

# MECHANIKA STOSOWANA. UKŁADY STATYCZNE

## Przykłady i ćwiczenia

**Volodymyr Zaselskyi**

**Dmytro Popolov**

**Hennadii Zaitsev**

**Anna Kułakowska**

**Joanna Świątek-Prokop**



Recenzent

dr hab. Bartosz Koczurkiewicz, prof. PCz

Redakcja naukowa

prof. Volodymyr Zaselskyi

Redaktor naczelna wydawnictwa

Paulina PIASECKA-FLORCZYK

Korekta

Zespół Wydawnictwa

Redakcja techniczna

dr inż. Anna Kułakowska

Projekt okładki

dr hab. Bożena Woźna-Szcześniak, prof. UJD

© Copyright by

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie  
Częstochowa 2024

**ISBN 978-83-67984-16-4**

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Jana Długosza w Częstochowie  
42-200 Częstochowa, al. Armii Krajowej 36A  
[www.ujd.edu.pl](http://www.ujd.edu.pl)  
e-mail: [wydawnictwo@ujd.edu.pl](mailto:wydawnictwo@ujd.edu.pl)

W skrypcie przedstawiono podstawowe praktyczne zagadnienia z zakresu mechaniki teoretycznej (statyki), wytrzymałości materiałów i części maszyn. Każdy rozdział zawiera zwięzłe wprowadzenie teoretyczne, podstawowe wzory obliczeniowe, przykłady typowych obliczeń oraz zadania do samodzielnej pracy. Na końcu znajdują się tabele referencyjne oraz wykaz używanej i zalecanej literatury.

Skrypt powstał w ramach współpracy Uniwersytetu Jana Długosza w Częstochowie (Polska) z Państwowym Uniwersytetem Ekonomiki i Technologii w Krzywym Rogu (Ukraina).

Przeznaczone dla studentów kierunków inżynierskich, w tym studentów kierunków inżynieria bezpieczeństwa, innowacyjne technologie i nowoczesne materiały oraz pokrewnych.

## Spis treści

WSTĘP.....	6
ROZDZIAŁ I	
MECHANIKA TEORETYCZNA.....	7
1.1. Płaski układ sił zbieżnych .....	7
1.2. Para sił i moment siły względem punktu .....	19
1.3. Dowolny płaski układ sił. Wyznaczanie reakcji w podporach.....	24
1.4. Wyznaczanie środka ciężkości przekrojów płaskich .....	35
ROZDZIAŁ II	
WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW.....	45
2.1. Rozciąganie i ściskanie .....	45
2.2. Konstrukcje statycznie niewyznaczalne .....	65
2.3. Geometryczne charakterystyki przekrojów.....	73
2.4. Skręcanie .....	95
2.5. Zginanie proste .....	106
2.6. Zginanie ze skręcaniem prętów okrągłych .....	127
2.7. Wyboczenie prętów ściskanych .....	137
ROZDZIAŁ III	
CZĘŚCI MASZYN.....	153
3.1. Obliczanie konstrukcji spawanych.....	153
3.2. Obliczanie połączeń gwintowych.....	172
3.3. Obliczanie połączeń wpustowych i wielowypustowych.....	195
3.4. Obliczanie kinematycznych i siłowych parametrów przekładni ....	210
3.5. Obliczanie przekładni zębatych.....	223
3.6. Dobór reduktorów.....	242
3.7. Sporządzanie schematów kinematycznych napędów.....	247
3.8. Obliczanie wałów i osi .....	257
3.9. Obliczanie łożysk ślizgowych .....	271
3.10. Dobór łożysk tocznych.....	282
3.11. Dobór złączek .....	288

## ZAŁĄCZNIKI

Załącznik A (rekomendowany) .....	296
Załącznik B (rekomendowany) .....	297
Załącznik C (informacyjny) .....	300
Załącznik D (informacyjny).....	303
LISTA REKOMEDOWANEJ LITERATURY .....	345

## WSTĘP

Mechanika stosowana jako dyscyplina składa się głównie z trzech powiązanych ze sobą działów: mechaniki teoretycznej, wytrzymałości materiałów i części maszyn. Głównym celem tego przedmiotu jest przekazanie studentom studiów inżynierskich wiedzy i umiejętności, które pozwolą im w praktyce rozwiązywać inżynierskie problemy projektowe dotyczące poszczególnych części konstrukcji i maszyn, z uwzględnieniem ich niezawodności i sprawności. Zaprezentowane w skrypcie przykłady obliczeniowe umożliwiają zoptymalizowanie projektu zarówno całej maszyny, jak i jej poszczególnych części oraz umożliwiają zminimalizowanie zdarzających się sprzeczności między niezawodnością a wydajnością, które mogą pojawić się w trakcie projektowania.

W skrypcie sekwencyjnie przedstawiono podstawowe zagadnienia teoretyczne dla każdego działu, a następnie pokazano szereg przykładów rozwiązań typowych problemów z zakresu mechaniki, wytrzymałości materiałów i konstrukcji maszyn. Po każdym temacie student ma możliwość wyboru i rozwiązania zadań praktycznych. Zadania skonstruowane są w taki sposób, aby dać możliwość wyboru wielu opcji, co sprzyja zrozumieniu i utrwaleniu poznanych wcześniej zagadnień. Zadania, ze względu na jasno sformułowane schematy rozwiązań, mogą służyć do samodzielnej praktycznej pracy obliczeniowej studenta zarówno na zajęciach, jak i poza nimi. Podręcznik dotyczy układów statycznych, które opierają się głównie na prawach mechaniki ciała stałego.

# ROZDZIAŁ I

## MECHANIKA TEORETYCZNA

### 1.1. Płaski układ sił zbieżnych

#### Wiadomości ogólne

**Układ sił zbieżnych** – jest to układ sił, których linie działania przecinają się w jednym punkcie, nazywanym punktem zbieżności. Istnieje **płaski** układ sił zbieżnych, gdy linie działania wszystkich tych sił leżą w tej samej płaszczyźnie, oraz **przestrzenny** układ sił zbieżnych, gdy linie działania sił leżą w różnych płaszczyznach.

Układ sił, których linie działania leżą w tej samej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie, nazywany jest **płaskim układem sił zbieżnych**.

#### Podstawowe wzory obliczeniowe

Równo działający układ sił zbieżnych w geometrycznej metodzie wyznaczania

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

**Analityczna (obliczeniowa) metoda** wyznaczania siły równoważnej w układzie sił zbieżnych

$$\begin{cases} \vec{R}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x}; \text{ w ogólnej postaci } \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} \\ \vec{R}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y}; \text{ w ogólnej postaci } \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} R \cos \alpha = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 \\ R \cos \beta = F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 \end{cases}$$

Wartość modułu (wartości bezwzględnej) wektora wypadkowej siły jest określona przez twierdzenie Pitagorasa:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Kierunek wektora siły wypadkowej  $\vec{R}$  wyznaczany jest przez jego tzw. cosinusy kierujące (cosinusy kątów tego wektora  $\vec{R}$  z osiami współrzędnych):

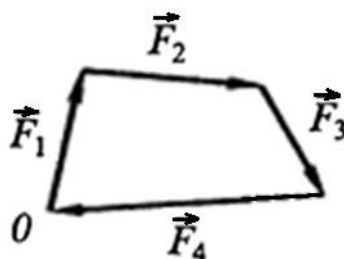
$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \cos \beta = \frac{R_y}{R}$$

### Warunki równowagi układu sił zbieżnych

#### Geometryczny warunek równowagi układu sił zbieżnych

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i = 0 \text{ albo } \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Równoważnik takiego układu sił wyniesie zero, gdy wielokąt sił zostanie zamknięty, czyli początek wektora pierwszej siły pokryje się z końcem wektora ostatniej siły (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Równoważnik sił

Geometryczny warunek równowagi może być wykorzystany do rozwiązania niektórych zagadnień statyki przy użyciu metody graficznej.

Sposób postępowania w takim przypadku jest następujący:

1. wybrać ciało, którego równowaga będzie rozpatrywana;
2. odrzucić więzy, zastępując je reakcjami;
3. korzystając z warunku równowagi, utworzyć zamknięty wielobok sił, wyznaczając nieznanne wielkości (w większości przypadków są to reakcje więzów).

#### Analityczny warunek równowagi układu sił zbieżnych

$$\begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = 0 \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = 0 \end{cases}$$

W skróconej formie warunki równowagi układu sił zbieżnych na płaszczyźnie są zapisywane następująco:



$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

Układ takich sił w przestrzeni ma trzy równania w stanie równowagi:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases}$$

Przy rozwiązywaniu problemów statyki metodą analityczną, należy wykonać następującą sekwencję czynności:

1. wybrać ciało (punkt), którego równowagę rozpatrujemy;
2. odrzucić więzy, zamieniając je na reakcje;
3. wprowadzić układ współrzędnych i ułożyć równania równowagi;
4. korzystając z warunku równowagi, określić nieznane wielkości (w większości przypadków reakcje więzów);
5. wykonać weryfikację wyników przy użyciu równania, które nie zostało użyte w rozwiązaniu, na przykład poprzez utworzenie równania równowagi wzdłuż innej osi współrzędnych lub przy użyciu metody geometrycznej.

Przy wyborze położenia osi układu współrzędnych zalecane jest ułożenie ich w taki sposób, aby jak największa liczba niewiadomych była prostopadła do ich osi.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 1.1.** Określić reakcje w prętach (rys. 1.2) przy  $F = 50 \text{ kN}$ .

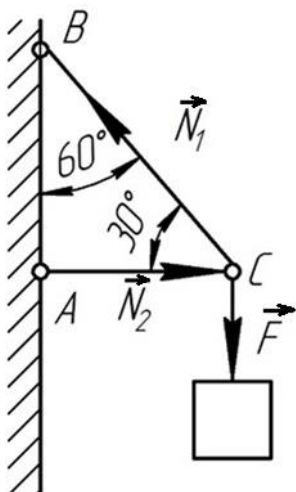
*Dane:*

$$F = 50 \text{ kN}$$

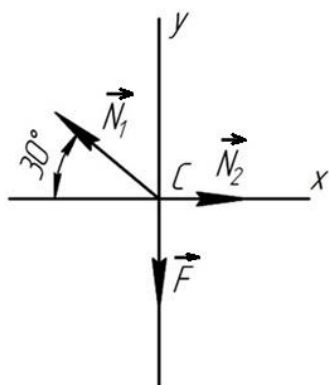
*Szukane:*

$$N_1, N_2-?$$

### Rozwiązanie



Rys. 1.2. Reakcje sił w prętach



Rys. 1.3. Rozkład sił w wprowadzonym układzie współrzędnych

1. Pozbywamy się węzłów, zamieniając je na reakcje  $N_1$  i  $N_2$  (rys. 1.2). Reakcje w prętach zachodzą wzdłuż pręta, a ich kierunek wybierany jest w zależności od deformacji. Pręt  $BC$  pod działaniem siły  $F$  jest rozciągany, więc reakcja  $N_1$  będzie skierowana w stronę podpory, w kierunku przeciwnym do odkształcenia, pręt  $AC$  pod działaniem siły  $F$  jest ściskany, więc reakcja  $N_2$  będzie skierowana w kierunku od podpory.

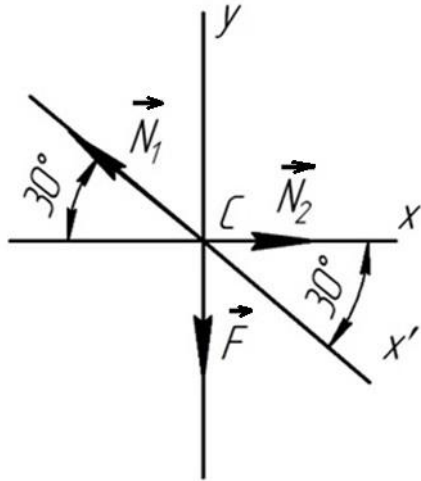
2. Wprowadzamy układ współrzędnych i rozkładamy na niego działające siły (rys. 1.3).

