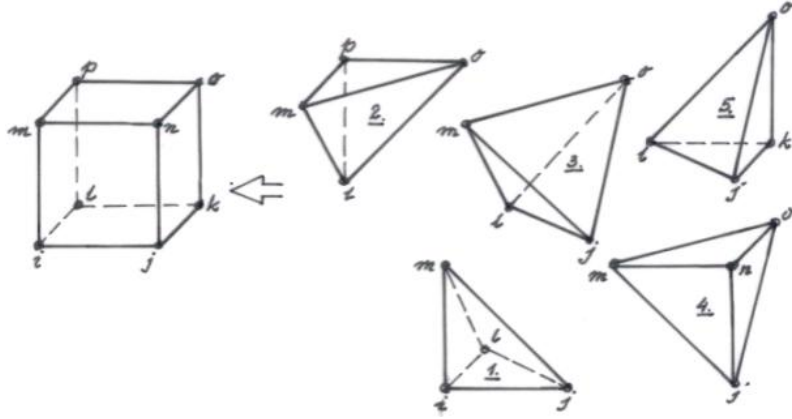
$$[K] = \begin{bmatrix} [A_{ii}] & [0] & [0] & & [A_{im}] & [0] & [A_{ip}] \\ [0] & [A_{jj}] & [0] & & [C_{jm}] & [C_{jn}] & [0] \\ [0] & [0] & [D_{kk}] & & [0] & [D_{kn}] & [D_{kp}] \\ [A_{mi}] & [C_{mj}] & [0] & [A_{mm} + B_{mm} + C_{mm}] & [B_{mn} + C_{mn}] & & [A_{mp} + B_{mp}] \\ [0] & [C_{nj}] & [D_{nk}] & [B_{nm} + C_{nm}] & [B_{nn} + C_{nn} + D_{nn}] & & [B_{np} + D_{np}] \\ [A_{pi}] & [0] & [D_{pk}] & [A_{pm} + B_{pm}] & [B_{pn} + D_{pn}] & & [A_{pp} + B_{pp} + D_{pp}] \end{bmatrix}.$$

Nowa charakterystyka powinna być następnie zweryfikowana przez eksperyment numeryczny sprawdzający stopień nieciągłości funkcji stanu na krawędzi łączenia wyjściowych elementów (w tym przypadku na krawędziach $j - k$ i $l - m$). Tę uwagę odpowiednio należy wykorzystać w innych, tą drogą powstających elementach skończonych. Z praktyki wiadomo, że łączenie elementów o zbliżonych powierzchniach (objętościach) jest dopuszczalne i zadowalające.

Budowa przestrzennych wielościennych elementów skończonych

Zbudujemy na koniec przykładu charakterystykę prostopadłościennego (sześciennego, sześciociennego) elementu skończonego, opartą o charakterystykę czworościennego elementu. Prostopadłościan powstaje z pięciu czworościanów i to teraz leży u podstaw przedstawianej w tej ostatniej części przykładu (i na Rys. 3.18) koncepcji.

Charakterystyka użytych do tego celu czworościennych elementów skończonych opisana jest w Załączniku w tablicy Z.9.



Rys. 3.18. Ilustracja jednej z możliwości tworzenia sześciennego elementu skończonego na bazie elementów czworościennych

Charakterystyka docelowego elementu skończonego ma odpowiadać przypadkowi dwudziestoczteroelementowych wektorów węzłowych przemieszczeń i sił. Procedura tej budowy tej charakterystyki polegać będzie, jak poprzednio, na odpowiednim złożeniu bibliotecznych charakterystyk pięciu (na Rys. 3.18 oznaczonych numerami **1, 2, 3, 4** i **5**) wyjściowych elementów skończonych.

Oznaczenia pomocnicze (por. Rys. 3.18):

- pierwszy czworościenny element skończony z węzłami i, j, l, m :

$$\{u\}_a = [u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{1l}, u_{2l}, u_{3l}, u_{1m}, u_{2m}, u_{3m}]_a^t,$$

$$\{P\}_a = [P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}, P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, P_{1m}, P_{2m}, P_{3m}]_a^t,$$

macierz sztywności o trójelementowych składnikach:

$$a_{ii}, a_{ij} = a_{ij}, a_{il} = a_{li}, a_{im} = a_{mi}, a_{jj},$$

$$a_{jl} = a_{lj}, a_{jm} = a_{mj}, a_{ll}, a_{lm} = a_{ml}, a_{mm}$$

ma postać:

$$[K]_a = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} & 0 & a_{il} & a_{im} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{jj} & 0 & a_{jl} & a_{jm} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{ll} & a_{lm} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & a_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

- drugi czworosieczny element skończony z węzłami l, m, o, p :

$$\{u\}_b = [u_{1l}, u_{2l}, u_{3l}, u_{1m}, u_{2m}, u_{3m}, u_{1o}, u_{2o}, u_{3o}, u_{1p}, u_{2p}, u_{3p}]_b^t,$$

$$\{P\}_b = [P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, P_{1m}, P_{2m}, P_{3m}, P_{1o}, P_{2o}, P_{3o}, P_{1p}, P_{2p}, P_{3p}]_b^t,$$

macierz sztywności o trójelementowych składnikach:

$$b_{ll}, b_{lm} = b_{mj}, b_{lo} = b_{ol}, b_{lp} = b_{pl}, b_{mm},$$

$$b_{mo} = b_{om}, b_{mp} = b_{pm}, b_{oo}, b_{op} = b_{po}, b_{pp}$$

ma postać:

$$[K]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{ll} & b_{lm} & 0 & b_{lo} & b_{lp} \\ \text{sym} & & & & b_{mm} & 0 & b_{mo} & b_{mp} \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{oo} & b_{op} \\ & & & & & & & b_{pp} \end{bmatrix};$$

- trzeci czworosieczny element skończony z węzłami j, l, m, o :

$$\{u\}_c = [u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{1l}, u_{2l}, u_{3l}, u_{1m}, u_{2m}, u_{3m}, u_{1o}, u_{2o}, u_{3o}]_c^t,$$

$$\{P\}_c = [P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}, P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, P_{1m}, P_{2m}, P_{3m}, P_{1o}, P_{2o}, P_{3o}]_c^t,$$

macierz sztywności o trójelementowych składnikach

$$c_{jj}, c_{jl} = c_{lj}, c_{jm} = c_{mj}, c_{jo} = c_{oj}, c_{ll},$$

$$c_{lm} = c_{ml}, c_{lo} = c_{ol}, c_{mm}, c_{mo} = c_{om}, c_{oo}$$

ma postać:

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{jj} & 0 & c_{jl} & c_{jm} & 0 & c_{jo} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{ll} & c_{lm} & 0 & c_{lo} & 0 \\ sym & & & & c_{mm} & 0 & c_{mo} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & c_{oo} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix};$$

- czwarty czworościenny element skończony z węzłami j, m, n, o :

$$\{u\}_d = [u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{1m}, u_{2m}, u_{3m}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}, u_{1o}, u_{2o}, u_{3o}]_d^t,$$

$$\{P\}_d = [P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}, P_{1m}, P_{2m}, P_{3m}, P_{1n}, P_{2n}, P_{3n}, P_{1o}, P_{2o}, P_{3o}]_d^t,$$

macierz sztywności o trójelementowych składnikach:

$$d_{jj}, d_{jm} = d_{mj}, d_{jn} = d_{nj}, d_{jo} = d_{oj}, d_{mm}, d_{mn} = d_{nm}, d_{mo} = d_{om}, d_{nn},$$

$$d_{no} = d_{on}, d_{oo}$$

ma postać:

$$[K]_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & d_{jj} & 0 & 0 & d_{jm} & d_{jn} & d_{jo} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sym & & & & d_{mm} & d_{mn} & d_{mo} & 0 \\ & & & & & d_{nn} & d_{no} & 0 \\ & & & & & & d_{oo} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix};$$

- piąty czworościenny element skończony z węzłami j, k, l, o :

$$\{u\}_e = [u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, u_{1l}, u_{2l}, u_{3l}, u_{1o}, u_{2o}, u_{3o}]_e^t,$$

$$\{P\}_e = [P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}, P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}, P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, P_{1o}, P_{2o}, P_{3o}]_e^t,$$

macierz sztywności o trójelementowych składnikach:

$$e_{jj}, e_{jk} = e_{kj}, e_{jl} = e_{lj}, e_{jo} = e_{oj}, e_{kk}, e_{kl} = e_{lk}, e_{ko} = e_{ok}, e_{ll},$$

$$e_{lo} = e_{ol}, e_{oo}$$

ma postać:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & e_{jj} & e_{jk} & e_{jl} & 0 & 0 & e_{jo} & 0 \\ & & e_{kk} & e_{kl} & 0 & 0 & e_{ko} & 0 \\ & & & e_{ll} & 0 & 0 & e_{lo} & 0 \\ sym & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & e_{oo} & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Docelowy element skończony będzie miał zatem następujące wektory przemieszczeń i sił węzłowych:

$$\{u\} = [u_i, u_j, u_k, u_l, u_m, u_n, u_o, u_p]^t,$$

$$[u_r] = [u_{1r}, u_{2r}, u_{3r}]^t, r = i, j, k, l, m, n, o, p,$$

$$\{P\} = [P_i, P_j, P_k, P_l, P_m, P_n, P_o, P_p]^t,$$

$$[P_r] = [P_{1r}, P_{2r}, P_{3r}]^t, r = i, j, k, l, m, n, o, p,$$

natomiast macierz sztywności

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} & K_{il} & K_{im} & K_{in} & K_{io} & K_{ip} \\ & K_{jj} & K_{jk} & K_{jl} & K_{jm} & K_{jn} & K_{jo} & K_{jp} \\ & & K_{kk} & K_{kl} & K_{km} & K_{kn} & K_{ko} & K_{kp} \\ & & & K_{ll} & K_{lm} & K_{ln} & K_{lo} & K_{lp} \\ sym & & & & K_{mm} & K_{mn} & K_{mo} & K_{mp} \\ & & & & & K_{nn} & K_{no} & K_{np} \\ & & & & & & K_{oo} & K_{op} \\ & & & & & & & K_{pp} \end{bmatrix}$$

będzie miała trójelementowe składniki:

$$K_{ii} = a_{ii}, K_{ij} = a_{ij}, K_{ik} = 0, K_{il} = a_{il}, K_{im} = a_{im}, K_{in} = 0, K_{io} = 0, K_{ip} = 0,$$

$$K_{jj} = a_{jj} + c_{jj} + d_{jj} + e_{jj}, K_{jk} = e_{jk}, K_{jl} = a_{jl} + c_{jl} + e_{jl}, K_{jm}$$

$$= a_{jm} + c_{jm} + d_{jm}, K_{jn} = d_{jn}, K_{jo} = c_{jo} + d_{jo} + e_{jo}, K_{jp} = 0,$$

$$K_{kk} = e_{kk}, K_{kl} = e_{kl}, K_{km} = 0, K_{kn} = 0, K_{ko} = e_{ko}, K_{kp} = 0,$$

$$K_{ll} = a_{ll} + b_{ll} + c_{ll} + e_{ll}, K_{lm} = a_{lm} + b_{lm} + c_{lm}, K_{ln} = 0, K_{lo}$$

$$= b_{lo} + c_{lo} + e_{lo}, K_{lp} = b_{lp},$$

$$K_{mm} = a_{mm} + b_{mm} + c_{mm} + d_{mm}, K_{mn} = d_{mn}, K_{mo}$$

$$= b_{mo} + c_{mo} + d_{mo}, K_{mp} = b_{mp},$$

$$K_{nn} = d_{nn}, K_{no} = d_{no}, K_{np} = 0,$$

$$K_{oo} = b_{oo} + c_{oo} + d_{oo} + e_{oo}, K_{op} = b_{op},$$

$$K_{pp} = b_{pp},$$

przy tym $K_{rs} = K_{sr}$ ($r, s = i, j, k, l, m, n, o, p$).

Rozwiązania numeryczne zagadnień nieliniowych

W niektórych fizycznych problemach (np. obejmujących zjawiska reologiczne materiału rzeczywistego obiektu lub zagadnienia mechaniki kontaktu) trzeba obserwować i opisywać nieliniowe zmiany stanu. Wtedy, stosownie do praw i przyczyn nieliniowości procesu, potrzebne są zmiany charakterystyk elementów skończonych. W takich przypadkach, gdy jest możliwa fizycznie sensowna zmiana macierzy sztywności, to również należy rozwinąć numeryczne zasady i metody rozwiązania takich problemów. Te zaawansowane zagadnienia znajdują odzwierciedlenie w wielu materiałach źródłowych (np. [12, 17]). Założenia wykorzystywanych tam metod powinna być jednak wprowadzającą przedstawioną początkującemu w obcowaniu z MES Czytelnikowi.

Ponownie pozostając przy statyce, proces nieliniowej deformacji continuum możemy opisać, sygnalizującym zależność od przemieszczeń zarówno elementów macierzy sztywności, jak i obciążeń zewnętrznych, ogólnym równaniem:

$$[K(u)]\{u\} = \{P(u)\} \quad (3.83)$$

Zakładając istnienie początkowego (znanego lub dającego się określić, np. jako odpowiadającego zakresowi prawa Hooke'a) stanu równowagi ($i - 1$):

$$[K]_{i-1}\{\Delta u\}_{i-1} = \{\Delta P\}_{i-1} \quad (3.84)$$

gdzie (po oznaczeniu przez i kolejnych kroków numerycznej procedury obliczeń ten stan odpowiadać pierwszemu z takich kroków $i = 1$) niezależna od przemieszczeń macierz sztywności $[K]_{i-1} = [K]_0$, wektor sił węzłowych $\{\Delta P\}_{i-1} = \{P\}_0$, a odpowiadającej tej wartości sił przemieszczenia $\{\Delta u\}_{i-1} = \{u\}_0$.

Każdą następną zmianę stanu (3.84) można wywołać, jak wiemy, dwoma drogami:

- albo przykładając małe przyrosty, wymuszających deformację badanego obszaru znanych obciążeń zewnętrznych $\{\Delta P\}_i$ i wtedy

$$[K]_{i-1}\{\Delta u'\}_i = \{\Delta P\}_i \text{ oraz } \{\Delta u'\}_i = [K]_{i-1}^{-1}\{\Delta P\}_i$$

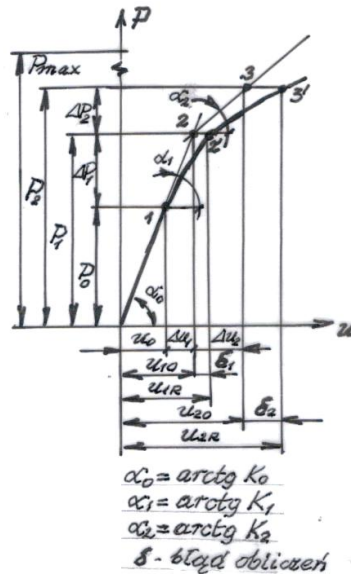
- albo zadając małe przyrosty znanych przemieszczeń $\{\Delta u\}$ i wtedy

$$\{\Delta P'\}_i = [K]_{i-1}\{\Delta u\}_i.$$

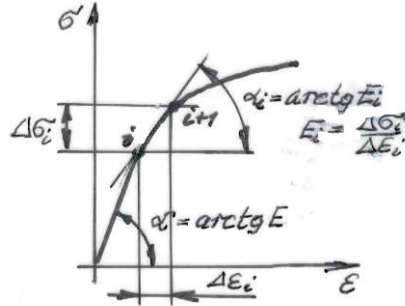
W obu przypadkach rozwiązania $\{\Delta u'\}_i$ lub $\{\Delta P\}_i$ są obarczone błędem, którego minimalizację można przeprowadzić albo stosowaniem bardzo małych przyrostów sił i przemieszczeń, albo dostosowywaniem macierzy $[K]$.

Obliczenia z zastosowaniem zasady przyrostowej

Niech w zakresie od $\{P\} = 0$ do $\{P\} = \{P\}_0$ opisywany układ (por. Rys. 3.19) zachowuje się liniowo (np. sprężystość w zakresie obowiązywania prawa Hooke'a). Jest to stan początkowy układu i wtedy macierz sztywności $[K]_0$ jest stała i znana (np. podobnie jak i mówiący o tej macierzy moduł sprężystości E – por. Rys. 3.20).



Rys. 3.19. Założenia i ilustracja metody przyrostowej



Rys. 3.20. Idea i fizyczna podstawa tworzenia siecznej macierzy sztywności

W kroku pierwszym ($i = 1$) postępujemy typowo jak przy standardowym zastosowaniu metody przemieszczeń MES i obliczamy:

$$\{u\}_0 = [K]_0^{-1}\{P\}_0 \quad (3.84a)$$

Krok drugi ($i = 2$) poprzedzamy ustaleniem zmodyfikowanej macierzy sztywności $[K(\{u\}_0)] = [K]_1$. Może być to np. macierz sieczna, jeśli modyfikacja przebiega wg zasady zilustrowanej na rysunku 3.20 i polega na zmianie modułu E na moduł $E_1 = d\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon$. Po założeniu $\{P\}_1$, czyli przyrostu

$$\{\Delta P\}_1 = \{P\}_1 - \{P\}_0 \quad (3.48b)$$

Obliczamy

$$\{\Delta u\}_1 = [K]_1^{-1}\{\Delta P\}_1 \text{ oraz } \{u\}_1 = \{u\}_0 + \{\Delta u\}_1 \quad (3.48c)$$

Krok $i = 3$ (i następne) powtarza postępowanie z kroku drugiego: zawiera więc modyfikację macierzy sztywności do postaci $[K(\{u\}_1)] = [K]_2$, założenie wg (3.48b) następnego przyrostu sił węzłowych $\{P\}_2$ oraz obliczenie wg (3.48c) przyrostu przemieszczeń węzłowych $\{\Delta u\}_2$ i przemieszczeń $\{u\}_2$.

Rezultatem takich obliczeń jest utworzeniem nieliniowej charakterystyki układu z narastającym błędem obliczanych przemieszczeń. Pozytywną poprawę tego rezultatu może dać dostosowanie do wymagań rozwiązywanego zagadnienia funkcji kształtu i tym sposobem charakterystyk elementów skończonych, lub eksperyment numeryczny z doбором przyrostów sił węzłowych. Zakończenie obliczeń może więc być związane przede wszystkim z kryterium nałożonym na wielkość odchyłki obliczanych wektorów przemieszczeń od rzeczywistych.

Zasada przyrostowa znalazła szersze zastosowanie np. w zagadnieniach mechaniki kontaktu. Jej wady skompensować można metodami iteracyjnymi.

Obliczenia iteracyjne

Iteracja *bezpośrednia* zakłada (por. Rys. 3.21a) modyfikację macierzy sztywności $[K]$ w toku obliczeń. W tej metodzie z góry zadany jest wektor obciążeń maksymalnych $\{P\}_{max}$ i początkowa macierz sztywności $[K]_0$. W punkcie startu ($i = 0$) przy $\{u\}_0 = \{0\}$ i $\{\Delta P\} = \{0\}$ oblicza się:

$$\{\Delta P\}_1 = \{P\}_{max} - [K]_0\{u\}_0 = \{P\}_{max}$$

oraz

$$\{\Delta u\}_1 = [K]_0^{-1}\{\Delta P\}_1.$$

W kroku drugim ($i = 1$), natomiast:

$$\{u\}_1 = \{u\}_0 + \{\Delta u\}_1 = \{\Delta u\}_1, [K\{u\}_1] = [K]_1,$$

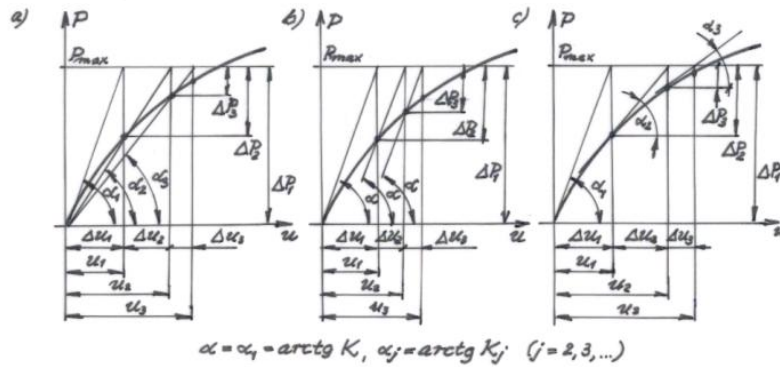
$$\{\Delta P\}_2 = \{P\}_{max} - [K]_1\{u\}_1, \{\Delta u\}_2 = [K]_1^{-1}\{\Delta P\}_2.$$

W następnych krokach ($i = 2, 3, 4, \dots$) schemat ten powtarza się i można go przedstawić jako następujący iteracyjny algorytm:

$$\{u\}_i = \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_i, [K(\{u\}_i)] = [K]_i,$$

$$\{\Delta P\}_{i+1} = \{P\}_{max} - [K]_i\{u\}_i,$$

$$\{\Delta u\}_{i+1} = [K]_i^{-1}\{\Delta P\}_{i+1} \quad (3.85)$$



Rys. 3.21. Interpretacja i założenia zasady obliczeń iteracyjnych metodami bezpośrednią (a), Newtona-Raphsona (b) i zmodyfikowaną Newtona-Raphsona (c)

Kryterium zakończenia iteracji w tej metodzie może być przyjęte np. w postaci normy:

$$\|\Delta P_{i+1}\| \leq \delta_p \quad (3.86)$$

gdzie δ_p jest wybraną, dostatecznie małą wartością wektora węzłowych sił, a symbol normy $\|\bullet\|$ oznacza wyrażenie $\|A\| = (\{A\}^t \{A\})^{1/2}$.

Iteracja przy *stałej macierzy sztywności* (metoda Newtona-Raphsona, por. Rys. 3.21b) jako dane wyjściowe przyjmuje zadane i znane z góry $\{P\}_{max}$ i interpretowaną jak w prezentowanych poprzednio metodach $[K] = [K]_0 = const$.

W pierwszym kroku ($i = 0$) przy dodatkowym założeniu, że $\{u\}_0 = \{0\}$ oblicza się:

$$\{\Delta P\}_1 = \{P\}_{max} - [K]_0 \{u\}_0 = \{P\}_{max}, \{\Delta u\}_1 = [K]_0^{-1} \{\Delta P\}_1.$$

W drugim kroku ($i = 1$) natomiast:

$$\{u\}_1 = \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_1, \{\Delta P\}_2 = \{P\}_{max} - [K]_0 \{u\}_1, \{\Delta u\}_2 = [K]_0^{-1} \{\Delta P\}_2.$$

Ponownie jest to powtarzalny w następnych krokach algorytm obliczeń:

$$\begin{aligned} \{u\}_i &= \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_i, [K]_i = [K]_0, \{\Delta P\}_{i+1} = \{P\}_{max} - [K]_0 \{u\}_i, \\ \{\Delta u\}_{i+1} &= [K]_0^{-1} \{\Delta P\}_{i+1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

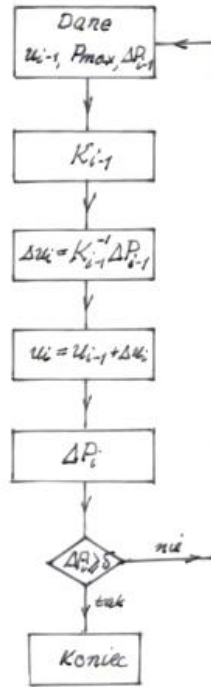
kończący się po spełnieniu kryterium

$$albo \|\Delta u_{i+1}\| \leq \delta_u, albo \|\Delta P_{i+1}\| \leq \delta_p \quad (3.88)$$

gdzie δ_u i δ_p są obranymi, dowolnie małymi liczbami określającymi błędy odpowiednio przemieszczeń i sił węzłowych.

Iteracja z użyciem *dostosowywanej stycznej macierzy sztywności* (zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona, por. Rys. 3.21c) także zakłada z góry znane i zadane $\{P\}_{max}$ oraz początkową macierz sztywności $[K]_0$. Dostosowywanie macierzy sztywności polega natomiast na ustalaniu macierzy stycznej wg zasady: $[K_t]_i = [d\{P\}/d\{u\}]_i$. Algorytm i kryteria zakończenia obliczeń jest podobny do algorytmów poprzednich metod iteracyjnych.

Wszystkie przedstawione algorytmy mieszczą się w schemacie blokowym z rysunku 3.22.



Rys. 3.22. Schemat blokowy algorytmu obliczeń iteracyjnych

Metoda sił MES

U podstaw tej drugiej, mniej upowszechnionej odmiany metody elementów skończonych, leży koncepcja przybliżania odpowiednią funkcją kształtu nie przemieszczeń, lecz naprężeń:

$$\{\sigma\} = [N_\sigma]\{P\} \quad (3.89)$$

gdzie $[N_\sigma]$ jest funkcją aproksymującą naprężenia w obszarze elementów skończonych (układu materialnego modelowanego elementami skończonymi), $\{P\}$ jest wektorem sił węzłowych, odzwierciedlających stan naprężeń w tym obszarze.

Funkcja kształtu $[N_\sigma]$ spełnia równanie równowagi wewnętrznej (por. Przykład 2.6, równania (a1) lub (a2)), a więc – po pominięciu sił objętościowych – równanie:

$$[L][N_\sigma]\{P\} = \{0\} \quad (3.90)$$

gdzie $[L]$ jest operatorem różniczkowym równania równowagi wewnętrznej.

Jeśli postępując wg tej koncepcji obowiązujące w obszarze elementu skończonego (obszarze układu materialnego modelowanego elementami skończonymi) związki konstytutywne wyrazimy jak następuje:

$$\{\varepsilon\} = [k_\varepsilon]\{\sigma\} = [k_\varepsilon][N_\sigma]\{P\} \quad (3.91)$$

gdzie $\{\varepsilon\}$ określa naprężenia, a $[k_\varepsilon]$ jest macierzą współczynników właściwości materiałowych odpowiadających konkretnemu, przyjętemu do rozważań związkowi konstytutywnemu, to funkcjonal energii uzupełniającej χ_σ (por. Rys. 3.2)

$$\chi_\sigma = \int_V \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv - \underbrace{\int_S \{p\}^t \{w\} ds}_{\{P\}^t \{u\}} \quad (3.92a)$$

można wyrazić następującą postacią:

$$\begin{aligned} \chi_\sigma &= \{P\}^t \left(\int_V [N_\sigma]^t [k_\varepsilon] [N_\sigma] dv \right) \{P\} - \{P\}^t \{u\} = \\ &= \{P\}^t \left[\left(\int_V [N_\sigma]^t [k_\varepsilon] [N_\sigma] dv \right) \{P\} - \{u\} \right] = \{P\}^T ([C] \{P\} - \{u\}) \end{aligned} \quad (3.92b)$$

gdzie V jest objętością obszaru, S powierzchnią ograniczającą obszar.

Jeśli z kolei zastosujemy warunki (3.19), teraz w postaci

$$\frac{\partial \chi_\sigma}{\partial \{P\}} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2 \chi_\sigma}{\partial \{P\}^2} > 0 \quad (3.93)$$

to z pierwszego z nich otrzymamy układ algebraicznych równań równowagi:

$$[C]\{P\} - \{u\} = 0 \quad (3.94)$$

gdzie odzwierciedlający w ogólności wszystkie czynne siły zewnętrzne, rozprószenia i bezwładności wektor sił $\{P\} = \{P\}_Z + \{P\}_R + \{P\}_B$ jest wektorem nie-wiadomych metody sił, a $[C]$ – jest macierzą podatności układu.

Po uprzednim wprowadzeniu do (3.93) warunków brzegowych co do $\{P\}$ i $\{u\}$ możliwe (pod drugim z określonych w (3.93) warunkiem, że $[C] > 0$) rozwiązanie

$$\{P\} = [C]^{-1} \{u\} \quad (3.95)$$

zamyka procedurę metody sił MES.

Weryfikacja MES

Metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną. Skalę tego przybliżenia – jak już wiemy – ustala po pierwsze dyskretyzacja modeli nominalnych, a po drugie dyskretyzacja modeli matematycznych elementów skończonych. Poznaliśmy też dwa sposoby minimalizacji skutków takiego przybliżenia: albo przez minimalizację uzasadnionego fizycznie funkcjonu (tak jest w metodach wariacyjnych), albo przez sprowadzanie do zera błędów (reszt, jak jest w metodach rezydualnych).

Przy dyskretyzacji modeli nominalnych problemem zawsze jest dokładność odwzorowania geometrii rozważanego obszaru (np. często gładką powierzchnię ograniczającą ten obszar przybliżyć trzeba powierzchnią wielościenną), dokładność odwzorowania właściwości fizycznych materiału obszaru (zmieniane np. skokowo w granicach elementów skończonych), a także dokładność odwzorowania czynników (np. czynnych obciążeń zewnętrznych i wewnętrznych), wpływających na zmiany stanu fizycznego badanego obszaru. Przy dyskretyzacji modeli matematycznych z punktu widzenia stopnia przybliżenia ważny i zarazem trudny jest wybór funkcji kształtu, i funkcji wagowych (to one decydują o dokładności spełnienia warunków brzegowych i gładkości przejścia na granicach elementów skończonych funkcji stanu obszaru i zagadnienia).

Mówimy często, że dokładność MES wzrasta albo ze wzrostem gęstości siatek podziału obszarów na elementy skończone (wzrostem liczby elementów), albo ze wzrostem liczby węzłów (np. przez wprowadzenie do charakterystyk elementów skończonych funkcji kształtu i funkcji wagowych wyższego rzędu). Jest to, oczywiście, słuszne i sprawdzalne, ale też podnosi próg trudności numerycznych i w konsekwencji wprowadza kolejne przybliżenia (np. konieczność przybliżonego całkowania w fazie określania współczynników występujących w macierzy). Dochodzi zatem jeszcze błąd obliczeń.

Wypływa z tego naturalny wniosek, że MES (tak jak wszystkie inne metody przybliżone) musi być weryfikowana i na tej podstawie doskonalona. Istnieje specjalistyczna literatura tego tematu (np. [1]), ale rzecz sprowadza się w praktyce do porównywania wyników obliczeń MES z wynikami ścisłymi lub z wynikami eksperymentalnymi. Do tego celu służą nominalne tzw. modele standardowe (o znanych ścisłych rozwiązaniach ich modeli matematycznych, czyli równań stanu), stosowane w badaniach doświadczalnych. Modelowane i określane metodą MES stany obiektów rzeczywistych, przy braku odpowiednich modeli standardowych, muszą i są weryfikowane dostępnymi metodami doświadczalnego. Najwłaściwszy jest jednak przypadek weryfikacji przy jedności wzorcowych modeli MES, standardowych i empirycznych.

Nauka polska, dzięki nieżyjącemu już prof. Olgierdowi C. Zienkiewiczowi [26], ma swój dorobek w tworzeniu systemów programów MES (np. system opracowany pod kierunkiem prof. Jana Szmeltera w Wojskowej Akademii

Technicznej [20]). Dziś na rynku dominują jednak (a szkoda) systemy zagraniczne, które kupujący też powinien sam zweryfikować. Trzeba przy tym wiedzieć jak to zrobić, czyli przedtem nauczyć się i poznać MES. Z kolei twórczy i innowacyjny konstruktor powinien nie zapominać o możliwości wytworzenia własnego systemu programów tej metody. Zatrzymajmy się zatem na tym, co potrzebne jest uczącemu się i poznającemu metodę Czytelnikowi.