3. Zapisujemy warunki równowagi dla danego układu sił.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0; \\ N_1 \cos 60^\circ - F &= 0 \\ N_1 &= \frac{F}{\cos 60^\circ} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,5} = 100 \text{ kN}; \\ \sum F_x &= 0; \\ -N_1 \cos 30^\circ + N_2 &= 0; \\ N_2 &= N_1 \cos 30^\circ = 100 \cdot 10^3 \cdot 0,87 = 87 \text{ kN}. \end{aligned}$$

### Sprawdzanie

Przykładowe sposoby weryfikacji obliczeń:



Rys. 1.4. Rzuty sił na oś x'

### Wariant 1

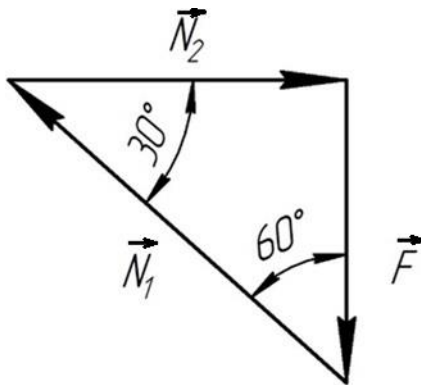
Określamy rzuty sił na inną oś, na przykład x' (rys. 1.4):

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} &= 0; \\ -N_1 + N_2 \cos 30^\circ + F \cos 60^\circ &= 0; \\ -100 + 87 \cdot 0,87 + 50 \cdot 0,5 &= 0; \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Reakcje obliczono poprawnie.

### Wariant 2

Rysujemy trójkąt sił (rys. 1.5) i korzystając ze stosunku boków trójkąta, określamy reakcje w prętach.



Rys. 1.5. Trójkąt sił

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{F}{N_1}; \\ N_1 &= \frac{F}{\cos 60^\circ} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,5} = 100 \text{ kN}. \\ \sin 60^\circ &= \frac{N_2}{N_1}; \end{aligned}$$

$$N_2 = N_1 \sin 60^\circ = 100 \cdot 10^3 \cdot 0,87 = 87 \text{ kN}.$$

Reakcje obliczono poprawnie.

Zastosujemy twierdzenie sinusów (twierdzenie Snelliusa) – boki trójkąta są proporcjonalne do sinusów przeciwległych kątów, więc:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{\sin 90^\circ} &= \frac{N_2}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 30^\circ}; \\ N_1 &= \frac{F \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,5} = 100 \text{ kN}; \\ N_2 &= \frac{F \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,87}{0,5} = 87 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Reakcje określono poprawnie.

Odpowiedź:  $N_1 = 100 \text{ kN}$ ;  $N_2 = 87 \text{ kN}$ .

**Przykład 1.2.** Określić reakcje w prętach wspornika (rys. 1.6, a), gdy:  $F = 3 \text{ kN}$ ;  $\alpha = 30^\circ$   $\beta = 65^\circ$ .

Dane:

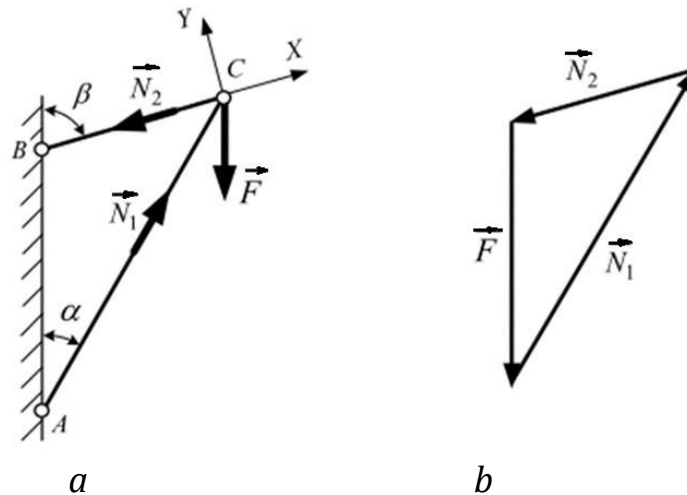
$$F = 3 \text{ kN}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 65^\circ$$

Szukane:

$$N_1, N_2 - ?$$



Rys. 1.6. Wspornik: *a* - rozkład sił we wsporniku; *b* - trójkąt sił

### Rozwiązanie

#### 1. Metoda graficzna

Rysujemy wektor siły  $\vec{F}$  w skali

$$\mu_F = \frac{F}{\bar{F}} = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

Zatem

$$\bar{F} = \frac{F}{\mu_F} = \frac{3 \text{ kN}}{0,1 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}} = 30 \text{ mm}$$

Reakcje prętów są zawsze skierowane wzdłuż prętów. Po analizie odkształcenia prętów (rozciąganie lub ściskanie) wybieramy kierunek działania reakcji. Następnie tworzymy trójkąt sił (rys. 1.6, *b*). Mierzmy wektory  $\vec{N}_1$  i  $\vec{N}_2$  i uwzględniając skalę, obliczamy wartości reakcji  $N_1$  i  $N_2$ :

$$N_1 = 4,73 \text{ kN}, N_2 = 2,62 \text{ kN}.$$

W celu uzyskania większej dokładności zaleca się korzystanie z programów graficznych.

#### 2. Metoda analityczna

Wybieramy osie *X* i *Y*. Dla wygody oś *X* kierujemy wzdłuż siły  $N_2$  (rys. 1.6, *a*)

Układamy dwa równania równowagi i określamy nieznane reakcje:

$$\sum F_y = 0, N_1 \cos 55^\circ - F \cos 25^\circ = 0,$$

$$N_1 = \frac{F \cos 25^\circ}{\cos 55^\circ} = 4,74 \text{ kN},$$

$$\sum F_x = 0, -N_2 + N_1 \cos 35^\circ - F \cos 65^\circ = 0,$$

$$N_2 = 4,74 \cos 35^\circ - 3 \cos 65^\circ = 2,62 \text{ kN}.$$

Odpowiedź:  $N_1 = 4,74 \text{ kN}$ ,  $N_2 = 2,62 \text{ kN}$ .

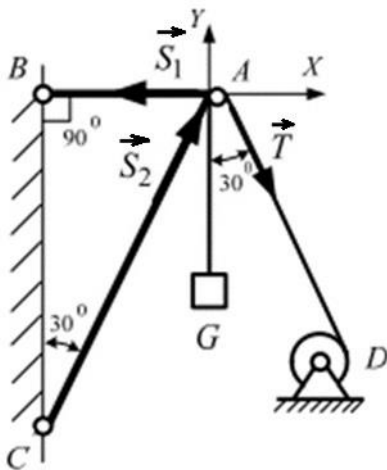
**Przykład 1.3.** Ciężar o masie  $G = 60 \text{ kN}$  jest zawieszony za pomocą liny, przetrzuconej przez blok  $A$  i prowadzącej do wciągarki  $D$ . Określić reakcje w prętach  $AC$  i  $BA$  suwnicy (rys. 1.7).

Dane:

$$G = 60 \text{ kN}$$

Szukane:

$$S_1 \text{ -? } S_2 \text{ -?}$$



Rozwiązanie

1. Reakcje prętów  $AB$  i  $AC$  są skierowane wzdłuż pręta.

Z analizy obciążenia prętów jasno wynika, że pręt  $AB$  jest rozciągany, więc reakcja  $S_1$  jest skierowana od punktu  $A$  do punktu  $B$ .

Pręt  $AC$  jest ściskany, więc reakcja  $S_2$  jest skierowana od punktu  $C$  do punktu  $A$ .

Pręt  $AC$  jest ściskany, więc reakcja  $S_2$  jest skierowana od punktu  $C$  do punktu  $A$ .

Siła w linie  $T$  jest skierowana wzdłuż liny od punktu  $A$  do punktu  $D$ , ponieważ lina jest rozciągana przez obciążenie  $G$ . Oczywiście jest, że  $T = G$ .

Rys. 1.7. Rozkład sił w obliczanym układzie

2. Wybieramy układ osi  $X$  i  $Y$  w taki sposób, żeby jedna z reakcji (na przykład  $S_1$ ) była skierowana wzdłuż jednej z osi.

Dla takiego układu można ułożyć dwa układy równowagi:

$$\sum F_y = 0$$

$$S_2 \cos 30^\circ - G - T \cos 30^\circ = 0$$

$$S_2 = \frac{G + T \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{60 \cdot 10^3 + 60 \cdot 10^3 \cdot 0,87}{0,87} = 129 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-S_1 + S_2 \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ = 0$$

$$S_1 = S_2 \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ = 129 \cdot 10^3 \cdot 0,5 + 60 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 94,5 \text{ kN}$$

*Odpowiedź:*  $S_1 = 129 \text{ kN}$ ,  $S_2 = 94,5 \text{ kN}$ .

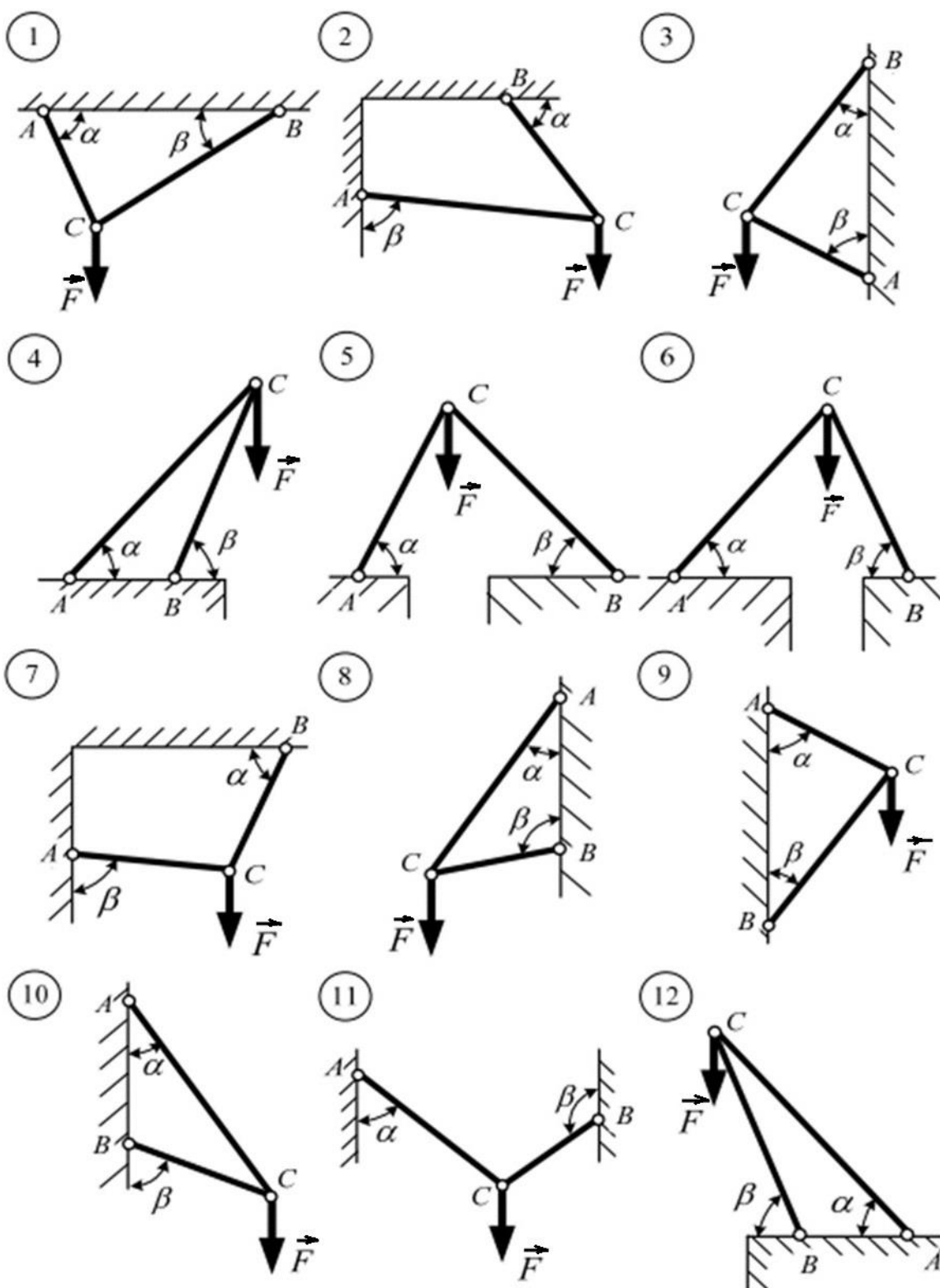
## Zadania do pracy samodzielnej (obliczeniowe)

**Zadanie 1.1.** Określić reakcje w prętach wspornika pod działaniem siły  $\vec{F}$ .  
Dane do zadania przedstawiono w tabeli 1.1.