Jedną z pierwszych rzeczy, o której teraz jeszcze trzeba powiedzieć jest tzw. eksperyment numeryczny. Ma on w weryfikacji MES znaczenie ogólniejsze, lecz także dobrze służy nabraniu potrzebnego doświadczenia, zwłaszcza wtedy, gdy będzie użyty do sprawdzenia doboru do rozpatrywanego zagadnienia bibliotecznych elementów skończonych lub do doskonalenia ich charakterystyk. W praktyce polega on na samodzielnym szukaniu kompromisu między stopniem skalą wzrostu liczby węzłów (lub skomplikowania charakterystyki elementów) a tempem poprawy wyników (lub wzrostu trudności numerycznych, w tym przede wszystkim wzrostem liczby rozwiązywanych równań). Wykonywany jest natomiast drogą powtarzania obliczeń w wariantach założonych zmian danego zagadnienia.

W ilustracyjnych przykładach weryfikacji metody MES powrócimy do dominujących w opracowaniu zagadnień mechanicznych i cieplno-mechanicznych.

Przykład 3.11. Rura grubościenna nieograniczonej długości. Model standardowy w zagadnieniu przewodnictwa ciepła, zagadnieniu cieplno-mechanicznym i w zagadnieniu mechanicznym (Lame')

Założenia tego modelu to osiowa symetria funkcji stanu (rozkładu temperatur, obciążeń zewnętrznych i masowych, przemieszczeń, odkształceń i naprężeń). Reprezentuje przypadek płaskiego stanu odkształceń, dla których znane są ściśle rozwiązania. Główne z nich będą podane niżej.

Rozkład temperatury i naprężeń cieplnych w przewodzącej ustalony przepływ ciepła ścianie walcowej

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \left(\ln \frac{r}{r_1} \right) \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (a)$$

gdzie $r_1 \leq r \leq r_2$ jest bieżącą promieniową współrzędną punktów na grubości ściany; r_1 i r_2 są odpowiednio wewnętrznymi i zewnętrznymi promieniami walca; T_1 i T_2 są temperaturami mierzonymi na wewnętrznej i zewnętrznej ścianie walca;

$$\sigma_r(r) = \alpha(T_2 - T_1) \left\{ \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r} \right)}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)} - \frac{\left[\left(\frac{r_2}{r} \right)^2 - 1 \right]}{\left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]} \right\} \frac{E}{2(1-\nu)},$$

$$\sigma_{\varphi}(r) = \alpha(T_2 - T_1) \left\{ \frac{\left[\left(\ln \frac{r_2}{r} \right) - 1 \right]}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)} - \frac{\left[\left(\frac{r_2}{r} \right)^2 + 1 \right]}{\left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]} \right\} \frac{E}{2(1-\nu)},$$

$$\sigma_z(r) = \nu[\sigma_r(r) + \sigma_{\varphi}(r)] - E\alpha(T_2 - T_1),$$

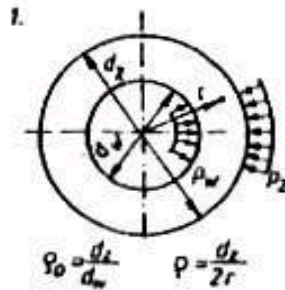
gdzie σ_r , σ_{φ} i σ_z są cieplnymi naprężeniami odpowiednio promieniowym, obwodowym i osiowym w ścianie walca przy rozkładzie (a) temperatur; α jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej materiału ściany; E i ν są odpowiednio modułem sprężystości podłużnej i liczbą Poissona tego materiału.

Rozkład naprężeń w ścianie walca (rury) przy jednoczesnym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym różnej wartości

$$\frac{\sigma_r(r)}{(\varrho_0^2 - 1)} = -p_w(\varrho^2 - 1) - p_z(\varrho_0^2 - \varrho^2),$$

$$\frac{\sigma_{\varphi}(r)}{(\varrho_0^2 - 1)} = -p_w(\varrho^2 + 1) - p_z(\varrho_0^2 + \varrho^2),$$

$$\sigma_z(r) = \nu[\sigma_r(r) + \sigma_{\varphi}(r)],$$



Rys. 3.23. Założenia modelowe zagadnienia obciążenia wewnętrznym i zewnętrznym ciśnieniem rury grubościenniej

gdzie σ_r , σ_{φ} i σ_z są naprężeniami odpowiednio promieniowym, obwodowym i osiowym wywołanymi w ścianie walca przez ciśnienia wewnętrzne p_w i zewnętrzne p_z (por. Rys. 3.23); d_z i d_w odpowiednio zewnętrzną i wewnętrzną średnicami walca ($\varrho_0 = d_z/d_w$), r promieniową współrzędną punktu określania naprężeń ($\varrho = d_z/2r$); ν zaś jest liczbą Poissona materiału ściany.

Przykład 3.12. Kula grubościenna wydrążona. Model standardowy w zagadnieniu przewodnictwa ciepła, zagadnieniu cieplno-mechanicznym i w zagadnieniu mechanicznym

Założenia tego modelu to punktowa symetria funkcji stanu (rozkładu temperatur, obciążeń zewnętrznych i masowych, przemieszczeń, odkształceń i naprężeń). Główne, znane ściśle rozwiązania wymienionych zagadnień będą podane niżej.

Rozkład temperatury i naprężeń cieplnych w przewodzącej ustalony przepływ ciepła ścianie wydrążonej kuli

$$T(r) = T_2 + (T_2 - T_1) \left(\frac{r_2}{r-1} \right) \left(\frac{r_2}{r-1} \right),$$

gdzie oznaczenia odpowiednio te same jak w przypadku walca;

$$\sigma_r(r) = \alpha(T_2 - T_1) \left\{ \frac{r_1 r_2}{(r_2^3 - r_1^3)} \left[(r_1 + r_2) - \frac{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{r} + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} \right] \right\} \frac{E}{(1-\nu)},$$

$$\sigma_\varphi(r) = \alpha(T_2 - T_1) \left\{ \frac{r_1 r_2}{(r_2^3 - r_1^3)} \left[(r_1 + r_2) - \frac{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{2r} + \frac{r_1^2 r_2^2}{2r^3} \right] \right\} \frac{E}{(1-\nu)},$$

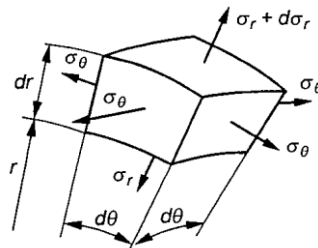
gdzie σ_r i σ_φ są cieplnymi naprężeniami odpowiednio promieniowym i obwodowym w ścianie kulistej; α jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej materiału ściany; E i ν są odpowiednio modułem sprężystości podłużnej i liczbą Poissona tego materiału.

Rozkład naprężeń w ścianie kuli przy jednoczesnym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym różnej wartości.

$$\frac{\sigma_r(r)}{(\varrho_0^3 - 1)} = -p_w(\varrho^3 - 1) - p_z(\varrho_0^3 - \varrho^3),$$

$$\frac{\sigma_\varphi(r)}{(\varrho_0^3 - 1)} = p_w \left(\frac{1}{2} \varrho^3 + 1 \right) - p_z \left(\varrho_0^3 + \frac{1}{2} \varrho^3 \right),$$

gdzie σ_r i σ_φ i są naprężeniami odpowiednio promieniowymi i obwodowymi wywołanymi w ścianie wydrążonej kuli przez ciśnienia wewnętrzne p_w i zewnętrzne p_z (por. Rys. 3.24); d_z i d_w odpowiednio zewnętrzną i wewnętrzną średnicami kuli ($\varrho_0 = d_z/d_w$), r promieniową współrzędną punktu określania naprężeń ($\varrho = d_z/2r$).

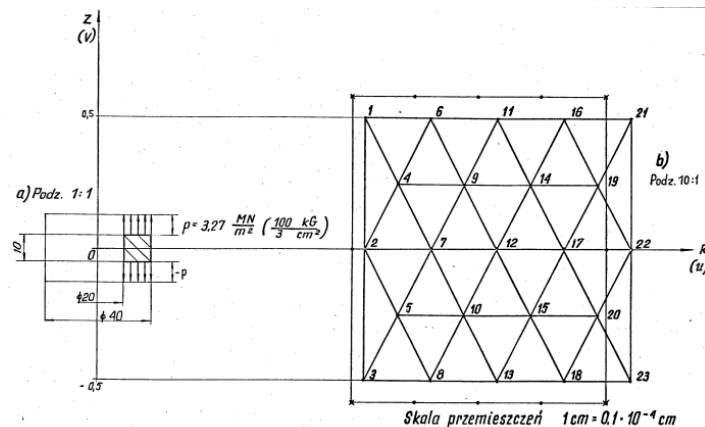


Rys. 3.24. Interpretacja składowych wektora naprężeń w punktach ściany wydrążonej kuli

Przykład 3.13. Wstępny test programu MES, przygotowanego do rozwiązań zagadnień osiowosymetrycznych [23]

Program zakładał obliczenia obiektów osiowosymetrycznych, przy kołowo-symetrycznych wielkościach węzłowych. Testowane były charakterystyki trójkątnych, osiowosymetrycznych elementów skończonych (por. tablica Z.8 w Załączniku), obliczane z użyciem metody całkowania przybliżonego.

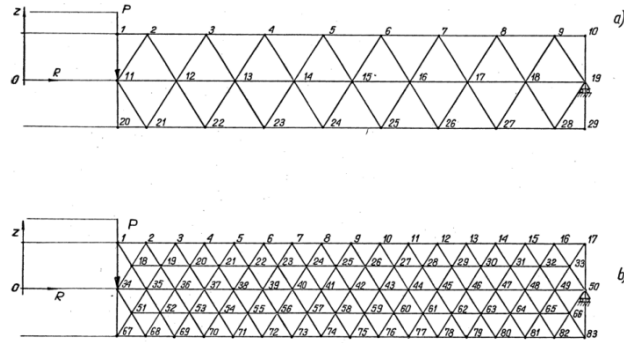
Zastosowany model kontrolny był wycinkiem poosiowo rozciąganej rury grubościenniej (por. Rys. 3.25a). Weryfikowane tak było pole przemieszczeń (por. Rys. 3.25b) i pole naprężeń na powierzchni poosiowego przekroju badanego wycinka rury. Błąd przybliżenia zmieścił się w obu przypadkach w ułamku procenta.



Rys. 3.25. Założenia modelowe, siatka elementów skończonych i wynik obliczeń przemieszczeń punktów poosiowego przekroju rozciąganego kołowo symetrycznego pierścienia

Przykład 3.14. Płyta kołowo-symetryczna z otworem. Model standardowy teorii płyt i badań doświadczalnych

Tutaj model ten wykorzystany został do eksperymentu numerycznego z użyciem tego samego programu MES, o którym była mowa w przykładzie 3.13. Testowany był wpływ zagęszczenia siatki (węzłów) elementów skończonych na ugięcie tej modelowej płyty. Rysunek 3.27a przedstawia skonkretyzowane założenia modelowe, rysunek 3.26 dwie z użytych w eksperymencie siatek elementów skończonych, rysunek 3.27 natomiast pokazane wspólnie z teoretycznym wyniki obliczeń metodą przemieszczeń MES. Pokazują one oczekiwaną tendencję poprawy wyniku po pierwszym zagęszczeniu siatki.



Rys. 3.26. Warianty siatek osiowo-symetrycznych elementów skończonych zastosowanych w numerycznym eksperymencie badania wpływu gęstości siatek (wielkości elementów skończonych) na dokładność obliczeń MES ugięcia kołowo-symetrycznej płyty

Opis założeń użytego modelu standardowego poniżej.

Ugięcie płyty kołowo-symetrycznej z otworem (model standardowy).

$$v(r) = \frac{qb}{4D} \left\{ \ln\left(\frac{r}{a}\right) + C_1 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] + C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right\} r^2,$$

przy czym

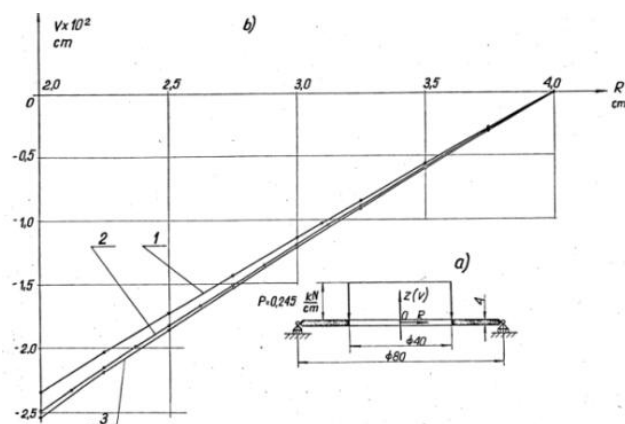
$$C_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]} - \frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)}, \quad C_2 = \frac{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]} \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad q = \frac{P}{2\pi b},$$

gdzie P jest całkowitą siłą poprzeczną przyłożoną na krawędzi otworu (por. Rys. 3.27a); $2a$ jest średnicą płyty; $2b$ średnicą otworu; h grubością płyty; E i ν są odpowiednio modułem sprężystości podłużnej i liczbą Poissona materiału płyty.

Maksymalne ugięcie:

$$v_{max} = v(b) = \frac{qb}{4D} \left\{ \ln\left(\frac{b}{a}\right) + C_1 \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right] + C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\} r^2.$$



Rys. 3.27. Założenia modelowe płyty kołowo-symetrycznej, zastąpionej elementami skończonymi wg Rys. 2.26., oraz wyniki przeprowadzonych obliczeń teoretycznych (na wykresie 3) i metodą przemieszczeń MES dla różnych wielkości elementów (1 – dla siatki z Rys. 3.26a, przy czym $v_{max} = 0,94v_{max\,teor.}$, 2 – dla siatki z Rys. 3.26b, przy czym $v_{max} = 0,98v_{max\,teor.}$)

Uwagi końcowe

Powyższe wprowadzenie w metodę elementów skończonych, opisaną przede wszystkim w podstawowych źródłach [26, 27, 28, 29], nie wyczerpuje oczywiście tematu. Zainteresowanemu kontynuowaniem studiów i praktycznym wykorzystywaniem MES Czytelnikowi służyć może pozostała część dołączonej i do tego dobranej literatury. Także temu celowi służyć powinien dołączony załącznik, obejmujący bibliotekę, wyprowadzonych ściśle co do modelu, charakterystyk elementów skończonych pierwszego rodzaju. Poznawanie zaprezentowanego materiału, zwłaszcza zawartego w załącznikach, wymaga od Czytelnika wiedzy, nie wychodzącej poza ramy aktualnych standardów studiów politechnicznych (lub kierunków inżynierskich na uczelniach innych niż politechniki). Niemniej, zainteresowany metodą Czytelnik powinien przegryźć się przez

podaną treść z ołówkiem i kartką papieru w rękę, powtarzając wywody teoretyczne, jak i przeprowadzone w przytoczonych przykładach.

Istotnym – i wymagającym nabycia umiejętności – problemem MES jest przygotowywanie siatek podziału na elementy skończone badanych tą metodą obszarów obiektów materialnych, oraz wybór właściwych rozwiązywanemu zagadnieniu funkcji kształtu i charakterystyk tych elementów. W tym zakresie początkującym również potrzebne są ćwiczenia z ołówkiem, gumką i kartką papieru. Każdy program lub system programów obliczeniowych MES wyposażony jest w zabezpieczenia przed błędami siatek podziału, a to dopełnia takie przygotowawcze ćwiczenia. W drugiej fazie nauki zastosowań MES pomocne też będzie ćwiczenie budowy siatki podziału na elementy skończone z pomocą, powszechnie znanych i dostępnych systemów AUTOCAD.

Umiejętność modyfikowania funkcji kształtu i tworzenia bogatszych lub wygodniejszych charakterystyk elementów skończonych zdobywa się po zaawansowanej praktyce obliczeniowej. Jest to droga nazywana eksperymentem numerycznym, na podstawie którego dopiero można ocenić skutki i tak potwierdzić sens próbnych modyfikacji. Taka sama praktyka obliczeniowa wprowadzi uczących się MES w efektywne korzystanie z podprogramów automatycznego tworzenia siatek podziału, występujących w dostępnych na rynku współczesnych systemach wspomagania projektowania.

W XXI wieku trudno bagatelizować potrzebę poznania MES i specjalizowania się w jej zastosowaniach, gdyż jest dziś ona najistotniejszym elementem systemów wspomagania twórczej działalności konstruktora. Upowszechniona przed pół wieku temu przez inżynierów praktyków MES, niezależnie od typu kryterium konstruowania, pozwala też już dziś wskazywać zbiory optymalnych zmiennych decyzyjnych (wymiarów), dających dopiero po tym możliwość sensownego budowania geometrycznej formy i funkcjonalności konstruowanego urządzenia. Podobnie jak wszystkie systemy CAD, także i MES włączona w systemy CAD, ani nie zastąpi, ani nie wyeliminuje konstruktora.

Nie ulega też wątpliwości, że zarówno korzystanie z rynkowych oprogramowań MES, jak i samodzielne, w konkretnym celu, wytwarzanie takich narzędzi przez konstruktorów np. maszyn i urządzeń technicznych nie może odbywać się bez pomocy matematyka–informatyka, biegłego w zakresie informatycznych zagadnień występujących w tej metodzie, albo najlepiej – specjalizującego się przy tym w dziedzinie modelowania matematycznego rzeczywistych procesów. Wykorzystujący partnerstwo informatyka konstruktor, z drugiej strony, powinien jednocześnie podnosić swe umiejętności w praktykowanej dziedzinie, jak i w stosowanej matematyce (np. w zakresie metod optymalizacji czy gromadzenia, przetwarzania i zarządzania zasobami danych), ale też to on, a nie nikt inny, powinien inspirować i stawiać przed swym partnerem–informatykiem nowe zadania w tym zakresie.

Literatura

- [1] Babuska J., Gago I.R., de A. Oliveira F.R., Zienkiewicz O.C. (eds): Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations. John Willey & Sons, New York 1986.
- [2] Bathe K. J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall, New Jersey 1982.
- [3] Blake A. (eds): Handbook of Mechanics, Materials, and Structures, John Willey & Sons, New York 1985.
- [4] Branicki C. i in.: Mechanika budowli. Ujęcia komputerowe. Tom 1-2. Arkady, Warszawa 1991–1992.
- [5] Brebbia C.A., Walker S.: Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London 1980.
- [6] Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C., “Boundary Element Techniques. Theory and Application in Engineering”. Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [7] Cook R. D.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Chichester 1981.
- [8] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: Metody numeryczne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [9] Gallager R.H.: Finite Element Analysis. Springer Verlag, Berlin 1976.
- [10] Gawroński W. i in.: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady, Warszawa 1984.
- [11] Gilewski W., Gomuliński A.: Physical Shape Functions: A New Koncept in Finite Elements. FEM, No. 3, 1990.
- [12] Grisfield K. A.: Nonlinear Finite Element Analysis of Solid and Structures, vo. 3. John Wiley & Sons, Chichester 1991.
- [13] Kleiber M.: Wprowadzenie do metody elementów skończonych. PWN, Warszawa-Poznań 1989.
- [14] Kruszewski J. i in.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- [15] Łodygowski T., Kąkol W.: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1991.
- [16] Martin H. C., Carey G. F.: Introduction to Finite Element Analysis. Mc Graw-Hill, New York 1984.
- [17] Oden J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua. Mc Graw-Hill, London 1972.
- [18] Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
- [19] Ross C. T. F.: Finite Element Method in Structural Mechanics. Ellis Horwood Ltd, 1985.
- [20] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M.: Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Arkady, Warszawa 1979.
- [21] Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M.: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa 1990.

- [22] Witkowski J.: Metoda elementów skończonych. Rozdz. 2.2 tomu I w Podstawy konstrukcji maszyn pod red. Dietrich M. PWN, Warszawa 1986.
- [23] Witkowski J.: Optymalne kształtowanie elementów złącza śrubowego. Niepublikowana rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, Warszawa 1973.
- [24] Young T. Y.: Finite Element Structural Analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [25] Zagrajek T., Krzesiński G., Marek P.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Ćwiczenia z zastosowaniem systemu ANSYS. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006.
- [26] Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Mc Graw-Hill, London 1967.
- [27] Zienkiewicz O. C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.
- [28] Zienkiewicz O. C.: The Finite Element Method. Mc Graw-Hill 1977.
- [29] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: The Finite Element Method; Mc Graw-Hill, Berkshire 1991.

Jan Witkowski

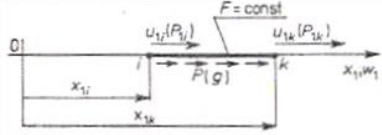
FINITE ELEMENT METHODS FOR BEGINNERS

Summary

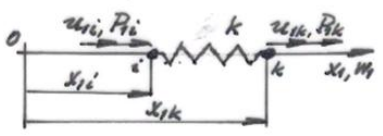
The paper presents approximate methods of solving differential equations, dealing mostly with practical aspects FEM such as principles of formulating finite elements and super-elements, transforming their mechanical and thermo-mechanical properties. The paper presents also numerical algorithms of FEM including non-linear problems. All examples of application refer to machine design. The finite elements in a set included in the paper relate to the same problems.

Załączniki

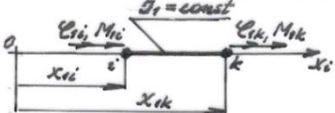
Tablica Z.1. Liniowy element skończony

				
Lp.	Wielkość	Zależność według MES		
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [u_{1i}, u_{1k}]^t$		
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2]^t$		
3.	$[X]$	$[X] = [1, x_1]$		
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix}$		
5.	$\{N\}$	$[N] = [[N_i][N_k]]$	$[N_i] = \frac{1}{l}(x_{1k} - x_1),$ $[N_k] = \frac{1}{l}(x_1 - x_{1i}),$	$l = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix}$
6.	$[D]$	$[D] = \frac{\partial}{\partial x_1}$		
7.	$[B]$	$[B] = [[B_i][B_k]]$	$[B_i] = -\frac{1}{l},$	$[B_k] = +\frac{1}{l}$
8.	$[k]$	$[k] = E$		
9.	$[K]$	$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ik}] \\ [K_{ki}] & [K_{kk}] \end{bmatrix}$	$[K_{ii}] = [K_{kk}] = \frac{EF}{l}$ $[K_{ik}] = [K_{ki}] = -\frac{EF}{l}$	
10.	$\{P\}$	$\{P\} = [P_{1i}, P_{1k}]^t$	$P_{1r} = [[K_{ri}], [K_{rk}]]\{u\}$	$r = i, k$
11.	$\{w\}$	$\{w\} = w_1 = [N]\{u\}$		
12.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = \varepsilon_1 = [B]\{u\}$		
13.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = \sigma_1 = [K][B]\{u\}$		

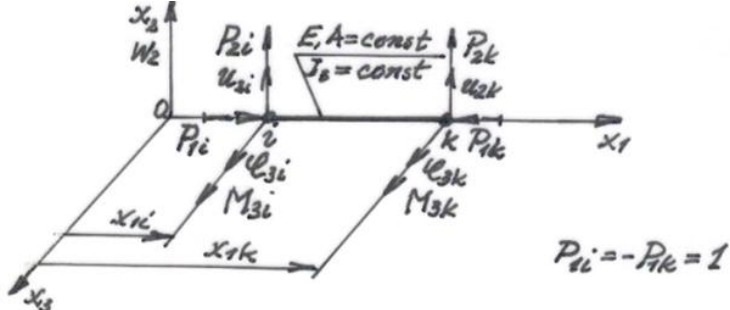
Tablica Z.2. Liniowy element skończony (sprężyna)

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [u_{1i}, u_{1k}]^t$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2]^t$
3.	$[X]$	$[X] = [1, x_1]$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix}$
5.	$[N]$	$[X][\bar{X}]^{-1} = [N] = [N_i, N_k],$
		$[N_i] = \frac{1}{l}(x_{1k} - x_{1i}), [N_k] = \frac{1}{l}(x_{1i} - x_{1k}),$
		$l = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix} = (x_{1k} - x_{1i})$
6.	$[D]$	$[D] = \frac{d}{dx_1}$
7.	$[B]$	$[B] = [B_i, B_k], \quad [B_i] = -\frac{1}{l}, \quad [B_k] = \frac{1}{l}$
8.	$[k]$	$[k] = cl$
9.	$[K]$	$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ik} \\ K_{ki} & K_{kk} \end{bmatrix},$
		$[K_{ii}] = [K_{kk}] = c, [K_{ik}] = [K_{ki}] = -c$
10.	$\{w\}$	$\{w\} = [N]\{u\}$
11.	$\{P\}$	$\{Pr\} = [K_{ri}, K_{rk}]\{u\}, r = i, k.$

Tablica Z.3. Liniowy skręcany element skończony

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{\varphi\}$	$\{\varphi\} = [\varphi_{1i}, \varphi_{1k}]^t$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2]^t$
3.	$[X]$	$[X] = [1, x_1]$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{x}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix}$
5.	$[N]$	$[N] = [N_i, N_k],$
		$[N_i] = \frac{1}{l}(x_{1k} - x_{1i}), [N_k] = \frac{1}{l}(x_{1i} - x_{1k}),$
		$l = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix} = (x_{1k} - x_{1i}).$
6.	$[D]$	$[D] = \frac{d}{dx_1}$
7.	$[B]$	$[B] = [B_i, B_k], \quad [B_i] = -\frac{1}{l}, \quad [B_k] = \frac{1}{l}$
8.	$[k]$	$[k] = G$
9.	$[K]$	$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ik} \\ K_{ki} & K_{kk} \end{bmatrix},$
		$[K_{ii}] = [K_{kk}] = \frac{GJ_1}{l}, [K_{ik}] = [K_{ki}] = -\frac{GJ_1}{l}.$
10.	$\{M\}$	$\{M\} = [M_{1i}, M_{1k}]^t = [K]\{\varphi\}$
11.	$\{\phi\}$	Kąt skręcenia: $\{\phi\} = [N]\{\varphi\}$
12.	$\{\gamma\}$	Odształcenie postaciowe: $\{\gamma\} = [B]\{\varphi\}$
13.	$\{\tau\}$	Naprężenia styczne: $\{\tau\} = [k][B]\{\varphi\}$

Tablica Z.4. Liniowy zginany i ściskany element skończony

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_k\}]^t$, $\{u_i\} = [\{u_{2i}\}, \{\varphi_{3i}\}]^t$, $\{u_k\} = [\{u_{2k}\}, \{\varphi_{3k}\}]^t$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^t$
3.	$[X]$	$[X] = [1, x_1, x_1^2, x_1^3]$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{1i}^2 & x_{1i}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{1i} & 3x_{1i}^2 \\ 1 & x_{1k} & x_{1k}^2 & x_{1k}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{1k} & 3x_{1k}^2 \end{bmatrix}$

5.	$[\bar{X}]^{-1}$	$[\bar{X}]^{-1} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} (1-3\alpha)x_{1k}^3 & -(1-\alpha)\alpha x_{1k}^4 & (3-\alpha)\alpha^2 x_{1k}^3 & -(1-\alpha)\alpha^2 x_{1k}^4 \\ 6\alpha x_{1k}^2 & (1+2\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^3 & -6\alpha x_{1k}^2 & (2+\alpha)(1-\alpha)\alpha x_{1k}^3 \\ -3(1+\alpha)x_{1k} & -(2+\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^2 & 3(1+\alpha)x_{1k} & -(1+2\alpha)(1-\alpha)x_{1k} \\ 2 & (1-\alpha)x_{1k} & -2 & (1-\alpha)x_{1k} \end{bmatrix}$
		$\alpha = \frac{x_{1i}}{x_{1k}}, l = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} \\ 1 & x_{1k} \end{bmatrix} = (x_{1k} - x_{1i}).$
6.	$[N]$	$[N(x_1)] = [X][\bar{X}]^{-1} = [N_1, N_2, N_3, N_4]$
		$[N_1] = \frac{1}{l^3} [(1-3\alpha)x_{1k}^3 + 6\alpha x_{1k}x_1 - 3(1+\alpha)x_{1k}x_1^2 + 2x_1^3]$
		$[N_2] = \frac{1}{l^3} [-(1-\alpha)\alpha x_{1k}^4 + (1+2\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^3x_1 - (2+\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^2x_1^2 + (1-\alpha)x_{1k}x_1^3]$
		$[N_3] = \frac{1}{l^3} [(3-\alpha)\alpha^2 x_{1k}^3 - 6\alpha x_{1k}^2x_1 + 3(1+\alpha)x_{1k}x_1^2 - 2x_1^3]$
		$[N_4] = \frac{1}{l^3} [-(1-\alpha)\alpha^2 x_{1k}^4 + (2+\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^3x_1 - (1+2\alpha)(1-\alpha)x_{1k}^2x_1^2 + (1-\alpha)x_{1k}x_1^3]$

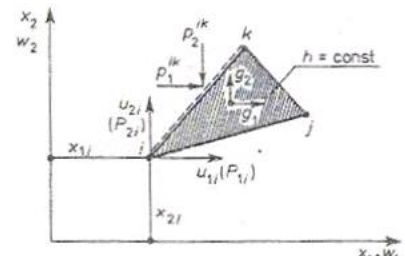
7.	[K]	$[K_{rs}] = EJ_3 \int_1^{x_{1k}} \left\{ \frac{d^2}{dx_1^2} [N_r] \frac{d^2}{dx_1^2} [N_s] \right\} dx_1$
		$r, s = 1, 2, 3, 4$
		$[K] = \frac{2EJ_3}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -6l & l^2 \\ -6 & -6l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$
8.	{P}	$\{P\} = [P_{2i}, M_{3i}, P_{2k}, M_{3k}]^t$
		$\{P_{zr}\} = \int_{1i}^{x_{1k}} [N_r] p dx_1 \quad (r = 1, 3)$
		$\{M_{3r}\} = \int_{x_{1i}}^{x_{1k}} [N_r] p dx_1 \quad (r = 2, 4)$
9.	{w}	$\{w\} = [N]\{u\}$
10.	{M _g }	$\{M_g\} = EJ_3 \frac{d^2}{dx_1^2} [N]\{u\}$

11.	$\{T\}$	$\{T\} = -EJ_3 \frac{d^3}{dx_1^3} [N] \{u\}$
12.	$[K_s]$	$[K_{rs}]_s = \int_{x_{1i}}^{x_{1k}} P_1 \frac{d}{dx_1} [N_r] \frac{d}{dx_1} [N_s] dx_1$
		$r, s = 1, 2, 3, 4$
		$[K]_s = \frac{1}{30x_{1k}^3(1-\alpha)} \begin{bmatrix} 36 & 3x_{1k}^3(1-\alpha) & -36 & 3x_{1k}^3(1-\alpha) \\ 3x_{1k}^3(1-\alpha) & 4x_{1k}^4(1-\alpha)^3 & -3x_{1k}^3(1-\alpha) & x_1^4(1-\alpha)^2 \\ -36 & -3x_{1k}^3(1-\alpha) & 36 & -3x_{1k}^3(1-\alpha) \\ 3x_{1k}(1-\alpha) & x_{1k}^4(1-\alpha)^2 & -3x_{1k}^3(1-\alpha) & 4x_{1k}^4(1-\alpha)^2 \end{bmatrix}$
13.	Osiowa siła krytyczna λ^*	Obliczyć należy z warunku stateczności $\det([K] - \lambda^*[K]_s) = 0$