Tabela 1.1 Dane wejściowe do zadania 1.1

Wariant	Schemat	$\alpha$ °	$\beta$ °	$F$ kN	Wariant	Schemat	$\alpha$ °	$\beta$ °	$F$ kN	Wariant	Schemat	$\alpha$ °	$\beta$ °	$F$ kN
1	1	10	20	20	17	5	45	40	95	33	9	70	30	42
2		20	15	30	18		60	10	100	34		60	40	44
3		30	50	40	19		65	15	15	35		65	25	46
4		40	25	50	20		40	30	18	36		50	45	48
5	2	15	80	60	21	6	60	20	16	37	10	30	35	52
6		25	70	70	22		70	25	14	38		40	45	54
7		55	45	80	23		80	30	12	39		50	50	56
8		20	75	90	24		65	35	10	40		35	40	58
9	3	5	80	100	25	7	30	45	22	41	11	30	95	62
10		10	70	25	26		40	35	24	42		20	110	64
11		45	50	35	27		45	40	26	43		02	120	66
12		30	60	45	28		50	30	28	44		15	115	68
13	4	30	40	55	29	8	10	100	32	45	12	30	45	72
14		20	30	65	30		15	95	34	46		20	60	74
15		15	20	75	31		20	110	36	47		30	50	76
16		25	25	85	32		25	105	38	48		40	45	78

### Schematy obliczeniowe do zadania 1.1



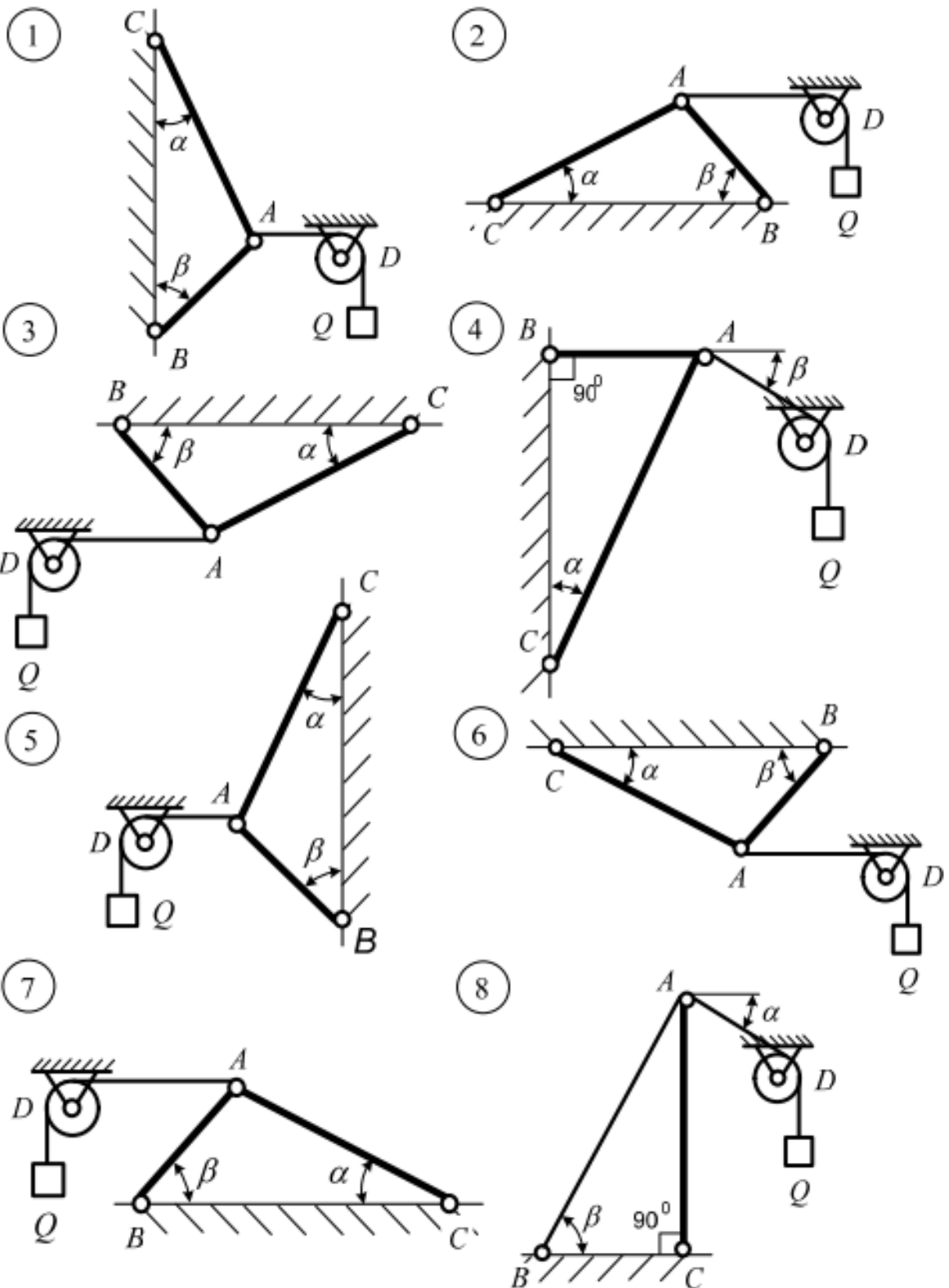


**Zadanie 1.2.** Określić wartości i kierunek reakcji węzłów dla schematów do zadania. Dane do zadania przedstawiono w tabeli 1.2.

Tabela 1.2. Dane wejściowe do zadania 1.2

Wariant	Schemat	$\alpha$ °	$\beta$ °	$Q$ kN	Wariant	Schemat	$\alpha$ °	$\beta$ °	$Q$ kN
1	1	30	50	20	17	5	30	50	20
2		40	45	22	18		35	50	25
3		25	60	30	19		25	60	10
4		45	30	25	20		10	70	40
5	2	15	60	40	21	6	5	30	28
6		20	50	50	22		10	35	16
7		25	55	48	23		15	40	2
8		30	45	30	24		10	45	40
9	3	50	20	32	25	7	10	60	32
10		55	20	46	26		15	55	40
11		40	30	28	27		20	50	50
12		45	25	30	28		5	65	40
13	4	10	70	60	29	8	45	40	15
14		15	70	30	30		50	35	12
15		35	40	10	31		55	30	40
16		20	45	15	32		60	20	45

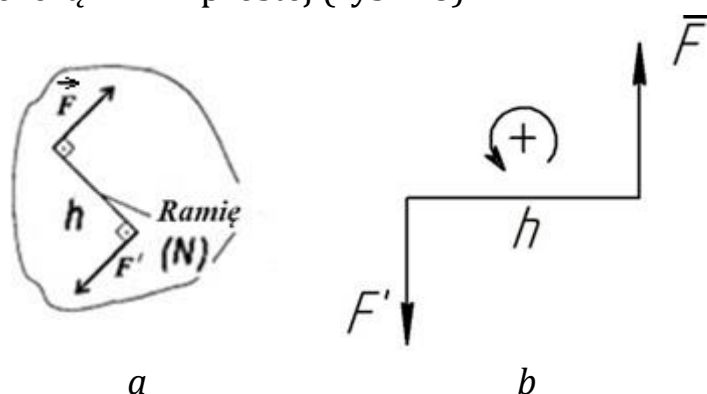
Schematy obliczeniowe do zadania 1.2



## 1.2. Para sił i moment siły względem punktu

### Wiadomości ogólne

**Para sił** – dwie równe i równoległe siły skierowane w przeciwnych kierunkach, które nie leżą w linii prostej (rys. 1.8).



Rys. 1.8. Para sił:

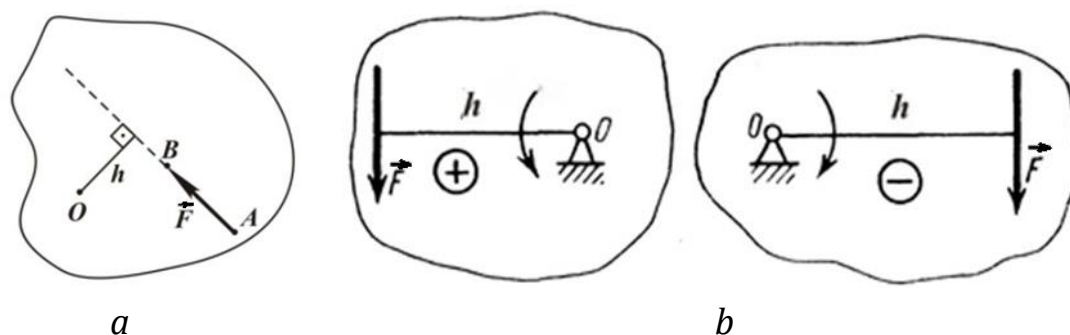
*a* - wyznaczenie ramienia; *b* - określanie znaku momentu pary sił

### Moment siły względem punktu

Siła, która nie przechodzi przez punkt zaczepienia ciała, powoduje obrót ciała wokół tego punktu i wpływ takiej siły na ciało jest oceniany za pomocą **momentu wywołanego jej działaniem**.

**Momentem siły względem punktu** (bieguna) nazywamy wektor  $\vec{M}_0$  będący równy iloczynowi wektorowi siły i odległości pomiędzy kierunkiem tego wektora a punktem, w którym chcemy ten moment obliczyć (rys. 1.9, *a*).

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \cdot \vec{F}$$



Rys. 1.9. Moment siły względem punktu:

*a* - ramię; *b* - określanie znaku momentu

Prostopadła linia poprowadzona z punktu (bieguna) do linii działania siły nazywana jest **ramieniem siły** *h*.

## Podstawowe wzory obliczeniowe

### Moment pary sił

$$M(F, F') = Fh$$

**Ramię  $h$  pary sił** to najmniejsza odległość między liniami działania pary sił.

Moment uznaje się za dodatni, jeśli para sił obraca ciało w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 1.9, *b*). Jednostką miary momentu pary sił  $M(F, F')$  jest Nm. Moment pary sił jest równy algebraicznej sumie momentów par tworzących układ:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i$$

Dla równowagi par sił jest konieczne i wystarczające, aby algebraiczna suma momentów par sił w układzie była równa zero (warunek równowagi pary sił):

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0$$

Aby zrównoważyć układ pary sił, konieczne jest przyłożenie pary sił o równym module i skierowanych w przeciwnym kierunku. Taka para sił nazywana jest **zrównoważoną**.

Do ciała można przyłożyć kilka par sił. Dwie pary sił są **równoważne**, jeżeli przy innych równoważnych warunkach ich oddziaływanie na ciało jest takie samo. Ponieważ para sił charakteryzuje się momentem pary, pary sił leżące w tej samej płaszczyźnie będą **równoważne**, jeśli mają ten sam moment (tę samą wielkość i kierunek).