Tablica Z.5. Liniowy zginany i rozciągany element skończony

Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	Równania równowagi	$\{w\} = [w_1, w_2, \varphi_3]^t$
		$\frac{d^2}{d\zeta_1^2} \left(EJ_3 \frac{d^2 w_2}{d\zeta_1^2} \right) = q, \quad \frac{d}{d\zeta_1} \left(EA \frac{dw_1}{d\zeta_1} \right) = P$
2.	$\{u\}$	$\{u\} = [w_{1i}, w_{2i}, \varphi_{3i}, w_{1k}, w_{2k}, \varphi_{3k}]^t$
3.	$[N]$	$[N] = \left[\left(1 - \frac{\zeta_1}{l} \right), \frac{6\zeta_2}{l} \left(\frac{\zeta_1}{l} - \frac{\zeta_1^2}{l^2} \right), -\zeta_2 \left(1 - \frac{4\zeta_1}{l} + \frac{3\zeta_1^2}{l^2} \right), \right.$ $\left. \left(\frac{\zeta_1}{l} \right), -\frac{6\zeta_2}{l} \left(\frac{\zeta_1}{l} - \frac{\zeta_1^2}{l^2} \right), \zeta_2 \left(\frac{2\zeta_1}{l} - \frac{3\zeta_1^2}{l^2} \right) \right]$
4.	$[D]$	$[D] = \frac{d}{d\zeta_1}$
5.	$[B]$	$[B] = \left[-\frac{1}{l}, \frac{6\zeta_2}{l} \left(\frac{1}{l} - \frac{2\zeta_1}{l^2} \right), -\zeta_2 \left(-\frac{4}{l} + \frac{6\zeta_1}{l^2} \right), \right.$ $\left. \frac{1}{l}, -\frac{6\zeta_2}{l} \left(\frac{1}{l} - \frac{2\zeta_1}{l^2} \right), \zeta_2 \left(\frac{2}{l} - \frac{6\zeta_1}{l^2} \right) \right]$
6.	$[K]$	$[K] = Eh \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^t [B] d\zeta_2 d\zeta_1$
7.	$\{P\}$	$\{P\} = [P_{1i}, P_{2i}, M_{3i}, P_{1k}, P_{2k}, M_{3k}]^t = [K]\{u\}$
8.	$\{w\}$	$\{w\} = [N]\{u\}$
9.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} = [B][K]^{-1}\{P\}$
10.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = E[B]\{u\}$

Tablica Z.6. Płaski trójkątny element skończony

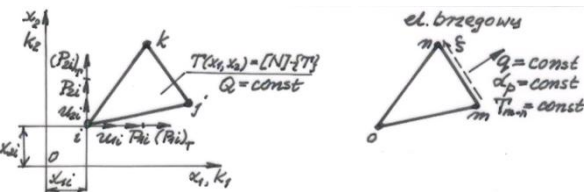
 $\begin{cases} \{\epsilon_0\} = \{0\}, \\ \{\sigma_0\} = \{0\}, \\ \{g\} = \{0\}, \\ \{P\} = \{0\}, \\ \{Q\} = \{0\}. \end{cases}$		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}, \{u_k\}]^t, \{u_r\} = [u_{1r}, u_{2r}]^t, r = i, j, k$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2, \dots, a_6]^t$
3.	$\{X\}$	$[X] = [[X_1], [X_2]]$ $[X_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[X_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} [\bar{X}_{i1}] & [\bar{X}_{i2}] \\ [\bar{X}_{j1}] & [\bar{X}_{j2}] \\ [\bar{X}_{k1}] & [\bar{X}_{k2}] \end{bmatrix}$

		$[\bar{X}_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1r} & x_{2r} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[\bar{X}_{r2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{1r} & x_{2r} \end{bmatrix}$ $r = i, j, k$
5.	[N]	$[N] = [N_i, N_j, N_k]$ $[N_r] = \frac{1}{2S}(\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) \begin{matrix} [1] \\ 2 \times 2 \end{matrix}$ $r = i, j, k$
		$2S = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$
		$\alpha_i = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} \\ x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$ $\alpha_j = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} \\ x_{1i} & x_{2i} \end{bmatrix}$ $\alpha_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} \\ x_{1j} & x_{2j} \end{bmatrix}$
		$\beta_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} \\ 1 & x_{2k} \end{bmatrix}$ $\beta_j = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2k} \\ 1 & x_{2i} \end{bmatrix}$ $\beta_k = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2i} \\ 1 & x_{2j} \end{bmatrix}$
		$\gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 \\ x_{1k} & 1 \end{bmatrix}$ $\gamma_j = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & 1 \\ x_{1i} & 1 \end{bmatrix}$ $\gamma_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & 1 \\ x_{1j} & 1 \end{bmatrix}$
6.	[D]	$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

7.	[B]	$[B] = \left[[B_i], [B_j], [B_k] \right]$
		$[B_r] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \beta_r & 0 \\ 0 & \gamma_r \\ \gamma_r & \beta_r \end{bmatrix}$ $r = i, j, k$
8.	[k]	W płaskim stanie naprężen: $[k] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix};$
9.	[K]	$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jk}] \\ [K_{ki}] & [K_{kj}] & [K_{kk}] \end{bmatrix}$
		$[K_{rs}] = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)S} \begin{bmatrix} \beta_r\beta_s + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_r\gamma_s & \nu\beta_r\gamma_s + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_r\beta_s \\ \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_r\gamma_s + \nu\gamma_r\beta_s & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_r\beta_s + \gamma_r\gamma_s \end{bmatrix},$ $r, s = i, j, k$

10.	$\{P\}$	$\{P\} = [\{P_i\}, \{P_j\}, \{P_k\}]^t$
		$\{P_r\} = [P_{1r}, P_{2r}]^t = \left[[K_{ri}] [K_{rj}] [K_{rk}] \right] \{u\}, \quad r = i, j, k.$
11.	$\{w\}$	$\{w\} = [w_1, w_2]^t = [N]\{u\}$
12.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]^t = [B]\{u\}$
13.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^t = [k][B]\{u\}$

Tablica Z.7. Trójkątny płaski element skończony (zag. przewodnictwa ciepła i termosprężystości)

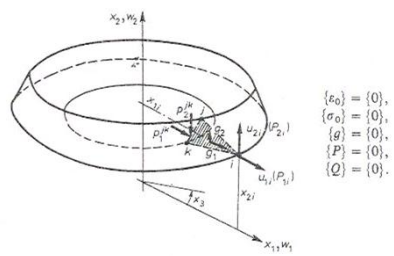
 T - temperatura, Q - objętościowe wewnętrzne źródło ciepła, q - zewnętrzne źródło ciepła, k - współczynnik przewodzenia ciepła, α_p - współczynnik przejmowania ciepła.		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{T\}$	$\{T\} = [T_i, T_j, T_k]^t$
2.	$\{N\}$	$[N] = [N_i], [N_j], [N_k]^t,$ $[N_r] = \frac{1}{2S}(\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2),$ $r = i, j, k.$
		$2S = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$
		$\alpha_i = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} \\ x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$ $\alpha_j = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} \\ x_{1i} & x_{2i} \end{bmatrix}$ $\alpha_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} \\ x_{1j} & x_{2j} \end{bmatrix}$

		$\beta_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} \\ 1 & x_{2k} \end{bmatrix} \quad \beta_j = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2k} \\ 1 & x_{2i} \end{bmatrix} \quad \beta_k = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} \\ 1 & x_{2i} \end{bmatrix}$
		$\gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 \\ x_{1k} & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma_j = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & 1 \\ x_{1i} & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & 1 \\ x_{1j} & 1 \end{bmatrix}$
3.	$\frac{\partial T}{\partial x_w}$ ($w = 1, 2$)	$\frac{\partial}{\partial x_1} [N] \{T\} = \frac{1}{2S} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_1}, \frac{\partial N_j}{\partial x_1}, \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \right] \{T\} = \frac{1}{2S} [\beta_i, \beta_j, \beta_k] \{T\},$
		$\frac{\partial}{\partial x_2} [N] \{T\} = \frac{1}{2S} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_2}, \frac{\partial N_j}{\partial x_2}, \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \right] \{T\} = \frac{1}{2S} [\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k] \{T\}.$
4.	$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_w} \right)$ ($w = 1, 2$)	$\frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = \frac{\beta_r}{2S}, \quad \frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \frac{\gamma_r}{2S}, \quad r = i, j, k$
5.	$[h_s]$	$\iint \left[k_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial T_s} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + k_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial T_s} \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \right] dx_1 dx_2 = [h_s] \{T\}.$
		$[h_s] = \frac{1}{4S} (k_1 [\beta_i, \beta_j, \beta_k] \beta_s + k_2 [\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k] \gamma_s), \quad s = i, j, k.$
6.	$[H]$	$[h_{rs}] = \frac{1}{4S} (k_1 \beta_r \beta_s + k_2 \gamma_r \gamma_s), \quad r, s = i, j, k,$

		$[H] = \frac{k_1}{4} \begin{bmatrix} \beta_i \beta_i & \beta_j \beta_i & \beta_k \beta_i \\ \beta_i \beta_j & \beta_j \beta_j & \beta_k \beta_j \\ \beta_i \beta_k & \beta_j \beta_k & \beta_k \beta_k \end{bmatrix} + \frac{k_2}{4S} \begin{bmatrix} \gamma_i \gamma_i & \gamma_j \gamma_i & \gamma_k \gamma_i \\ \gamma_i \gamma_j & \gamma_j \gamma_j & \gamma_k \gamma_j \\ \gamma_i \gamma_k & \gamma_j \gamma_k & \gamma_k \gamma_k \end{bmatrix}$
		Wtedy, gdy $k_1 = k_2 = k$, to: $[h_{rs}] = \frac{k}{4S} (\beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s), \quad r, s = i, j, k.$
		$[H] = \frac{k}{4S} \begin{bmatrix} \beta_i^2 + \gamma_i^2 & \beta_j \beta_i + \gamma_j \gamma_i & \beta_k \beta_i + \gamma_k \gamma_i \\ \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j & \beta_j^2 + \gamma_j^2 & \beta_k \beta_j + \gamma_k \gamma_j \\ \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k & \beta_j \beta_k + \gamma_j \gamma_k & \beta_k^2 + \gamma_k^2 \end{bmatrix}$
7.	$\{F_w\}$	$\{F_w\} = [F_{wi}, F_{wj}, F_{wk}]^t,$
		$F_{wr} = - \iint Q \frac{\partial T}{\partial T_r} dx_1 dx_2 = - \frac{Q}{2S} \iint (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) dx_1 dx_2 = - \frac{QS}{3},$
		$\{F_w\} = - \frac{QS}{3} [1, 1, 1]^t.$
8.	$\{F_z\}$	(dot. elementu brzegowego o węzłach m, n;) $\{F_z\} = [F_{zm}, F_{zn}]^t,$

		$F_{zr} = \frac{\partial}{\partial T_r} \left[\int qT(\zeta) d\zeta + \int \frac{1}{2} \alpha_p T(\zeta) d\zeta \right] = \frac{1}{2} l(q + \alpha_p T_{mn}),$
		$l^2 = (x_{1m} - x_{1n})^2 + (x_{2m} - x_{2n})^2$
9.	$\{T\}$	$\{T\} = [H]^{-1} \{F_w\}.$
10.	$\{\varepsilon\}_T$	$\{\varepsilon\}_T = [\alpha T, \alpha T, 0]^t \quad (\alpha - \text{współczynnik rozszerzalności cieplnej})$
11.	$\{P\}_T$	$\{P\}_T = [\{P_i\}_T, \{P_j\}_T, \{P_k\}_T]^t, \quad \{P_T\}_T = [P_{1r}, P_{2r}]_T^t \quad r = i, j, k,$
		$\{P\}_T = \iint [B]^t [k] \{\varepsilon\}_T dx_1 dx_2$
12.	$\{u\}_T$	$\{u\}_T = [K]^{-1} (\{P\} + \{P\}_T)$ $\{P\}$ – siły węzłowe pochodzenia nietermicznego; $[B], [k], [K]$ wg tablicy Z.6.
13.	$\{\sigma\}_T$	$\{\sigma\}_T = [k][B]\{u\}_T$

Tablica Z.8. Osiowosymetryczny element trójkątny

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}, \{u_k\}]^t$, $\{u_r\} = [u_{1r}, u_{2r}]^t$, $r = i, j, k$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^t$
3.	$[X]$	$[X] = [[X_1], [X_2]]$, $[X_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[X_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} [X_{i1}] & [X_{i2}] \\ [X_{j1}] & [X_{j2}] \end{bmatrix}$, $[\bar{X}_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1r} & x_{2r} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r = i, j, k$

		$[\bar{X}_{r2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{1r} & x_{2r} \end{bmatrix},$
5.	[N]	$[N] = [N_i], [N_j], [N_k]$
		$[N_1] = \frac{1}{2S}(\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = i, j, k$
		$2S = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$
		$\alpha_i = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} \\ x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \quad \alpha_j = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} \\ x_{1i} & x_{2i} \end{bmatrix} \quad \alpha_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} \\ x_{1j} & x_{2j} \end{bmatrix}$
		$\beta_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} \\ 1 & x_{2k} \end{bmatrix} \quad \beta_j = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2k} \\ 1 & x_{2i} \end{bmatrix} \quad \beta_k = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2i} \\ 1 & x_{2j} \end{bmatrix}$
		$\gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 \\ x_{1k} & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & 1 \\ x_{1i} & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & 1 \\ x_{1j} & 1 \end{bmatrix}$

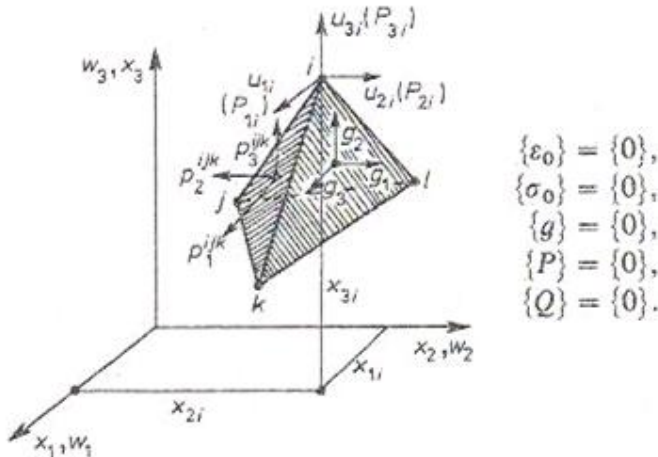
6.	$[D]$	$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$
7.	$[B]$	$[B] = [B_i], [B_j], [B_k]$
		$[B_r] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \beta_r & 0 \\ 0 & \gamma_r \\ \frac{1}{x_1} \alpha_r + \beta_r + \frac{x_2}{x_1} \gamma_r & 0 \\ \gamma_r & \beta_r \end{bmatrix}, \quad r = i, j, k$
8.	$[k]$	$[k] = \frac{E}{2(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 2(1-v) & 2v & 2v & 0 \\ 2v & 2(1-v) & 2v & 0 \\ 2v & 2v & 2(1-v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix}$
9.	$[K]$	$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jk}] \\ [K_{ki}] & [K_{kj}] & [K_{kk}] \end{bmatrix}$ $[K_{rs}] = \frac{\pi E}{4(1+v)S} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