**Moment siły  $F$**  względem punktu  $O$  oznacza się jako  $M_0(F)$ ;

$$M_0(F) = Fh$$

Jednostką miary  $M_0(F)$  jest Nm.

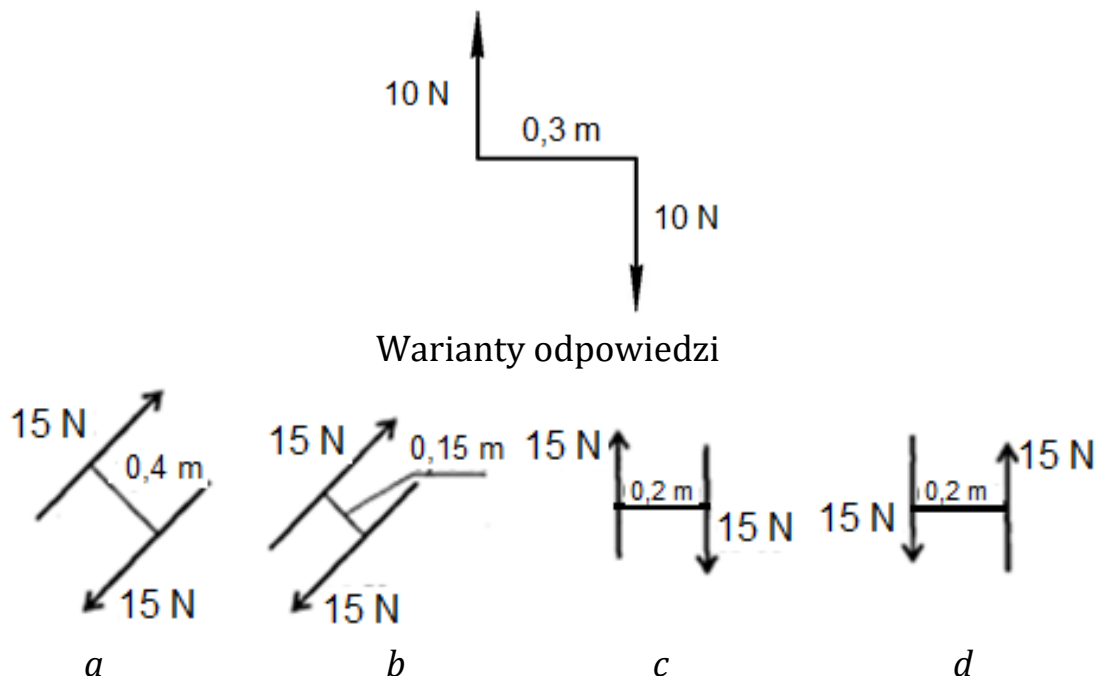
**Zasada znaków momentów.** Moment jest uważany za dodatni, jeśli siła próbuje obrócić ciało względem danego punktu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i ujemny, jeśli jest zgodny z ruchem wskazówek zegara (rys. 1.9, *b*).

**Twierdzenie Varignon'a.** Moment względem dowolnego punktu  $O$  wypadkowej dwóch sił równy jest sumie momentów tych sił względem tego punktu  $O$ .

$$M_0(R) = \sum_{i=1}^n M_0(F_i)$$

## Przykłady obliczeń

**Przykład 1.4.** Określić parę sił równoważnych podanej parze (rys. 1.10).



Rys. 1.10 . Warianty określania pary sił równoważnych

### Rozwiązanie

Ponieważ para sił charakteryzuje się momentem sił, pary sił leżące w tej samej płaszczyźnie będą **równoważne**, jeśli mają ten sam moment (tę samą wielkość i kierunek).

Moment danej pary wynosi:  $M(F) = F \cdot h = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ kNm}$ , więc poprawny jest wariant *c*. Dla tej pary kierunek i moment pokrywają się z podanym

$$M(F) = F \cdot h = 15 \cdot 0,2 = 3 \text{ kNm}$$

*Odpowiedź: c.*

**Przykład 1.5.** Określić momenty sił działających na pręt AC (rys. 1.11) względem punktów A, B, C, jeżeli:  $F_1 = 10 \text{ N}$ ;  $F_2 = 20 \text{ N}$ ;  $F_3 = 30 \text{ N}$ ;  $l_{AB} = 1 \text{ m}$ ;  $l_{BC} = 2 \text{ m}$ .

Dane:

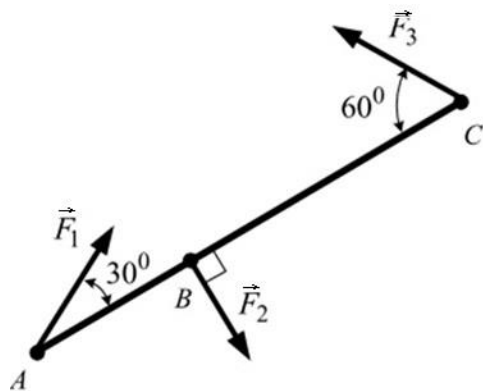
$$F_1 = 10 \text{ N}$$

$$F_2 = 20 \text{ N}$$

$$F_3 = 30 \text{ N}$$

$$l_{AB} = 1 \text{ m}$$

$$l_{BC} = 2 \text{ m}$$



Rys. 1.11. Rozkład sil w pręcie

Szukane:

$$\Sigma M_A - ? \quad \Sigma M_B - ?$$

$$\Sigma M_C - ?$$

Rozwiązanie

Zapiszemy równania momentów względem punktów A, B, C:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= -F_2 \cdot l_{AB} + F_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot l_{AC} = \\ &= -20 \cdot 1 + 30 \cdot 0,866 \cdot 3 = 57,9 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= -F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot l_{AB} + F_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot l_{BC} = \\ &= -10 \cdot 0,5 \cdot 1 + 30 \cdot 0,866 \cdot 2 \\ &= 46,96 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\Sigma M_C = -F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot l_{AC} + F_2 \cdot l_{BC} = -10 \cdot 0,5 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 25 \text{ Nm}$$

Odpowiedź:  $\Sigma M_A = 57,9 \text{ Nm}$ ,  $\Sigma M_B = 46,96 \text{ Nm}$ ,  $\Sigma M_C = 25 \text{ Nm}$ .

## Zadania do samodzielnej pracy (obliczeniowe)

**Zadanie 1.3.** Określić wartości momentów sił działających na pręty  $ABCD$  względem punktu  $A, B, C, D$ . Dane do zadania przedstawiono w tabeli 1.3.

Tabela 1.3. Dane wejściowe do zadania 1.3

Nr war.	$F_1$ N	$F_2$ N	$F_3$ N	$F_4$ N	$F_5$ N	$\alpha$ °	$\beta$ °	$AB$ m	$BC,$ m	$CD,$ m	Schemat obliczeniowy
1	5	1	2	8	4	30	60	1	1	2	
2	10	2	4	6	5	45	30	2	1	2	
3	15	3	6	12	6	60	45	1	2	1	
4	8	4	8	20	7	30	30	1	1	2	
5	6	5	10	15	8	45	60	2	1	2	
6	12	6	12	4	10	60	50	1	2	1	
7	20	7	15	2	12	30	45	1	1	2	
8	15	8	18	1	5	45	30	2	1	2	
9	4	10	14	2	10	60	50	1	2	1	
10	2	12	20	3	15	50	60	1	1	2	
11	1	5	1	4	8	30	60	1	1	2	
12	2	10	2	5	6	45	30	2	1	2	
13	3	15	3	6	12	60	45	1	2	1	
14	4	8	4	7	20	30	30	1	1	2	
15	5	6	5	8	15	45	60	2	1	2	
16	6	12	6	10	4	60	50	1	2	1	
17	7	20	7	12	2	30	45	1	1	2	
18	8	15	8	20	7	45	30	2	1	2	
19	10	4	10	15	8	60	50	1	2	1	
20	12	2	12	4	10	50	60	1	1	2	
21	20	7	15	8	4	30	45	1	1	2	
22	15	8	18	6	5	45	30	2	1	2	
23	4	10	14	12	6	60	50	1	2	1	
24	2	12	20	20	7	50	60	1	1	2	
25	1	5	1	15	8	30	60	1	1	2	
26	2	10	2	4	10	45	30	2	1	2	
27	3	15	3	2	12	60	45	1	2	1	
28	4	8	4	1	5	30	30	1	1	2	
29	5	6	5	2	10	45	60	2	1	2	
30	6	12	6	3	15	60	50	1	2	1	

### 1.3. Dowolny płaski układ sił. Wyznaczanie reakcji w podporach

#### Wiadomości ogólne

**Dowolny płaski układ sił** – to układ sił przyłożonych do ciała, których linie działania są dowolnie rozmieszczone w tej samej płaszczyźnie (nie przecinają się w jednym punkcie).

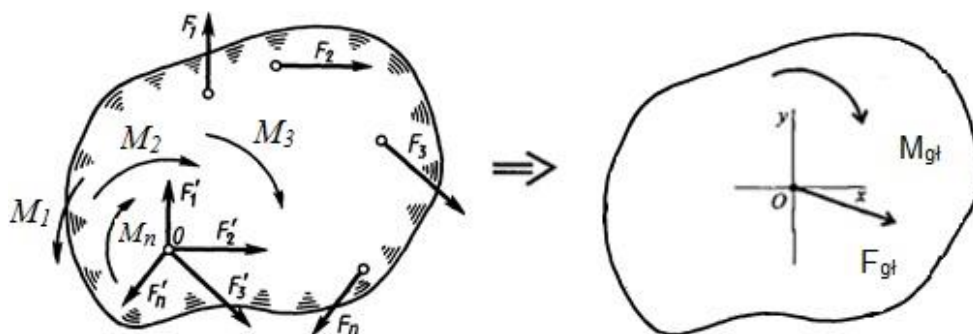
**Twierdzenie o równoległym przesuwaniu siły.** Równowaga ciała stałego nie zostanie zakłócona, jeśli siła działająca na ciało zostanie przeniesiona równolegle do siebie do dowolnego punktu ciała, lub jeśli doda się parę sił, której moment jest równy momentowi tej siły względem punktu, do którego siła jest przenoszona.

Twierdzenie o równoległym przesuwaniu siły to podstawowe twierdzenie statyczne dotyczące redukcji dowolnego układu sił działających na ciało stałe do siły i pary sił.

#### Redukcja płaskiego układu dowolnie rozmieszczonych sił

Redukcja układu sił polega na zastąpieniu go innym, prostszym układem, który jest równoważny pierwszemu, ale jest prostszy.

**Twierdzenie.** Każdy płaski układ sił można zredukować do dowolnego równoważnego układu płaskiego składającego się z jednej siły przyłożonej w dowolnie obranym biegunie redukcji  $O$  i pary sił o momencie  $M$ . Dowolny płaski układ dowolnych sił jest równoważny jednej sile – **głównemu wektorowi układu**, jaki dodaje się w środku układu, i jednej parze sił – **głównemu momentowi układu (rys. 1.12).**



Rys. 1.12. Moment główny układu



## Podstawowe wzory obliczeniowe

### Wektor główny dowolnego płaskiego układu sił

Geometryczną sumę sił układu nazywamy wektorem głównym układu.

$$\vec{F}_{gł} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

### Moduł wektora głównego płaskiego układu dowolnych sił

$$F_{gł} = F_{1_x} + F_{2_x} + F_{3_x} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i_x}$$

$$F_{gł} = F_{1_y} + F_{2_y} + F_{3_y} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i_y}$$

wtedy  $F_{gł} = \sqrt{F_{gł_x}^2 + F_{gł_y}^2}$ ,

### Kierunek modułu głównego wektora dowolnego płaskiego układu sił

$$\cos(F_{gł}, x) = \frac{F_{gł_x}}{F_{gł}}$$

### Główny moment dowolnego płaskiego układu sił

$$M_{gł} = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n M_0(F_i)$$

## Warunki równowagi płaskiego układu dowolnych sił

### Geometryczne warunki równowagi

$$F_{gł} = 0, M_{gł} = 0$$

### Analityczne warunki równowagi

#### Pierwsza postać warunku równowagi płaskiego układu dowolnych sił

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0; \sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0;$$
$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n M_0(F_i) = 0$$

W skrócie można zapisać:

$$\sum F_{i_x} = 0, \sum F_{i_y} = 0, \sum M_0 = 0$$

W literaturze można spotkać inne warianty zapisu warunku równowagi, na przykład:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0,$$

gdzie  $\Sigma X$  i  $\Sigma Y$  – sumy rzutów akcji i reakcji sił układu na osie współrzędnych (tj. wszystkich sił zewnętrznych);

$\Sigma M_A$  – suma momentów wszystkich zewnętrznych sił układu (akcji i reakcji) względem dowolnego punktu  $A$ .

**Druga postać warunku równowagi dowolnego płaskiego układu sił**

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0,$$

gdzie  $A, B, C$  – dowolne punkty odniesienia momentów sił układu;

**Trzecia postać warunku równowagi dowolnego płaskiego układu sił**

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum F_{ix} = 0$$

**Warunki równowagi płaskiego układu równoległych sił**

**Pierwsza postać warunku równowagi**

$$\sum F_{iy} = 0, \sum M_O = 0$$

**Druga i trzecia postać warunku równowagi**

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

**Zalecana sekwencja działań podczas rozwiązywania zagadnień z zakresu analizy działania sił w dowolnym płaskim układzie sił**

1. Określić ciało, którego równowagę należy wziąć pod uwagę w tym zadaniu.

2. Traktując to ciało jako swobodne, przyłożyć do niego wszystkie siły i reakcje więzów działające na ciało.

3. Ułożyć warunki równowagi, używając takiej ich postaci, która prowadzi do najprostszego rozwiązania i określić niewiadome.

4. Sprawdzić obliczenia, korzystając z warunków równowagi, które nie zostały użyte w tym zadaniu.

Dla uzyskania prostszych równań warto:

1. Przy określeniu równania rzutów narysować oś współrzędnych prostopadłą do jednej z niewiadomych sił.

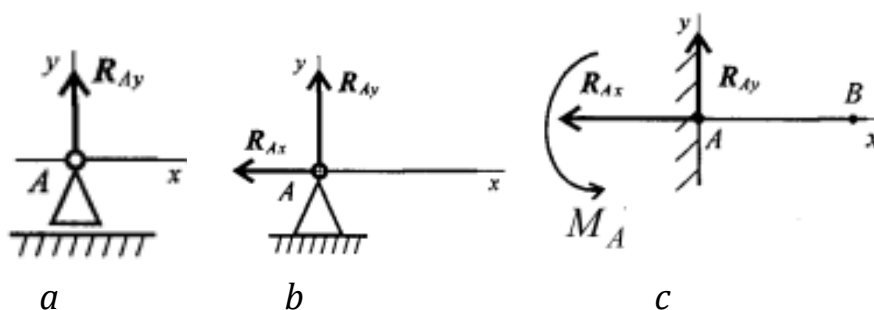
2. Przy określeniu równania momentów wybierać taki punkt, w którym przecina się największej sił.

### Określenie reakcji w podporach

Najczęściej spotykane są trzy rodzaje podpór:

**Podpora przegubowa przesuwna** (rys. 1.13, a). Podpora ta daje tylko jedną reakcję –  $R_{Ay}$ , która jest skierowana wzdłuż normalnej do powierzchni oporu;

**Podpora przegubowa nieprzesuwna** (rys. 1.13, b). Podpora umożliwia obrót wokół przegubu i może być zastąpiona przez dwie składowe siły działające wzdłuż osi współrzędnych;



Rys. 1.13. Określanie reakcji w podporach:

a - przegubowej przesuwnej; b - przegubowej nieprzesuwnej; c - w wsporniku

**Wspornik** (rys. 1.13, c). Żadne przemieszczenia nie są możliwe. Pod wpływem sił zewnętrznych w miejscu utwierdzenia pojawiają się dwie reakcje  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  i moment reakcji  $M_A$ , co zapobiega obracaniu.

### Warunki równowagi

$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum M_A = 0$$

Każde równanie ma jedną niewiadomą i jest rozwiązywane bez podstawiania.

Dla kontroli poprawności rozwiązania stosuje się dodatkowe równanie momentów w odniesieniu do dowolnego punktu na belce (elemencie konstrukcyjnym, będącym prętem prostym lub zakrzywionym (łuk) przenoszącym głównie obciążenia poprzeczne do osi pręta), na przykład B:

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum F_{ix} = 0$$

Równania momentów są określane w odniesieniu do punktów mocowania belki. Ponieważ moment siły przechodzącej przez punkt kotwienia wynosi 0, w równaniu pozostaje jedna nieznaną siłą.

Z równania  $\sum M_A = 0$  określana jest reakcja  $R_{By}$ .

Z równania  $\sum M_B = 0$  określana jest reakcja  $R_{Ay}$ .

Z równania  $\sum F_{ix} = 0$  określana jest reakcja  $R_{Bx}$ .

Dla kontroli poprawności rozwiązania stosuje się dodatkowe równanie

$$\sum F_{iy} = 0$$

W równowadze ciała stałego, w przypadku gdy można wybrać trzy punkty, które nie leżą na tej samej linii, wygodnie jest użyć układu równań w drugiej postaci

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0$$

## Przykłady obliczeń

**Przykład 1.6.** Określić wektor główny układu sił i główny moment układu względem punktu B (rys. 1.14), jeżeli:

$$F_1 = 10 \text{ kN}; F_2 = 16 \text{ kN}; F_3 = 12 \text{ kN}; M = 60 \text{ kNm}.$$

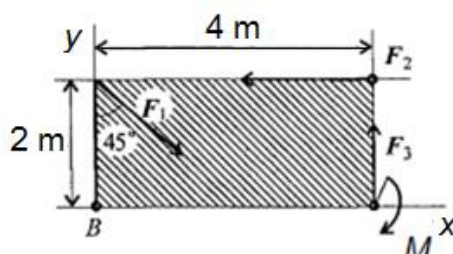
Dane:

$$F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$F_2 = 16 \text{ kN}$$

$$F_3 = 12 \text{ kN}$$

$$M = 60 \text{ kNm}$$



Szukane:

$$F_{gł} - ?$$

$$M_{gł} - ?$$

Rys. 1.14. Układ sił i momentów

### Rozwiązanie

1. Określamy główny wektor układu sił.

Wektor główny jest równy sumie geometrycznej wektorów układu sił:

$$\vec{F}_{gł_x} = \vec{F}_{1_x} + \vec{F}_{2_x} + \vec{F}_{3_x} + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i_x}$$

$$F_{gł_x} = F_{1_x} \cos 45^\circ - F_{2_x} = 10 \cdot 0,71 - 16 = -8,9 \text{ kN}$$

$$F_{gł_y} = F_{1_y} + F_{2_y} + F_{3_y} + \dots = \sum_{i=1}^n F_{i_y}$$

$$F_{gł_y} = -F_{1_y} \cos 45^\circ + F_{3_y} = -10 \cdot 0,71 + 12 = 4,9 \text{ kN}$$

$$F_{gł} = \sqrt{F_{gł_x}^2 + F_{gł_y}^2} = \sqrt{(-8,9)^2 + 4,9^2} \approx 10 \text{ kN}$$

2. Określamy główny moment układu sił względem punktu B.

Główny moment układu sił jest równy algebraicznej sumie momentów wszystkich sił układu względem punktu odniesienia:

$$M_{gł} = \sum_{i=1}^n M_B(F_i)$$

$$\sum M_B = -F_1 \cos 45^\circ \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 4 - M$$

$$\sum M_B = -10 \cdot 0,71 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 12 \cdot 4 - 60 = 5,8 \text{ kNm}$$

Odpowiedź:  $F_{gł} = 10 \text{ kN}$ ;  $M_{gł} = 5,8 \text{ kNm}$ .

**Przykład 1.7.** Określić reakcje w podporach (rys. 1.16), jeśli:

$$F_1 = 10 \text{ kN}; F_2 = 30 \text{ kN}, M = 5 \text{ kNm}, a = 2 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, \alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$$

*Dane:*

$$F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$F_2 = 30 \text{ kN}$$

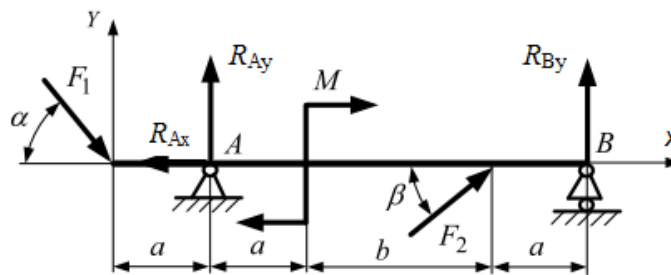
$$M = 5 \text{ kNm}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$



Rys. 1.15. Układ sił i momentów

*Szukane:*

$$R_{Ax} - ?$$

$$R_{Ay} - ?$$

$$R_{By} - ?$$

### Rozwiązanie

1. Wprowadzamy układ współrzędnych i zaznaczamy go na schemacie (rys. 1.15).

2. Podpory zamieniamy na odpowiednie reakcje i zaznaczamy je na schemacie (rys. 1.15). Kierunek reakcji wybieramy w sposób dowolny.

3. Określamy reakcje w podporach.

Dla określenia reakcji w podporach stosujemy trzecią postać warunku równowagi dowolnego płaskiego układu sił.

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum F_{ix} = 0$$

Dla kontroli poprawności rozwiązania używamy następującego dodatkowego równania

$$\sum F_{iy} = 0$$

Przyjmujemy zasadę znaków. Moment obrotowy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara jest dodatni.

$$\sum M_A = 0;$$

$$F_1 \sin \alpha \cdot a - M + F_2 \sin \beta \cdot (a + b) + R_{By}(2a + b) = 0;$$

$$R_{By} = \frac{-F_1 \sin \alpha \cdot a + M - F_2 \sin \beta \cdot (a + b)}{2a + b} =$$

$$= \frac{-10 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 + 5 - 30 \cdot \sin 45^\circ \cdot (2 + 4)}{2 \cdot 2 + 4} = -16,6 \text{ kN}$$

Znak minus oznacza, że reakcja jest skierowana w odwrotną stronę.

$$\sum M_B = 0$$

$$F_1 \sin \alpha \cdot (3a + b) - M - F_2 \sin \beta \cdot a - R_{Ay}(2a + b) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_1 \sin \alpha \cdot (3a + b) - M - F_2 \sin \beta \cdot a}{2a + b} = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ \cdot (3 \cdot 2 + 4) - 5 - 30 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2}{2 \cdot 2 + 4} = 0,3 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$F_1 \cos \alpha - R_{Ax} + F_2 \cos \beta = 0$$

$$R_{Ax} = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = 10 \cdot \cos 30^\circ + 30 \cdot \cos 45^\circ = 30 \text{ kN}$$

*Sprawdzenie*

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$-F_1 \sin \alpha + R_{Ay} + F_2 \sin \beta + R_{By} = 0$$

$$-10 \cdot 0,5 + 0,3 + 30 \cdot 0,71 - 16,6 = 0$$

$$0 = 0$$

Reakcje określono poprawnie.

*Odpowiedź:*  $R_{Ax} = 30 \text{ kN}$ ;  $R_{Ay} = 0,3 \text{ kN}$ ;  $R_{By} = -16,6 \text{ kN}$ .