9.		$\bar{X}_1 = \frac{1}{3}(x_{1i} + x_{1j} + x_{1k}),$ $\bar{X}_2 = \frac{1}{3}(x_{2i} + x_{2j} + x_{2k}),$ $r, s = i, j, k$
		$K_{11} = \frac{2(1-v)}{1-2v} I_1 \alpha_r \alpha_s + \frac{4}{1-2v} \bar{X}_1 \beta_r \beta_s + \left[\bar{X}_1 + \frac{2(1-v)}{1-2v} I_3 \right] \gamma_r \gamma_s + \frac{2}{1-2v} (\alpha_r \beta_s + \alpha_s \beta_r) + \frac{2(1-v)}{1-2v} I_2 (\alpha_r \gamma_s + \alpha_s \gamma_r) + \frac{2}{1-v} \bar{X}_2 (\beta_r \gamma_s + \beta_s \gamma_r)$
		$K_{12} = \frac{2v}{1-2v} \alpha_r \gamma_s + \frac{4v}{1-2v} \bar{X}_1 \beta_r \gamma_s + \bar{X}_1 \beta_s \gamma_r + \frac{2v}{1-2v} \bar{X}_2 \gamma_r \gamma_s$
		$K_{21} = \frac{2v}{1-2v} \alpha_s \gamma_r + \frac{4v}{1-2v} \bar{X}_1 \beta_s \gamma_r + \bar{X}_1 \beta_r \gamma_s + \frac{2v}{1-2v} \bar{X}_2 \gamma_r \gamma_s$
		$K_{22} = \bar{X}_1 \beta_r \beta_s + \frac{2(1-v)}{1-2v} \bar{X}_1 \gamma_r \gamma_s$
		$SI_1 = (A_{ji} - A_{ik}) \ln x_{1i} + (A_{kj} - A_{ji}) \ln x_{1j} + (A_{ik} - A_{kj}) \ln x_{1k}$

9.		$SI_2 = \frac{1}{2}[(A_{ji}^2 - A_{ik}^2) \ln x_{1i} + (A_{kj}^2 - A_{ji}^2) \ln x_{1j} + (A_{ik}^2 - A_{kj}^2) \ln x_{1k}]$ $+ [A_{ik}B_{ik}(x_{1k} - x_{1i}) + A_{kj}B_{kj}(x_{1j} - x_{1k}) + A_{ji}B_{ji}(x_{1i} - x_{1j})]$ $+ \frac{1}{2}[B_{ik}^2(x_{1k}^2 - x_{1i}^2) + B_{kj}^2(x_{1j}^2 - x_{1k}^2) + B_{ji}^2(x_{1i}^2 - x_{1j}^2)]$
		$SI_3 = \frac{1}{3}[(A_{ji}^3 - A_{ik}^3) \ln x_{1i} + (A_{kj}^3 - A_{ji}^3) \ln x_{1j} + (A_{ik}^3 - A_{kj}^3) \ln x_{1k}] + [A_{ik}^2B_{ik}(x_{1k} - x_{1i}) +$ $A_{kj}^2B_{kj}(x_{1j} - x_{1k}) + A_{ji}^2B_{ji}(x_{1i} - x_{1j})] + \frac{1}{2}[A_{ik}B_{ik}^2(x_{1k}^2 - x_{1i}^2) + A_{kj}B_{kj}^2(x_{1j}^2 - x_{1k}^2) +$ $A_{ji}B_{ji}^2(x_{1i}^2 - x_{1j}^2)] + \frac{1}{9}[B_{ik}^3(x_{1k}^3 - x_{1i}^3) + B_{kj}^3(x_{1j}^3 - x_{1k}^3) + B_{ji}^3(x_{1i}^3 - x_{1j}^3)]$
		$A_{ji} = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k}, \quad A_{ik} = -\frac{\alpha_j}{\gamma_j}, \quad A_{kj} = -\frac{\alpha_i}{\gamma_i},$
		$\beta_{ji} = -\frac{\beta_k}{\gamma_k}, \quad \beta_{ik} = -\frac{\beta_j}{\gamma_j}, \quad \beta_{kj} = -\frac{\beta_i}{\gamma_i},$
10.	$\{P\}$	$\{P\} = [\{P_i\}, \{P_j\}, \{P_k\}]^t$ $\{P_r\} = [P_{1r}, P_{2r}]^t = [K_{ri}][K_{rj}][K_{rk}]\{u\}, \quad r = i, j, k$

11.	$\{w\}$	$\{w\} = [w_1, w_2]^t = [N]\{u\}$
12.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}]^t = [B]\{u\}$
13.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}]^t = [k][B]\{u\}$

Tablica Z.9. Czworosieczny element skończony

				
Lp.	Wielkość	Zależność według MES		
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}, \{u_l\}, \{u_k\}]^t,$	$\{u_r\} = [u_{1r}, u_{2r}, u_{3r}]^t,$	$r = i, j, l, k$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^t$		

3.	$[X]$	$[X] = [[X_1][X_2][X_3]]$
		$[X_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$ $[X_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$ $[X_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix},$
4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} [\bar{X}_{i1}] & [\bar{X}_{i2}] & [\bar{X}_{i3}] \\ [\bar{X}_{j1}] & [\bar{X}_{j2}] & [\bar{X}_{j3}] \\ [\bar{X}_{l1}] & [\bar{X}_{l2}] & [\bar{X}_{l3}] \\ [\bar{X}_{k1}] & [\bar{X}_{k2}] & [\bar{X}_{k3}] \end{bmatrix}$
		$[\bar{X}_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & x_{1r} & x_{2r} & x_{3r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$ $[\bar{X}_{r2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{1r} & x_{2r} & x_{3r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$
		$[\bar{X}_{r1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{1r} & x_{2r} & x_{3r} \end{bmatrix}, \quad r = i, j, k$
5.	$[N]$	$[N] = [[N_i], [N_j], [N_l], [N_k]],$ $6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \end{bmatrix}$

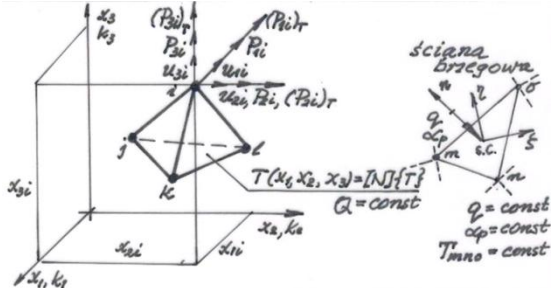
5.		$[N_r] = \frac{1}{6V} (\alpha_r, \beta_r x_1 + \gamma_r x_2 + \delta_2 x_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = i, j, l, k,$	
		$\alpha_i = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \end{bmatrix}$	$\alpha_j = \det \begin{bmatrix} x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{bmatrix},$
		$\alpha_l = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \end{bmatrix}, \quad \alpha_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \end{bmatrix},$	
		$\beta_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{2l} & x_{3l} \\ 1 & x_{2k} & x_{3k} \end{bmatrix}$	$\beta_j = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2l} & x_{3l} \\ 1 & x_{2k} & x_{3k} \\ 1 & x_{2i} & x_{3i} \end{bmatrix}$
		$\beta_l = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2k} & x_{3k} \\ 1 & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{2j} & x_{3j} \end{bmatrix} \quad \beta_k = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{2l} & x_{3l} \end{bmatrix}$	
		$\gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 & x_{3j} \\ x_{1l} & 1 & x_{3l} \\ x_{1k} & 1 & x_{3k} \end{bmatrix},$	$\gamma_j = \det \begin{bmatrix} x_{1l} & 1 & x_{3l} \\ x_{1k} & 1 & x_{3k} \\ x_{1i} & 1 & x_{3i} \end{bmatrix},$

		$\gamma_l = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & 1 & x_{3k} \\ x_{1i} & 1 & x_{3i} \\ x_{1j} & 1 & x_{3j} \end{bmatrix}, \quad \gamma_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & 1 & x_{3i} \\ x_{1j} & 1 & x_{3j} \\ x_{1l} & 1 & x_{3l} \end{bmatrix}$
		$\delta_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} & 1 \\ x_{1l} & x_{2l} & 1 \\ x_{1k} & x_{2k} & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_j = -\det \begin{bmatrix} x_{1l} & x_{2l} & 1 \\ x_{1k} & x_{2k} & 1 \\ x_{1i} & x_{2i} & 1 \end{bmatrix}$
		$\delta_l = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} & 1 \\ x_{1i} & x_{2i} & 1 \\ x_{1j} & x_{2j} & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & 1 \\ x_{1j} & x_{2j} & 1 \\ x_{1l} & x_{2l} & 1 \end{bmatrix}$
6.	$[D]$	$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$

7.	$[B]$	$[B] = \left[[B_i], [B_j], [B_l], [B_k] \right], \quad [B_r] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_r & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_r & 0 \\ 0 & 0 & \delta_r \\ \gamma_r & \beta_r & 0 \\ 0 & \delta_r & \gamma_r \\ \delta_r & 0 & \beta_r \end{bmatrix}, \quad r = i, j, l, k$
8.	$[k]$	$[k] = \frac{E}{1+v} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} + \frac{v}{1-2v} \begin{bmatrix} [1] & [0] \\ 3 \times 3 & [0] \end{bmatrix} \right)$
9.	$[K]$	$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{il}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jl}] & [K_{jk}] \\ [K_{li}] & [K_{lj}] & [K_{ll}] & [K_{lk}] \\ [K_{ki}] & [K_{kj}] & [K_{kl}] & [K_{kk}] \end{bmatrix}$ $[K_{rs}] = \frac{E}{12(1+v)} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \frac{2(1-v)}{1-2v} \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s + \delta_r \delta_s & \frac{2v}{1-2v} \beta_r \gamma_s + \gamma_r \beta_s & \frac{2v}{1-2v} \beta_r \delta_s + \delta_r \beta_s \\ \beta_r \gamma_s + \frac{2v}{1-2v} \gamma_r \beta_s & \beta_r \beta_s + \frac{2(1-v)}{1-2v} \gamma_r \gamma_s + \delta_r \delta_s & \frac{2v}{1-2v} \gamma_r \delta_s + \delta_r \gamma_s \\ \beta_r \delta_s + \frac{2v}{1-2v} \delta_r \beta_s & \gamma_r \delta_s + \frac{2v}{1-2v} \delta_r \gamma_s & \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s + \frac{2(1-v)}{1-2v} \delta_r \delta_s \end{bmatrix}$ $r, s = i, j, l, k$

10.	$\{P\}$	$\{P\} = [\{P_i\}, \{P_j\}, \{P_l\}, \{P_k\}]^t$
		$\{P_r\} = [P_{1r}, P_{2r}, P_{3r}]^t = \left[[K_{ri}] [K_{rj}] [K_{rl}] [K_{rk}] \right] \{u\}$
		$r = i, j, l, k$
11.	$\{w\}$	$\{w\} = [w_1, w_2, w_3]^t = [N]\{u\}$
12.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]^t = [B]\{u\}$
13.	$\{\sigma_0\}$	$\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}]^t = [k][B]\{u\}$

Tablica Z.10. Czworosieczny element skończony (zag. przewodnictwa ciepła i termosprężystości, oznaczenia por. tablica Z.7)

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{T\}$	$\{T\} = [T_i, T_j, T_k, T_l]^t$
2.	$[N]$	$[N] = [N_i, N_j, N_k, N_l]^t, \quad [N_r] = \frac{1}{6V} (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2 + \delta_r x_3), \quad r = i, j, k, l.$
		$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ 1 & x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \end{bmatrix}$

		$\alpha_i = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \end{bmatrix}, \quad \alpha_j = \det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{bmatrix}, \quad \alpha_k = \det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \end{bmatrix}, \quad \alpha_l = \det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ x_{1j} & x_{2j} & x_{3j} \end{bmatrix},$
		$\beta_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{2l} & x_{3l} \\ 1 & x_{2k} & x_{3k} \end{bmatrix}, \quad \beta_j = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2l} & x_{3l} \\ 1 & x_{2k} & x_{3k} \\ 1 & x_{2i} & x_{3i} \end{bmatrix}, \quad \beta_k = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{2j} & x_{3j} \\ 1 & x_{2l} & x_{3l} \end{bmatrix}, \quad \beta_l = -\det \begin{bmatrix} 1 & x_{2k} & x_{3k} \\ 1 & x_{2i} & x_{3i} \\ 1 & x_{2j} & x_{3j} \end{bmatrix},$
		$\gamma_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 & x_{3j} \\ x_{1l} & 1 & x_{3l} \\ x_{1k} & 1 & x_{3k} \end{bmatrix}, \quad \gamma_j = -\det \begin{bmatrix} x_{1l} & 1 & x_{3l} \\ x_{1k} & 1 & x_{3k} \\ x_{1i} & 1 & x_{3i} \end{bmatrix}, \quad \gamma_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & 1 & x_{3i} \\ x_{1j} & 1 & x_{3j} \\ x_{1l} & 1 & x_{3l} \end{bmatrix}, \quad \gamma_l = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & 1 & x_{3k} \\ x_{1i} & 1 & x_{3i} \\ x_{1j} & 1 & x_{3j} \end{bmatrix},$
		$\delta_i = -\det \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} & 1 \\ x_{1l} & x_{2l} & 1 \\ x_{1k} & x_{2k} & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_j = -\det \begin{bmatrix} x_{1l} & x_{2l} & 1 \\ x_{1k} & x_{2k} & 1 \\ x_{1i} & x_{2i} & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_k = -\det \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & 1 \\ x_{1j} & x_{2j} & 1 \\ x_{1l} & x_{2l} & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_l = -\det \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} & 1 \\ x_{1i} & x_{2i} & 1 \\ x_{1j} & x_{2j} & 1 \end{bmatrix},$
3.	$\frac{\partial T}{\partial x_w}$ ($w = 1, 2, 3$)	$\frac{\partial}{\partial x_1} [N] \{T\} = \frac{1}{6V} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_1}, \frac{\partial N_j}{\partial x_1}, \frac{\partial N_k}{\partial x_1}, \frac{\partial N_l}{\partial x_1} \right] \{T\} = \frac{1}{6v} [\beta_i, \beta_j, \beta_k, \beta_l] \{T\},$
		$\frac{\partial}{\partial x_2} [N] \{T\} = \frac{1}{6V} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_2}, \frac{\partial N_j}{\partial x_2}, \frac{\partial N_k}{\partial x_2}, \frac{\partial N_l}{\partial x_2} \right] \{T\} = \frac{1}{6v} [\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k, \gamma_l] \{T\},$