**Przykład 1.8.** Określić reakcje w podporach (rys. 1.16), jeśli:

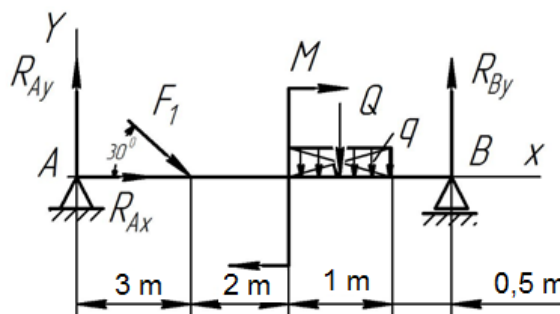
$$F_1 = 10 \text{ kN}, q = 15 \text{ kN/m}, M = 20 \text{ kNm}.$$

*Dane:*

$$F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$q = 15 \text{ kN/m}$$

$$M = 20 \text{ kNm}$$



Rys. 1.16. Schemat obciążenia belki

*Szukane:*

$$R_{Ax} - ? \quad R_{Ay} - ?$$

$$R_{By} - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Wprowadzamy układ współrzędnych i zaznaczamy go na schemacie (rys. 1.16).

2. Podpory zamieniamy na odpowiednie reakcje i zaznaczamy je na schemacie (rys. 1.16). Kierunek reakcji wybieramy w sposób dowolny.

3. Zastępujemy obciążenie rozłożone równoważną siłą, która jest przyłożona w środku wykresu (rys. 1.16):

$$Q = q \cdot l = 15 \cdot 1 = 15 \text{ kN}$$

4. Określamy reakcje w podporach.

Dla określenia reakcji w podporach stosujemy trzecią postać warunku równowagi płaskiego układu dowolnych sił

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum F_{i_x} = 0$$

Dla kontroli poprawności rozwiązania używamy następującego dodatkowego równania

$$\sum F_{i_y} = 0$$

Przyjmujemy zasadę znaków. Moment obrotowy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara jest dodatni.

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_1 \sin 30^\circ \cdot 3 - M - Q \cdot 5,5 + R_{By} \cdot 6,5 = 0$$

$$R_{By} = \frac{F_1 \sin 30^\circ \cdot 3 + M + Q \cdot 5,5}{6,5} = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 3 + 20 + 15 \cdot 5,5}{6,5} = 18 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{Ay} \cdot 6,5 + F_1 \sin 30^\circ \cdot 3,5 - M + Q1 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_1 \sin 30^\circ \cdot 3,5 - M + Q1}{6,5} = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 3,5 - 20 + 15 \cdot 1}{6,5} \approx 2 \text{ kN}$$

$$\sum F_{i_x} = 0$$

$$F_1 \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = -F_1 \cos 30^\circ - F_1 \cos 30^\circ = -10 \cdot 0,87 = -8,7 \text{ kN}$$

Znak minus oznacza, że reakcja jest skierowana w odwrotnym kierunku.

*Sprawdzenie*

$$\sum F_{i_y} = 0; -F_1 \sin 30^\circ + R_{Ay} - Q + R_{By} = 0$$

$$-10 \cdot 0,5 + 2 - 15 + 18 = 0$$

$$0 = 0$$

Reakcje określono poprawnie.

*Odpowiedź:*  $R_{Ax} = -8,7 \text{ kN}$ ;  $R_{Ay} = 2 \text{ kN}$ ;  $R_{By} = 18 \text{ kN}$ .



## Zadania do samodzielnej pracy (obliczeniowe)

**Zadanie 1.4.** Określić reakcje w podporach na podstawie danych, przedstawionych w tabeli 1.4.

Tabela 1.4. Dane wejściowe do zadania 1.4

Nr war.	$F_1$ , kN	$F_2$ , kN	$M$ , kNm	$\alpha$ , °	$\beta$ , °	$a$ , m	$b$ , m	$c$ , m	Schemat obliczeniowy
1	5	1	2	30	60	1	1	2	
2	10	2	4	45	30	2	1	2	
3	15	3	6	60	45	1	2	1	
4	8	4	8	30	30	1	1	2	
5	6	5	10	45	60	2	1	2	
6	12	6	12	60	50	1	2	1	
7	20	7	15	30	45	1	1	2	
8	15	8	18	45	30	2	1	2	
9	4	10	14	60	50	1	2	1	
10	2	12	20	50	60	1	1	2	
11	1	5	1	30	60	1	1	2	
12	2	10	2	45	30	2	1	2	
13	3	15	3	60	45	1	2	1	
14	4	8	4	30	30	1	1	2	
15	5	6	5	45	60	2	1	2	
16	6	12	6	60	50	1	2	1	
17	7	20	7	30	45	1	1	2	
18	8	15	8	45	30	2	1	2	
19	10	4	10	60	50	1	2	1	
20	12	2	12	50	60	1	1	2	
21	20	7	15	30	45	1	1	2	
22	15	8	18	45	30	2	1	2	
23	4	10	14	60	50	1	2	1	
24	2	12	20	50	60	1	1	2	
25	1	5	1	30	60	1	1	2	
26	2	10	2	45	30	2	1	2	
27	3	15	3	60	45	1	2	1	
28	4	8	4	30	30	1	1	2	
29	5	6	5	45	60	2	1	2	
30	6	12	6	60	50	1	2	1	

**Zadanie 1.5.** Określić reakcje w podporach. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 1.5.

Tabela 1.5. Dane wejściowe do zadania 1.5

Nr war.	$F_1$ , kN	$F_2$ , kN	$M$ , kNm	$q$ , kN/m	$\alpha$ , °	$a$ , m	$b$ , m	$c$ , m	Schemat obliczeniowy
1	5	1	2	1	30	1	1	2	
2	10	2	4	2	45	2	1	2	
3	15	3	6	3	60	1	2	1	
4	8	4	8	4	30	1	1	2	
5	6	5	10	5	45	2	1	2	
6	12	6	12	6	60	1	2	1	
7	20	7	15	7	30	1	1	2	
8	15	8	18	8	45	2	1	2	
9	4	10	14	10	60	1	2	1	
10	2	12	20	12	50	1	1	2	
11	1	5	1	5	30	1	1	2	
12	2	10	2	10	45	2	1	2	
13	3	15	3	15	60	1	2	1	
14	4	8	4	8	30	1	1	2	
15	5	6	5	6	45	2	1	2	
16	6	12	6	12	60	1	2	1	
17	7	20	7	20	30	1	1	2	
18	8	15	8	15	45	2	1	2	
19	10	4	10	4	60	1	2	1	
20	12	2	12	2	50	1	1	2	
21	20	7	15	1	30	1	1	2	
22	15	8	18	2	45	2	1	2	
23	4	10	14	3	60	1	2	1	
24	2	12	20	4	50	1	1	2	
25	1	5	1	5	30	1	1	2	
26	2	10	2	6	45	2	1	2	
27	3	15	3	7	60	1	2	1	
28	4	8	4	8	30	1	1	2	
29	5	6	5	10	45	2	1	2	
30	6	12	6	12	60	1	2	1	

## 1.4. Wyznaczanie środka ciężkości przekrojów płaskich

### Wiadomości ogólne

Ciała materialne składają się z cząstek elementarnych, których pozycja w przestrzeni jest określona przez ich współrzędne. Siły grawitacji każdej cząstki względem Ziemi można uznać za układ sił równoległych, a odpowiednik tych sił nazywany jest **siłą ciężkości** ciała lub **ciężarem** ciała.

**Środek ciężkości ciała jest środkiem równoległych sił przyciągania wszystkich cząstek elementarnych ciała.** Środek ciężkości to geometryczny punkt przyłożenia siły ciężkości, który może znajdować się poza ciałem (np. dysk z otworem, kątownik, wydrążona kula itp.).

### Podstawowe wzory obliczeniowe

#### Środek ciężkości ciał płaskich i geometrycznych figur płaskich

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

gdzie  $A_i$  – pole powierzchni części figury w  $\text{mm}^2$ ;  $x_i, y_i$  – współrzędne środka ciężkości części figury w mm.

Wyrażenie  $x_c = \sum_{i=1}^n A_i x_i$  nazywa się **momentem statycznym** ( $S_y$ ) przekroju płaskiego (figury). Statyczny moment pola powierzchni ciała płaskiego względem osi w płaszczyźnie ciała to geometryczna charakterystyka, która jest równa iloczynowi powierzchni ciała i odległości od jego środka ciężkości do tej osi. Wtedy współrzędne środka ciężkości przekroju można wyrazić w postaci momentu statycznego:

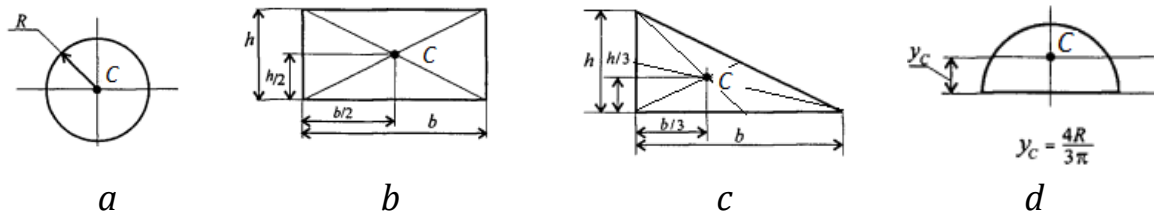
$$\sum_{i=1}^n A_i x_i = S_y; \quad x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i y_i = S_{yx}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

Osie przecinające środek ciężkości nazywane są **osiami centralnymi**. Moment statyczny względem osi centralnej **wynosi zero**.

## Środek ciężkości wybranych prostych figur

Położenie środków ciężkości prostych kształtów geometrycznych można obliczyć za pomocą odpowiednich wzorów (rys. 1.17).

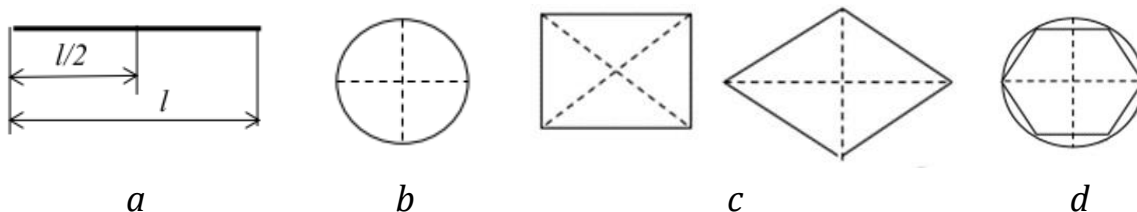


Rys. 1.17. Położenie środków ciężkości figur:  
 a – okrąg; b – kwadrat; prostokąt; c – trójkąt; d – półokrąg

## Metody wyznaczania położenia środka ciężkości

### Analityczne metody obliczeniowe

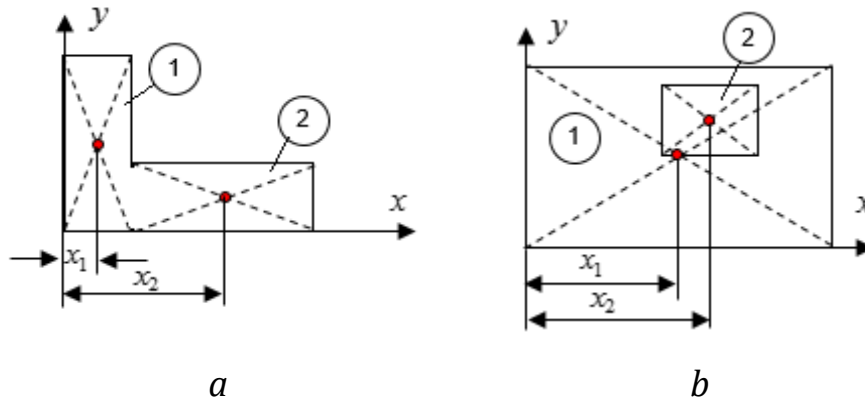
**Metoda symetrii.** Jeśli jednorodne ciało ma płaszczyznę, oś albo środek symetrii, to środek ciężkości leży odpowiednio albo na płaszczyźnie symetrii, albo na osi symetrii, albo w środku symetrii. Ta właściwość zmniejsza liczbę współrzędnych środka ciężkości, które należy określić. Uwzględniając tę właściwość, zmniejsza się ilość wyznaczanych współrzędnych środka ciężkości.