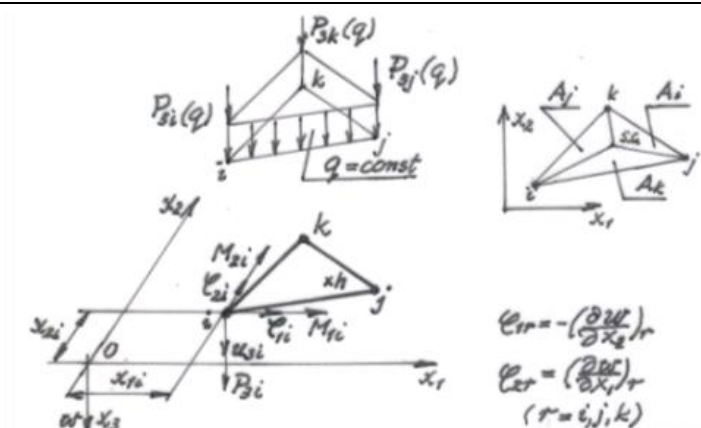
		$\frac{\partial}{\partial x_3} [N]\{T\} = \frac{1}{6V} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_3}, \frac{\partial N_j}{\partial x_3}, \frac{\partial N_k}{\partial x_3}, \frac{\partial N_l}{\partial x_3} \right] \{T\} = \frac{1}{6v} [\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l] \{T\},$
4.	$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_w} \right)$ ($w = 1, 2, 3$)	$\frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = \frac{\beta_r}{6V}, \quad \frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \frac{\gamma_r}{6V}, \quad \frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \frac{\delta_r}{6V}, \quad r = i, j, k, l.$
5.	$[h_s]$	$\iiint [k_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial T_s} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + k_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial T_s} \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + k_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial T_s} \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)] dx_1 dx_2 dx_3 = [h_s] \{T\}$ $[h_s] = \frac{1}{36V} (k_1 [\beta_i, \beta_j, \beta_k, \beta_l] \beta_s + k_2 [\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k, \gamma_l] \gamma_s + k_3 [\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l] \delta_s)$
6.	$[H]$	$h_{rs} = \frac{1}{36V} (k_1 \beta_r \beta_s + k_2 \gamma_r \gamma_s + k_3 \delta_r \delta_s), \quad r, s = i, j, k, l.$
		$[H] = \frac{k_1}{36V} \begin{bmatrix} \beta_i \beta_i & \beta_j \beta_i & \beta_k \beta_i & \beta_l \beta_i \\ \beta_i \beta_j & \beta_j \beta_j & \beta_k \beta_j & \beta_l \beta_j \\ \beta_i \beta_k & \beta_j \beta_k & \beta_k \beta_k & \beta_l \beta_k \\ \beta_i \beta_l & \beta_j \beta_l & \beta_k \beta_l & \beta_l \beta_l \end{bmatrix} +$
		$+ \frac{k_2}{36V} \begin{bmatrix} \gamma_i \gamma_i & \gamma_j \gamma_i & \gamma_k \gamma_i & \gamma_l \gamma_i \\ \gamma_i \gamma_j & \gamma_j \gamma_j & \gamma_k \gamma_j & \gamma_l \gamma_j \\ \gamma_i \gamma_k & \gamma_j \gamma_k & \gamma_k \gamma_k & \gamma_l \gamma_k \\ \gamma_i \gamma_l & \gamma_j \gamma_l & \gamma_k \gamma_l & \gamma_l \gamma_l \end{bmatrix} +$

		$+ \frac{k_3}{36V} \begin{bmatrix} \delta_i \delta_i & \delta_j \delta_i & \delta_k \delta_i & \delta_l \delta_i \\ \delta_i \delta_j & \delta_j \delta_j & \delta_k \delta_j & \delta_l \delta_j \\ \delta_i \delta_k & \delta_j \delta_k & \delta_k \delta_k & \delta_l \delta_k \\ \delta_i \delta_l & \delta_j \delta_l & \delta_k \delta_l & \delta_l \delta_l \end{bmatrix}$
7.	[H]	<i>W przypadku izotropowego przepływu ciepła, tj. gdy $k_1 = k_2 = k_3 = k$:</i>
		$h_{rs} = \frac{k}{36V} (\beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s + \delta_r \delta_s) \quad r, s = i, j, k, l$
		$[H] = \frac{k}{36V} \begin{bmatrix} \beta_i^2 + \gamma_i^2 + \delta_i^2, & \beta_j \beta_i + \gamma_j \gamma_i + \delta_j \delta_i, & \beta_k \beta_i + \gamma_k \gamma_i + \delta_k \delta_i, & \beta_l \beta_i + \gamma_l \gamma_i + \delta_l \delta_i \\ \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j + \delta_i \delta_j, & \beta_j^2 + \gamma_j^2 + \delta_j^2, & \beta_k \beta_j + \gamma_k \gamma_j + \delta_k \delta_j, & \beta_l \beta_j + \gamma_l \gamma_j + \delta_l \delta_j \\ \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k + \delta_i \delta_k, & \beta_j \beta_k + \gamma_j \gamma_k + \delta_j \delta_k, & \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2, & \beta_l \beta_k + \gamma_l \gamma_k + \delta_l \delta_k \\ \beta_i \beta_l + \gamma_i \gamma_l + \delta_i \delta_l, & \beta_j \beta_l + \gamma_j \gamma_l + \delta_j \delta_l, & \beta_k \beta_l + \gamma_k \gamma_l + \delta_k \delta_l, & \beta_l^2 + \gamma_l^2 + \delta_l^2 \end{bmatrix}$
8.	{F _w }	$\{F_w\} = [F_{wi}, F_{wj}, F_{wk}, F_{wl}]^t,$
		$F_{wr} = -\frac{Q}{6V} \iiint (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2 + \delta_r x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{QV}{4},$

		$\{F_w\} = -\frac{QV}{4} [1,1,1,1]^t.$
9.	$\{F_z\}$	dot. elementu brzegowego o węzłach i,j,k:
		$\{F_z\} = [F_{zi}, F_{zj}, F_{zk}]^t$
		$F_{zr} = \frac{\partial}{\partial T_r} \left[\iint qT(\zeta, \eta) ds + \iint \frac{1}{2} \alpha p T(\zeta, \eta) ds \right] = \frac{S}{3} (q + \alpha p T_{ijk}).$
10.	$\{T\}$	$\{T\} = [H]^{-1} \{F_w\}$
11.	$\{\varepsilon\}_T$	$\{\varepsilon\}_r = [\alpha T, \alpha T, \alpha T, 0]^t$ α – współczynnik rozszerzalności cieplnej
12.	$\{P\}_T$	$\{P\}_T = [\{P_i\}_T, \{P_j\}_T, \{P_k\}_T, \{P_l\}_T]^t,$
		$\{P_r\}_T = [P_{1r}, P_{2r}, P_{3r}]^t$

		$\{P\}_T = \iiint [B]^t [k] \{\varepsilon\}_T dx_1 dx_2 dx_3, \quad r = i, j, k, l$
13.	$\{u\}_T$	$\{u\}_T = [K]^{-1}(\{P\} + \{P\}_T); ([B], [k], [K] \text{ wg tablicy Z. 9})$
14.	$\{\sigma\}_T$	$\{\sigma\}_T = [k][B]\{u\}_T$

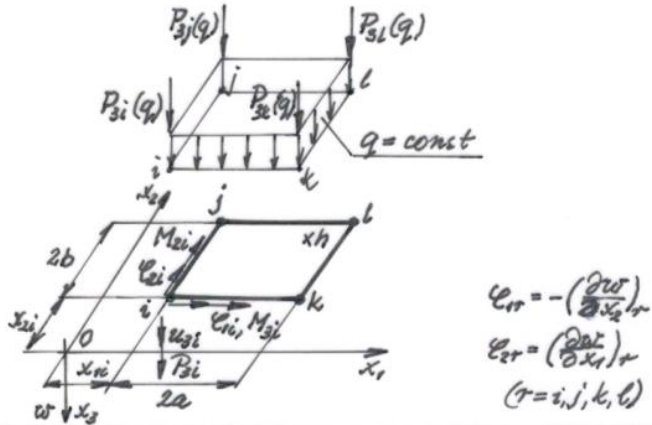
Tablica Z.11. Trójkątny płaski (płytkowy, powłokowy) element skończony

		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}, \{u_k\}]^t, \quad \{u_r\} = [u_{3r}, \varphi_{1r}, \varphi_{2r}]^t, \quad r = i, j, k$
2.	$\{\bar{u}\}$	$\{\bar{u}\} = [\{\bar{u}_i\}, \{\bar{u}_j\}, \{\bar{u}_k\}]^t, \quad \{\bar{u}_r\} = [\bar{\varphi}_{1r}, \bar{\varphi}_{2r}]^t, \quad r = i, j, k$
		$\{\bar{u}\} = [T]\{u\},$ gdzie
		$[T] = \begin{bmatrix} c_i & 2\Delta & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 \\ -b_i & 0 & 2\Delta & -b_j & 0 & 0 & -b_k & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & c_j & 2\Delta & 0 & c_k & 0 & 0 \\ -b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 2\Delta & -b_k & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 2\Delta & 0 \\ -b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 0 & -b_k & 0 & 2\Delta \end{bmatrix}$
		$2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}$
		$b_i = x_{2j} - x_{2k}, \quad b_j = x_{2k} - x_{2i}, \quad b_k = x_{2i} - x_{2j},$
		$c_i = x_{1k} - x_{1j}, \quad c_j = x_{1i} - x_{1k}, \quad c_k = x_{1j} - x_{1i}.$
3.	$[N]$	$[N] = [[N_i], [N_j], [N_k]], \quad [N_r] = [N_{1r}, N_{2r}], \quad r = i, j, k.$

		$N_{1i} = (b_k L_j - b_j L_k) L_i^2; \quad N_{2i} = (c_k L_j - c_j L_k) L_i^2;$
		$N_{1j} = (b_i L_k - b_k L_i) L_j^2; \quad N_{2j} = (c_i L_k - c_k L_j) L_j^2;$
		$N_{1k} = (b_j L_i - b_i L_j) L_k^2; \quad N_{2k} = (c_j L_i - c_i L_j) L_k^2.$
		$gdzie \quad L_i = \frac{(a_i + b_i x_1 + c_i x_2)}{2\Delta}, \quad a_i = x_{1j} x_{2k} - x_{1k} x_{2j},$
		$L_j = \frac{(a_j + b_j x_1 + c_j x_2)}{2\Delta}, \quad a_j = x_{1k} x_{2i} - x_{1i} x_{2k},$
		$L_k = \frac{(a_k + b_k x_1 + c_k x_2)}{2\Delta}, \quad a_k = x_{1i} x_{2j} - x_{1j} x_{2i},$
4.	$[D]$	$[D] = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^t$
5.	$[\bar{B}]$	$[\bar{B}] = [\bar{B}_i], [\bar{B}_j], [\bar{B}_k]$
		$[\bar{B}_r] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial x_1^2}, & -\frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial x_1 \partial x_2}, & 2 \frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} \quad r = i, j, k$
6.	$[k]$	$[k] = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$
7.	$[\bar{K}]$	$[\bar{K}] = \iint [\bar{B}]^t [k] [\bar{B}] dx_1 dx,$
		$[\bar{K}_{rs}] = \iint [\bar{B}_r] [k] [\bar{B}_s] dx_1 dx_2, \quad r, s = i, j, k.$
		$[K] = [T]^t [\bar{K}] [T].$
8.	$\{P\}$	$\{P\} = [K] \{u\}, \quad \{P\} = [P_i] [P_j] [P_k]^t,$ $[P_r] = [P_{3r}, M_{1r}, M_{2r}]^t, \quad r = i, j, k.$

9.	$\{w\}$	$\{w\} = [N][T]\{u\}$
10.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [\bar{B}][T]\{u\}$
11.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = [k][\bar{B}][T]\{u\}$

Tablica Z.12. Czworoboczny płaski (płytkowy, powłokowy) element skończony

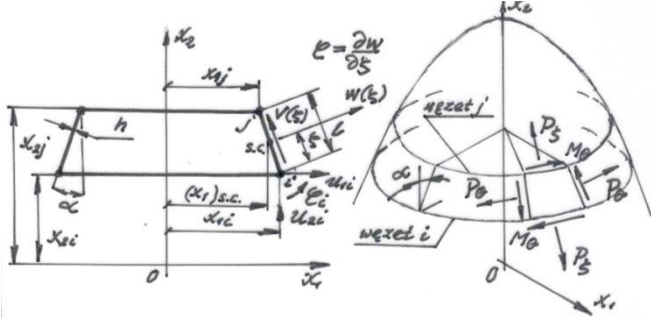
		
Lp.	Wielkość	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}, \{u_k\}, \{u_l\}]^t, \{u_r\} = [u_{3r}, \varphi_{1r}, \varphi_{2r}]^t, r = i, j, k, l.$
2.	$\{A\}$	$\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^t$
3.	$[X]$	$[X] = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^3x_2, x_1x_2^3]$

4.	$[\bar{X}]$	$[\bar{X}_r] = \begin{bmatrix} 1, & x_{1r}, & x_{2r}, & x_{1r}^2, & x_{1r}x_{2r}, & x_{2r}^2, & x_{1r}^3, & x_{1r}^2x_{2r}, & x_{1r}x_{2r}^2, & x_{2r}^3, & x_1^3x_{2r}, & x_{1r}x_{2r}^3 \\ 0, & 0, & -1, & 0, & -x_{1r}, & -2x_{2r}, & 0, & -x_{1r}^2, & -2x_{1r}x_{2r}, & -3x_{2r}^2, & -x_{1r}^3, & -3x_{1r}x_{2r}^2 \\ 0, & 1, & 0, & 2x_{1r}, & -x_{2r}, & 0, & 3x_{1r}^2, & 2x_{1r}x_{2r}, & x_{2r}^2, & 0, & 3x_{1r}^2x_{2r}, & x_{2r}^3 \end{bmatrix}$ $r = i, j, k, l.$ $[\bar{X}] = \left[[\bar{X}_i], [\bar{X}_j], [\bar{X}_k], [\bar{X}_l] \right]^t.$
5.	$[N]$	$[N] = [X][\bar{X}]^{-1} = \left[[N_i][N_j][N_k][N_l] \right].$ $[N_i] = (\zeta_1 - 1)(\zeta_2 - 1)[2(\zeta_1 - 1)(\zeta_2 - 1) - 2(\zeta_1 + 1)(\zeta_2 + 1) - 4(\zeta_1^2 - 1) - 4(\zeta_2^2 - 1), \quad 4b(\zeta_2^2 - 1), \\ -4a(\zeta_1^2 - 1)],$ $[N_j] = (\zeta_1 - 1)(\zeta_2 + 1)[2(\zeta_1 - 1)(\zeta_2 + 1) - 2(\zeta_1 + 1)(\zeta_2 - 1) + 4(\zeta_1^2 - 1) + 4(\zeta_2^2 - 1), \quad 4b(\zeta_2^2 - 1), \\ 4a(\zeta_1^2 - 1)],$ $[N_k] = (\zeta_1 + 1)(\zeta_2 - 1)[2(\zeta_1 + 1)(\zeta_2 - 1) - 2(\zeta_1 - 1)(\zeta_2 + 1) + 4(\zeta_1^2 - 1) + 4(\zeta_2^2 - 1), \quad -4b(\zeta_2^2 - 1), \\ -4a(\zeta_1^2 - 1)],$ $[N_l] = (\zeta_1 + 1)(\zeta_2 + 1)[2(\zeta_1 - 1)(\zeta_2 + 1) - 2(\zeta_1 + 1)(\zeta_2 - 1) - 4(\zeta_1^2 - 1) - 4(\zeta_2^2 - 1), \quad -4b(\zeta_2^2 - 1), \\ 4a(\zeta_1^2 - 1)].$

		$\zeta_1 = \frac{a}{x_1}, \zeta_2 = \frac{b}{x_2}$
6.	$\{D\}$	$\{D\} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_1}, -\frac{\partial^2}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^t$
7.	$[B]$	$[B] = [C][\bar{X}]^{-1}$ $[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & -6x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x_1 & -6x_2 & 0 & -6x_1x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4x_1 & 4x_2 & 0 & 6x_1^2 & 6x_2^2 \end{bmatrix}$
8.	$[k]$	$[k] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$
9.	$[K]$	$[K] = \{[\bar{X}]^{-1}\}^t \left(\iint [C]^t [k] [C] dx_1 dx_2 \right) [\bar{X}]^{-1}$
10.	$\{P\}_q$	$\{P\}_q = \{ -[\bar{X}]^{-1} \}^t \left(\iint [X]^t q dx_1 dx_2 \right)$
11.	$\{P\}$	$\{P\} = [\{P_i\}, \{P_j\}, \{P_k\}, \{P_l\}]^t, \quad \{P_r\} = [P_{3r}, M_{1r}, M_{2r}]^t, \quad \{P\} = [K]\{u\}.$