Rys. 1.18. Środek ciężkości: a – odcinka o długości  $l$ ; b – koła;  
 c - równoległoboku, rombu albo równoległociąnu; d – regularnego wielokąta

Środek ciężkości odcinka o długości  $l$  znajduje się w jego połowie (rys. 1.18, a). Środek ciężkości okręgu albo koła o promieniu  $R$  leży w jego środku, czyli w punkcie przecięcia średnic (rys. 1.18, b). Środek ciężkości równoległoboku, rombu albo równoległociąnu jest w punkcie przecięcia przekątnych (rys. 1.18, c). Środek ciężkości regularnego wielokąta – w środku okręgu wpisanego lub opisanego (rys. 1.18, d).

**Metoda dzielenia (podziału).** Figurę złożoną dzieli się na szereg prostych figur, dla których położenie środka ciężkości jest znane lub łatwe do określenia (rys. 1.19, *a*).



Rys. 1.19. Określenie środka ciężkości figur:

*a* – metodą dzielenia (podziału); *b* – metodą obszarów ujemnych

Wtedy położenia środka ciężkości całej figury jest określane według wzorów

$$x_c = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i}$$

$$y_c = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i}$$

A dla figury przedstawionej na rys. 1.19, *a* środek ciężkości

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}$$

W tym przypadku  $x_i, y_i$  – współrzędne prostej figury,  $A_i$  – jej pole przekroju.

**Metoda obszarów ujemnych (dodawania)** – jest szczególnym przypadkiem metody dzielenia (podziału). Podobnie jak w metodzie podziału, złożony kształt jest dzielony na zestaw prostych kształtów, dla których położenie środka ciężkości jest znane lub łatwe do określenia, jednak w przypadku, gdy istnieją otwory lub puste przestrzenie, wygodnie jest reprezentować w postaci „ujemnego” pola przekroju. Na przykład, figura na rys. 1.19, *b* może być przedstawiona jako dwa prostokąty, z których jeden ma ujemne pole przekroju. Wtedy środek ciężkości jest określany następująco

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2}{A_1 - A_2}$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2}$$

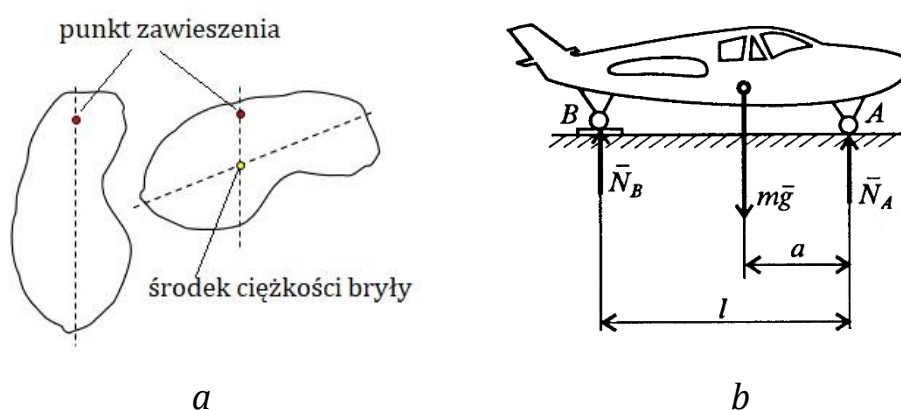
**Metoda integracji.** Stosowana jest w przypadkach, gdy pierwsze trzy metody nie mogą być użyte do określenia środka ciężkości. Jeśli figura ma

dość prosty kontur opisany dobrze znanym równaniem (okrąg, parabola itd.), wybierane jest elementarne miejsce lub pasmo i przeprowadzana jest integracja analityczna. W przypadku trudności z całkowaniem analitycznym stosowane są metody całkowania numerycznego.

### Eksperymentalne metody

Metody eksperymentalne są stosowane, gdy ciała mają złożony kształt, konfigurację, duży rozmiar i masę, dla których inne metody nie są odpowiednie ze względu na złożoność i uciążliwość. Na przykład, różne maszyny lub ich części (samoloty, samochody itd.).

**Metoda zawieszenia.** Polega na tym, że gdy ciało lub figura jest zawieszona w dowolnym punkcie, środek ciężkości znajduje się w tym samym pionie, co punkt zawieszenia. Dla określenia położenia środka ciężkości płaskiej figury wystarczy zawiesić ją naprzemiennie w dwóch dowolnych punktach i narysować odpowiednie piony, na przykład za pomocą linii, a punkt przecięcia tych linii odpowiada położeniu środka ciężkości figury (rys. 1.20, a).



Rys. 1.20. Określenie środka ciężkości:  
a – metodą zawieszenia; b – metodą ważenia

**Metoda ważenia.** Wymaga mierzenia masy całego ciała oraz odrębnych jego części. Jeżeli znana jest masa (na przykład samolotu), to na wadze ustawia się tylne koła (rys. 1.20, b) i za pomocą wskazań wagi określa się reakcję  $N_B$ . Potem układa się jedno z równań równowagi; najbardziej wygodnym jest określenie sumy momentów względem punktu A:

$$\sum_{i=1}^3 M_A(F_i) = 0$$

$$m \cdot g \cdot a - N_B \cdot l = 0$$

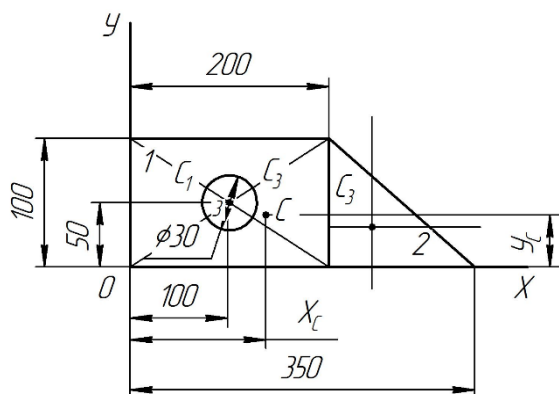
Stąd określana jest nieznana wartość  $a$ , czyli położenie środka ciężkości samolotu:

$$a = \frac{N_B l}{mg}$$

Taki eksperymentalny sposób jest szybszy i wygodniejszy, zwłaszcza w przypadku, gdy potrzebne jest określenie środka ciężkości płaskiej figury, którą ciężko jest podzielić na prostsze elementy. Jednakże metoda ta jest mniej dokładna niż analityczna, która jest dokładniejsza, ale trudniejsza i bardziej czasochłonna.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 1.9.** Określić położenia środka ciężkości figury (rys. 1.21).



Rys. 1.21. Przekrój do przykładu 1.9

### Rozwiązanie

1. Dla wyznaczenia środka ciężkości figury zastosujemy analityczną metodę dzielenia i ujemnych pól przekroju. Dzielimy złożoną figurę na proste składowe: prostokąt, trójkąt i okrąg. Nadajemy im numery i umieszczamy je na kształcie figury (rys. 1.21).

2. Tworzymy układ współrzędnych XY i określamy środki ciężkości składowych figury złożonej:

1 – prostokąt – figura symetryczna, której środek ciężkości znajduje się w miejscu przecięcia przekątnych, jego współrzędne wynoszą:

$$x_1 = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}; y = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm}; C_1(100; 50)$$

2 – trójkąt – środek ciężkości znajduje się w punkcie przecięcia jego linii środkowych albo w punkcie przecięcia linii, położonych w odległości  $\frac{1}{3}$  od przyprostokątnych, jego współrzędne wynoszą:

$$x_2 = 200 + \frac{350 - 200}{3} = 250 \text{ mm}; y_2 = \frac{100}{3} = 33 \text{ mm}; C_2(250; 33)$$

3 – okrąg – figura symetryczna, środek ciężkości której znajduje się w jej środku, jego współrzędne wynoszą:

$$x = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}; y_3 = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm}; C_3(100; 15)$$

Określone współrzędne i punkty środków ciężkości składowych płaskiej figury nanosimy na rys. 1.24.

3. Określamy pole przekroju składowych płaskiej figury:

1 – prostokąt

$$A_1 = 100 \cdot 200 = 20000 \text{ mm}^2$$

2 – trójkąt

$$A_2 = 0,5(100 \cdot (350 - 200)) = 7500 \text{ mm}^2$$

3 – okrąg

$$A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{30^2}{4} = 707 \text{ mm}^2$$



4. Określamy współrzędne środka ciężkości figury.

Ponieważ okrąg reprezentuje ujemną część płaskiej figury, przyjmuje wartość pola powierzchni ze znakiem minus.

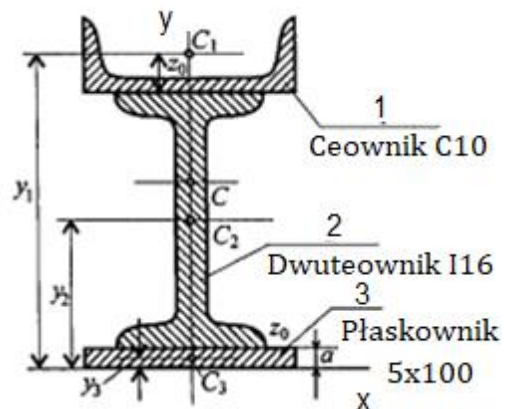
$$x_c = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{20000 \cdot 100 + 7500 \cdot 250 - 707 \cdot 100}{20000 + 7500 - 707} = 142 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 - A_3y_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{20000 \cdot 50 + 7500 \cdot 33 - 707 \cdot 50}{20000 + 7500 - 707} = 45 \text{ mm}$$

Współrzędne środka ciężkości  $C(142; 45)$  zaznaczamy na figurze (rys. 1.21).

**Przykład 1.10.** Określić środek ciężkości złożonego przekroju (rys. 1.22), który zawiera: płaskownik  $5 \times 100$  mm i wyroby walcowane: ceownik C10 i dwuteownik I16.

**Notatka.** Często ramy spawane są z różnych profili, tworząc wymagany kształt. Dzięki temu zmniejsza się zużycie materiału i uzyskuje się konstrukcję o wysokiej wytrzymałości. Dla standardowych walcowanych profili geometryczne charakterystyki są znane i są regulowane przez odpowiednie normy.



Rys. 1.22. Przekrój do przykładu 1.10

*Szukane:*

$C - ?$

*Dane:*

Płaskownik  $5 \times 100$  mm

Ceownik C10

Dwuteownik I16

### Rozwiązanie

1. Określamy układ współrzędnych  $XY$ , oznaczamy figury numerami oraz wszystkie dane bierzemy z tabel D.58 i D.59:

1 – ceownik C10; wysokość  $h_1 = 100$  mm; szerokość  $b_1 = 46$  mm;  $z_0 = 14,4$  mm;

2 – dwuteownik I16; wysokość  $h_2 = 160$  mm; szerokość  $b_2 = 81$  mm;

3 – płaskownik: wysokość  $h_3 = 5$  mm; szerokość  $b_3 = 100$  mm.