12.	$\{w\}$	$\{w\} = [N]\{u\}$
13.	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$
14.	$\{\sigma\}$	$\{\sigma\} = [k][B]\{u\}$

Tablica Z.13. Osiowosymetryczny, powłokowy element skończony

		
Lp.	Wielkości	Zależność wg MES
1.	$\{u\}$	$\{u\} = [\{u_i\}, \{u_j\}]^t, \{u_r\} = [u_{1r}, u_{2r}, \varphi_r]^t, r = i, j.$
2.	$v(\zeta)$	$v = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta, \quad \zeta \in (0, l)$
3.	$w(\zeta)$	$w = \alpha_3 + \alpha_4 \zeta + \alpha_5 \zeta^2 + \alpha_6 \zeta^3, \quad \zeta \in (0, l)$
4.	$\varphi(\zeta)$	$\frac{dw}{d\zeta} = \alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 \zeta^2, \quad \zeta \in (0, l)$
5.	$\{\bar{w}\}$	$\{\bar{w}\} = \left[v, w, \frac{dw}{d\zeta} \right]_r^t = [T]\{u\}, \quad r = i, j.$

		gdzie $[T] = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6.	[N]	$\{w\} = [v, w]^t = [N'] \begin{bmatrix} [T] & 0 \\ 0 & [T] \end{bmatrix} \{u\} = \left[[N'_i][T], [N'_j][T] \right] \{u\}$
		$[N] = \left[[N_i], [N_j] \right]$
		gdzie $[N_r] = [N'_r][T]$, $r = i, j$.
		$[N'_i] = \begin{bmatrix} 1 - \zeta' & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3(\zeta')^3 + 2(\zeta')^3 & l[\zeta' - 2(\zeta')^2 + (\zeta')^3] \end{bmatrix}$
		$[N'_j] = \begin{bmatrix} \zeta' & 0 & 0 \\ 0 & 3(\zeta')^2 + 2(\zeta')^3 & -(\zeta')^2 + (\zeta')^3 \end{bmatrix}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{l}.$
7.	[B]	$\{\varepsilon\} = \left[\frac{dv}{d\zeta}, \frac{(w\cos\alpha + v\sin\alpha)}{x_1}, \frac{d^2w}{d\zeta^2}, -\frac{\sin\alpha}{x_1} \frac{dw}{d\zeta} \right] = [B]\{u\}$
		$[B] = \left[[B'_i][T], [B'_j][T] \right],$

		$\text{gdzie } [B'_i] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{(1-\zeta')\sin\alpha}{x_1} & \frac{[1-3(\zeta')^2+2(\zeta')^3]\cos\alpha}{x_1} & \frac{l[\zeta'-2(\zeta')^2+(\zeta')^3]\cos\alpha}{x_1} \\ 0 & \frac{(-6+12\zeta')}{l^2} & \frac{(-4+6\zeta')}{l} \\ 0 & \frac{[6\zeta'-6(\zeta')^2]\sin\alpha}{lx_1} & \frac{[-1+4\zeta'-3(\zeta')^2]\sin\alpha}{x_1} \end{bmatrix}$
		$[B_j] == \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\zeta'\sin\alpha}{x_1} & \frac{[3(\zeta')^2-2(\zeta')^3]\cos\alpha}{x_1} & \frac{l[-(\zeta')^2+(\zeta')^3]\cos\alpha}{x_1} \\ 0 & \frac{(6-12\zeta')}{l^2} & \frac{(-2+6\zeta')}{l} \\ 0 & \frac{[-6\zeta'+6(\zeta')^2]\sin\alpha}{x_1} & \frac{[2\zeta'-3(\zeta')^2]\sin\alpha}{x_1} \end{bmatrix}$
8.	$[k]$	$[k] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix}$

9.	[K]	$[K] = \int_0^1 [B]^t [k] [B] 2\pi x_1 l d\zeta'$
		przy czym $[K_{rs}] = 2\pi l [T]^t \left(\int_0^1 [B_r]^t [k] [B_s] x_1 d\zeta' \right) [T],$ $r, s = i, j.$
10.	{P}	$\{P\} = [P_\zeta, P_\theta, M_\zeta, M_\theta]^t = [K]\{u\}$
11.	{w}	$\{w\} = [v, w]^t = [N]\{u\}$
12.	{ε}	$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$
13.	{σ}	$\{\sigma\} = [k][B]\{u\}.$

Tablica Z.14. Macierze-wektory sił powierzchniowych dla wybranych elementów skończonych (definicje)

Lp.	Nazwa elementu	Macier sił węzłowych $\{P(p)\}$	Składowe sił węzłowych ($p = \text{const}$)
1.	Element liniowy (Tabl. Z.1)	$\{P(p)\} = [P_i(p), P_k(p)]^t$ $P_r(p) = \int_s [N_r]^t \{p\} ds,$ $r = i, k$	$\{p^{ik}\} = \frac{p}{l}$ $P_r(p) = \frac{p S_p w_r}{l^2} \int_{x_{1i}}^{x_{1k}} (x_{1r} - x_1) dx_1$ $w_r = \begin{cases} -1 & \text{dla } r = i, \\ 1 & \text{dla } r = k \end{cases}$ $r = i, k$ S_p – pole powierzchni działania p^{ik}
2.	Płaski element trójkątny (Tabl. Z.6)	$\{P(p)\} = [\{P_i(p)\} \{P_j(p)\} \{P_k(p)\}]^t$ $\{P_r(p)\} = [P_{1r}(p), P_{2r}(p)]^t =$ $= \int_s [N_r]^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} ds$ $r = i, j, k$	$\{p^{ij}\} = [p_1^{ij}, p_2^{ij}]^t$ $P_{1r}(p_1^{ij}) = \frac{p_1^{ij} h}{2S\gamma_k} \int_{x_{1i}}^{x_{1j}} [(\alpha_r \gamma_k - \alpha_k \gamma_r) + (\beta_r \gamma_k - \beta_k \gamma_r) x_1] dx_1$ $P_{2r}(p_2^{ij}) = \frac{p_2^{ij} h}{2S\beta_k} \int_{x_{2i}}^{x_{2j}} [(\alpha_r \beta_k - \alpha_k \beta_r) + (\beta_k \alpha_k - \beta_r \gamma_k) x_2] dx_2$ $r = i, j, k$

3.	Osiowosymetryczny element trójkątny (Tabl. Z.8)	$\{P(p)\} = [\{P_i(p)\}\{P_j(p)\}\{P_k(p)\}]^t$ $\{P_r(p)\} = [P_{1r}(p), P_{2r}(p)]^t =$ $= \int_s [N_r]^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} ds$ $r = i, j, k$	$\{p^{jk}\} = [p_1^{jk}, p_2^{jk}]^t$ $P_{1r}(p_1^{jk}) =$ $= \frac{\pi p_1^{jk}}{S \gamma_k} \int_{x_{1j}}^{x_{1k}} [(\alpha_r \gamma_i - \alpha_i \gamma_r) + (\beta_r \gamma_i - \beta_i \gamma_r) x_1] x_1 dx_1$ $P_{2r}(p_2^{jk}) =$ $= -\frac{\pi p_2^{jk}}{S \beta_k^2} \int_{x_{2j}}^{x_{2k}} [(\alpha_r \beta_i - \alpha_i \beta_r) + (\beta_i \gamma_r - \beta_r \gamma_i) x_2] (\alpha_i$ $+ \gamma_i x_2) dx_2$ $r = i, j, k$
----	---	--	---

4.	Element czworościenny (Tabl. Z.9)	$\{P(p)\} = [\{P_i(p)\}\{P_j(p)\}\{P_l(p)\}\{P_k(p)\}]^t$ $\{P_r(p)\} = [P_{1r}(p), P_{2r}(p), P_{3r}(p)]^t =$ $= \int_{S_p} [N_r]^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} dS(p)$ $r = i, j, k, l$ S_p – pole powierzchni działania p	$\{p^{ijk}\} = [p_1^{ijk}, p_2^{ijk}, p_3^{ijk}]^t$ $P_{1r}(p_1^{ijk}) = \frac{p_1^{ijk}}{6V\beta_l} \int_{s_{23}^{ijk}} [(\alpha_r\beta_l - \alpha_l\beta_r) + (\beta_l\gamma_r - \beta_r\gamma_l)x_2 + (\beta_l\delta_r - \beta_r\delta_l)x_3] dx_2 dx_3$ $P_{2r}(p_2^{ijk}) = \frac{p_2^{ijk}}{6V\gamma_l} \int_{s_{13}^{ijk}} [(\alpha_r\gamma_l - \alpha_l\gamma_r) + (\beta_r\gamma_l - \beta_l\gamma_r)x_1 + (\gamma_l\delta_r - \gamma_r\delta_l)x_3] dx_1 dx_3$ $P_{3r}(p_3^{ijk}) = \frac{p_3^{ijk}}{6V\delta_l} \int_{s_{12}^{ijk}} [(\alpha_r\delta_l - \alpha_l\delta_r) + (\beta_r\delta_l - \beta_l\delta_r)x_1 + (\gamma_r\delta_l - \gamma_l\delta_r)x_2] dx_1 dx_2$ $r = i, j, l, k$ $S_{12}^{ijk}, S_{13}^{ijk}, S_{23}^{ijk}$ – rzuty powierzchni S^{ijk} na płaszczyzny układu współrzędnych
----	--	--	--

Tablica Z.15. Macierze-wektory sił objętościowych wybranych elementów skończonych (definicje)

Lp.	Nazwa elementu	Macierz sił węzłowych $\{P(g)\}$	Składowe sił węzłowych ($g = const$) $P_r(g)$
1.	Element liniowy (Tabl. Z.1)	$\{P(g)\} = [P_i(g), P_k(g)]^t$ $P_r(g) = \int_V [N_r]^t \{g\} dV$ $r = i, k$	$\{g\} = g$ $P_r(g) =$ $= \frac{g F w_r}{l} \int_{x_{1l}}^{x_{1k}} (x_{1r} - x_1) dx_1$ $w_r = \begin{cases} -1 & \text{dla } r = i \\ 1 & \text{dla } r = k \end{cases}$ F – pole powierzchni przekroju elementu
2.	Płaski element trójkątny (Tabl. Z.6)	$\{P(g)\} = [\{P_i(g)\}, \{P_j(g)\}, \{P_k(g)\}]^t$ $\{P_r(g)\} = [P_{1r}(g), P_{2r}(g)]^t$ $= \int_V [N_r]^t \{g\} dv$ $r = i, j, k$	$\{g\} = [g_1, g_2]^t$ $\{P_r(g)\} = \frac{h}{2S} [1]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \cdot$ $\cdot \int_S (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) dx_1 dx_2$ $r = i, j, k$ S – pole powierzchni elementu
3.	Osiowosymetryczny element (Tabl. Z.8)	$\{P(g)\} = [\{P_i(g)\}, \{P_j(g)\}, \{P_k(g)\}]^t$ $\{P_r(g)\} = [P_{1r}(g), P_{2r}(g)]^t$ $= \int_V [N_r]^t \{g\} dv$ $r = i, j, k$	$\{g\} = [g_1, g_2]^t$ $\{P_r(g)\} = \frac{\pi}{S} [1]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \cdot$ $\int_S (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) x_1 dx_1 dx_2$ $r = i, j, k$ S – pole powierzchni przekroju elementu
4.	Element czworosścienny (Tabl. Z.9)	$\{P(g)\} = [\{P_i(g)\}, \{P_j(g)\}, \{P_l(g)\}, \{P_k(g)\}]^t$ $\{P_r(g)\} = [P_{1r}(g), P_{2r}(g), P_{3r}(g)]^t$ $= \int_V [N_r]^t \{g\} dv$ $r = i, j, l, k$	$\{g\} = [g_1, g_2, g_3]^t$ $\{P_r(g)\} = \frac{1}{6V} [1]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \cdot$ $\cdot \int_V (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2 + \delta_r x_3) \cdot$ $\cdot dx_1 dx_2 dx_3$ $r = i, j, l, k$ V – objętość elementu

Tablica Z.16. Definicje macierzy masy dla wybranych elementów skończonych

Lp.	Nazwa elementu	Macierz masy [M]	Podmacierz masy ($\varrho = \text{const}$) [m_{rs}]
1.	Element liniowy (tablica Z.1)	$[M] = \begin{bmatrix} [m_{ii}] & [m_{ik}] \\ [m_{ik}] & [m_{kk}] \end{bmatrix}$	$[m_{rs}] = \varrho \int_V [N_r]^t [N_s] dV = \frac{\varrho F w_r w_s}{l^2} \times$ $\int_{x_{1l}}^{x_{1k}} (x_{1r} - x_1) (x_{1s} - x_1) dx_1$ $w_r, (w_s) = \begin{cases} -1 & \text{dla } r, (s) = i, \\ 1 & \text{dla } r, (s) = k \end{cases}$ $r, s = i, k$
2.	Płaski element trójkątny (tablica Z.6)	$[M] = \begin{bmatrix} [m_{ii}] & [m_{ij}] & [m_{ik}] \\ [m_{ji}] & [m_{jj}] & [m_{jk}] \\ [m_{ki}] & [m_{kj}] & [m_{kk}] \end{bmatrix}$	$[m_{rs}] = \varrho \int_V [N_r]^t [N_s] dV$ $= \frac{\varrho h}{4S^2} [1]_{2 \times 2} \int_S (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2) (\alpha_s + \beta_s x_1 + \gamma_s x_2) dx_1 dx_2$ $r, s = i, j, k$

3.	Osiowosymetryczny element trójkątny (tablica Z.8)	$[M] = \begin{bmatrix} [m_{ii}] & [m_{ij}] & [m_{ik}] \\ [m_{ji}] & [m_{jj}] & [m_{jk}] \\ [m_{ki}] & [m_{kj}] & [m_{kk}] \end{bmatrix}$	$[m_{rs}] = \varrho \int_V [N_r]^t [N_s] dV$ $= \frac{\pi \varrho}{2S^2} [1]_{2 \times 2} \int_S (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2)(\alpha_s + \beta_s x_1 + \gamma_s x_2) x_1 dx_1 dx_2$ $r, s = i, j, k$
4.	Element czworosścienny (tablica Z.9)	$[M] = \begin{bmatrix} [m_{ii}] & [m_{ij}] & [m_{il}] & [m_{ik}] \\ [m_{ji}] & [m_{jj}] & [m_{jl}] & [m_{jk}] \\ [m_{li}] & [m_{lj}] & [m_{ll}] & [m_{lk}] \\ [m_{ki}] & [m_{kj}] & [m_{kl}] & [m_{kk}] \end{bmatrix}$	$[m_{rs}] = \varrho \int_V [N_r]^t [N_s] dV$ $= \frac{\varrho}{36V^2} [1]_{3 \times 3} \int_V (\alpha_r + \beta_r x_1 + \gamma_r x_2 + \delta_r x_3)(\alpha_s + \beta_s x_1 + \gamma_s x_2 + \delta_s x_3) dx_1 dx_2 dx_3$ $r, s = i, j, l, k$

Tablica Z.17. Wartości składników macierzy mas skupionej i mas rozłożonej dla wybranych elementów skończonych

Lp.	Nazwa elementu	Macierz masy skupionej w węzłach $[M_0]$	Macierz masy rozłożonej w obszarze elementu $[M]$ ($\varrho = \text{const}$)
1.	Element liniowy (tablica Z.1)	$\frac{\varrho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{\varrho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2.	Element belka (tablica Z.4)	$\frac{\varrho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\varrho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ (sym) & & & 4l^2 \end{bmatrix}$
3.	Element płaski trójkątny (tablica Z.6)	$\frac{\varrho h S}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{\varrho h S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$