2. Określamy współrzędne środków ciężkości każdej figury:

1 – ceownik C10:

$$x_1 = 0 \text{ mm}; y_1 = a + h_2 + z_0 = 5 + 160 + 14,4 = 179,4 \text{ mm}; C_1(0; 179,4)$$

2 – dwuteownik I16:

$$x = 0 \text{ mm}; y_2 = a + \frac{h_2}{2} = 5 + \frac{160}{2} = 85 \text{ mm}; C_2(0; 85)$$

3 – blacha:

$$x_3 = 0 \text{ mm}; y_3 = \frac{a}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ mm}; C_3(0; 2,5)$$

Określone współrzędne i punkty środków ciężkości każdej części płaskiej figury zaznaczmy na rys. 1.22.

3. Określamy pola powierzchni każdej figury:

Z tabel D.58 i D.59:

1 – ceownik C10:

$$A_1 = 1090 \text{ mm}^2;$$

2 – dwuteownik I16:

$$A_2 = 2020 \text{ mm}^2;$$

3 – płaskownik:

$$A_3 = a \cdot b_3 = 5 \cdot 100 = 500 \text{ mm}^2.$$

4. Określamy współrzędne środka ciężkości figury

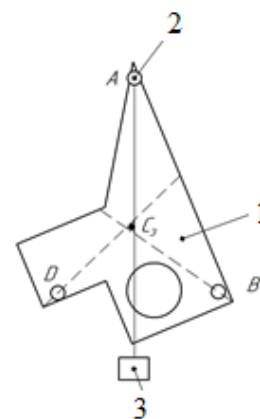
$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1090 \cdot 179,4 + 2020 \cdot 85 + 500 \cdot 2,5}{1090 + 2020 + 500} = 102 \text{ mm}$$

Współrzędne środka ciężkości figury  $C(0; 102)$  zaznaczamy na figurze na rys. 1.22.

**Przykład 1.11.** Określić środek ciężkości płaskiej figury (rys. 1.23) metodą eksperymentalną.

*Rozwiązanie*

Na płaskiej figurze nanosimy otwory  $A$ ,  $B$  i  $D$  w dowolnych punktach (lepiej w największej odległości od siebie). Płaska figura 1 jest podwieszana na igle 2 najpierw w punkcie  $A$ , a potem w punktach  $B$  i  $D$ . Za pomocą ciężaru 3, zamocowanego w punkcie 2, na figurze zaznaczamy linię pionową, która powtarza położenie nici. Środek ciężkości figury 1 będzie znajdować się w punkcie przecięcia linii pionowych, naniesionych przy podwieszeniu figury w punktach  $A$ ,  $B$  i  $D$  (rys. 1.23).



Rys. 1.23. Przekrój do przykładu 1.11

W wyniku eksperymentu uzyskaliśmy trzy linie, które nie przecinają się w jednym punkcie, tylko tworzą trójkąt. Dla kreślenia środka ciężkości  $C_e$  płaskiej figury, określonego metodą eksperymentalną, narysujemy trzy linie środkowe i w punkcie ich przecięcia zaznaczymy punkt  $C_e$ , a potem za pomocą linijki określimy jego współrzędne:  $x_{C_e}=78$  mm;  $y_{C_e}= 45$  mm, wtedy  $C_e(78;45)$ .

## Zadania do samodzielnej pracy (obliczeniowe)

**Zadanie 1.6.** Określić środek ciężkości przekroju złożonego o wymiarach, przedstawionych w tabeli 1.6.

Tabela 1.6. Dane wejściowe do zadania 1.6

Nr war.	Asortyment produktów walcowanych		Przekrój
	Nr 1	Nr 2	
1	10	18	
2	12	16	
3	14	14	
4	16	12	
5	18	10	
6	20	10	
7	18	12	
8	16	14	
9	14	16	
10	12	18	
11	10	30	
12	12	16	
13	14	14	
14	16	22	
15	18	18	
16	10	22	
17	22	10	
18	12	14	
19	18	16	
20	20	10	
21	10	30	
22	12	16	
23	14	14	
24	16	22	
25	18	18	
26	20	-	
27	16	-	
28	18	-	
29	22	-	
30	24	-	

## ROZDZIAŁ II WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

### 2.1. Rozciąganie i ściskanie

Rozciąganie i ściskanie – jedne z najprostszych i najbardziej rozpowszechnionych odkształceń bryły. Mogą one występować w elementach prawie wszystkich konstrukcji inżynierskich i budowlanych. Przewody, śruby, łopatki turbin osiowych i sprężarek są poddawane rozciąganiu; kolumny budynków są poddawane ściskaniu.

W celu wytłumaczenia zjawiska będziemy rozpatrywać efekt działania sił na pręt, który jest rozciągany lub ściskany przez zrównoważone siły zewnętrzne działające wzdłuż jego osi. Pod działaniem tych sił w przekroju poprzecznym pręta występuje tylko jedna wewnętrzna siła podłużna (normalna)  $N$ . Jej wartość jest równa algebraicznej sumie wszystkich zewnętrznych sił osiowych działających na pręt po jednej stronie przekroju. Siły skierowane od przekroju są zapisywane ze znakiem plus, a te skierowane w kierunku przekroju ze znakiem minus. Dodatnia siła  $N$  odpowiada rozciąganiu, a ujemna siła  $N$  ściskaniu.

#### Obliczanie naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym pręta



Rys. 2.1. Normalne naprężenia w pręcie

Normalne naprężenia we wszystkich punktach przekroju poprzecznego pręta są takie same i są wyznaczone za pomocą wzoru:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

gdzie  $N$  – siła wzdłużna w przekroju poprzecznym;

$A$  – pole przekroju poprzecznego pręta (rys. 2.1). Znak  $\sigma$  jest zgodny ze znakiem  $N$  (przy rozciąganiu „+”, przy ściskaniu „-”). Jednostka naprężenia – Pa (paskal).  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ;  $1 \text{ MPa} = 1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ .

#### Zależności do obliczania odkształceń i przemieszczeń w przekroju pręta

*Odształcenie bezwzględne* – wydłużenie przy rozciąganiu (rys. 2.2, a) i skrócenie przy ściskaniu (rys. 2.2, b) – w obszarze odkształceń sprężystych, obliczane jest zgodnie z prawem Hooke’a:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

gdzie  $l$  – długość odkształcanego obszaru (rys. 2.2,  $a, b$ );

$E$  – moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga), jedna ze sprężystych charakterystyk materiału.

Iloczyn  $EA$  nazywany jest sztywnością przekroju przy *rozciąganiu* (*ściskaniu*).

*Obszarem* odkształcenia jest ta część pręta, w granicach której wartości  $N, A$  i  $E$  są stałe albo zmieniają się zgodnie z tymi samymi prawami. Granicami obszarów są sekcje końcowe i sekcje, w których zmienia się co najmniej jedna z tych wartości.

Jeżeli pręt ma  $n$  odcinków, to jego bezwzględne odkształcenie jest równe algebraicznej sumie odkształcenia całego odcinka:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$$

Przemieszczenie  $\delta$  jednego obszaru względem drugiego jest równe odkształceniu obszaru pręta między tymi przekrojami.

*Względne wzdłużne odkształcenie* odcinka:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

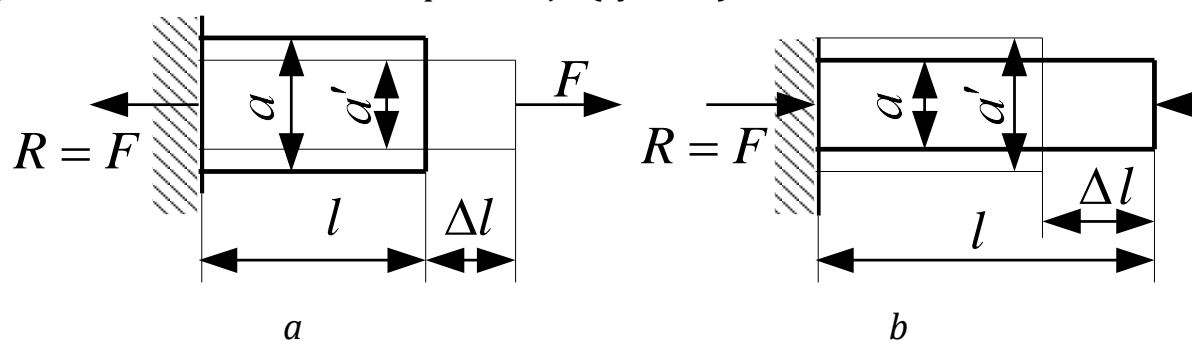
W obszarze odkształceń sprężystych istnieje związek między naprężeniem  $\sigma$  a odkształceniem względnym:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

*Względne odkształcenie poprzeczne* (przewężenie lub poszerzenie):

$$\varepsilon' = -\frac{\Delta a}{a},$$

gdzie  $\Delta a = a - a'$  – zmiana przekroju (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Odkształcenie w jednoosiowym stanie naprężenia:  
 $a$  - wydłużenie z przewężeniem;  $b$  - skrócenie z poszerzeniem

Zależność między względnymi odkształceniami poprzecznymi i wzdłużnymi:

$$\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon$$

gdzie  $\nu$  – współczynnik Poissona. Jest to charakterystyka elastyczna materiału. Dla materiałów izotropowych  $0 < \nu \leq 0,5$ .

### Obliczenia na wytrzymałość

#### Warunki wytrzymałości:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq k$$

gdzie  $N$  – siła wzdłużna w obszarze o najwyższych naprężeniach normalnych;

$A$  – pole przekroju pręta w tym obszarze;

$k$  – dopuszczalne naprężenie materiału.

W przypadku materiału plastycznego dopuszczalne naprężenia rozciągające  $k_+$  i ściskające  $k_-$  są takie same:  $k_+ = k_- = k$

$$k = \frac{R_e}{[n]}$$

gdzie  $R_e$  – granica plastyczności materiału;  $[n]$  – współczynnik bezpieczeństwa. Dla materiałów plastycznych  $[n] = 1,4 \div 1,6$ .

Dla materiału kruchego  $k_+$  i  $k_-$  są różne. Dlatego warunki wytrzymałości dla rozciągania i ściskania są zapisywane osobno:

$$\sigma_{r_{max}} = \frac{N}{A} \leq k_r$$

$$\sigma_{c_{max}} = \frac{N}{A} \leq k_c$$

$$k_r = \frac{R_m}{[n]}$$

$$k_c = \frac{R_e}{[n]}$$

gdzie  $R_m$  i  $R_e$  – granice wytrzymałości materiału dla rozciągania i ściskania odpowiednio;

$[n]$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Dla materiałów kruchych  $[n] = 2,5 \div 3,0$ .

### Trzy rodzaje zagadnień,

#### rozwiązywanych za pomocą warunków wytrzymałości

*Sprawdzenie wytrzymałości.* Obliczamy  $\sigma_{max}$  i porównujemy z  $k$ :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leftrightarrow k$$

Jeżeli  $\sigma_{max} \leq k$ , wytrzymałość elementu jest zapewniona.

*Określenie nośności pręta.*

a) obliczamy dopuszczalną wartość siły wzdłużnej:

$$N \leq A \cdot k$$

b) ustalamy zależność między wielkościami sił wzdłużnych i zewnętrznych oraz, w oparciu o tę zależność, określamy ich dopuszczalną wartość ( $[F]$  albo  $[q]$ ).

*Wybór przekroju poprzecznego.* Wymagany wymiar przekroju poprzecznego:

$$A \geq \frac{N}{k}$$

Przy określaniu wymiarów przekroju niezmiennego geometrycznie należy wyrazić obszar  $A$  przez jeden z jego wymiarów. Profile walcowane są wybierane zgodnie z tabelami asortymentowymi.

### **Obliczanie sztywności**

W obliczeniach wykorzystuje się warunek sztywności:

$$\Delta = [\Delta],$$

gdzie  $\Delta$  – rzeczywiste odkształcenie pręta lub przemieszczenie w konstrukcji;  
 $[\Delta]$  – dopuszczalna wartość odkształcenia, która jest przyjęta z warunków normalnej eksploatacji konstrukcji.

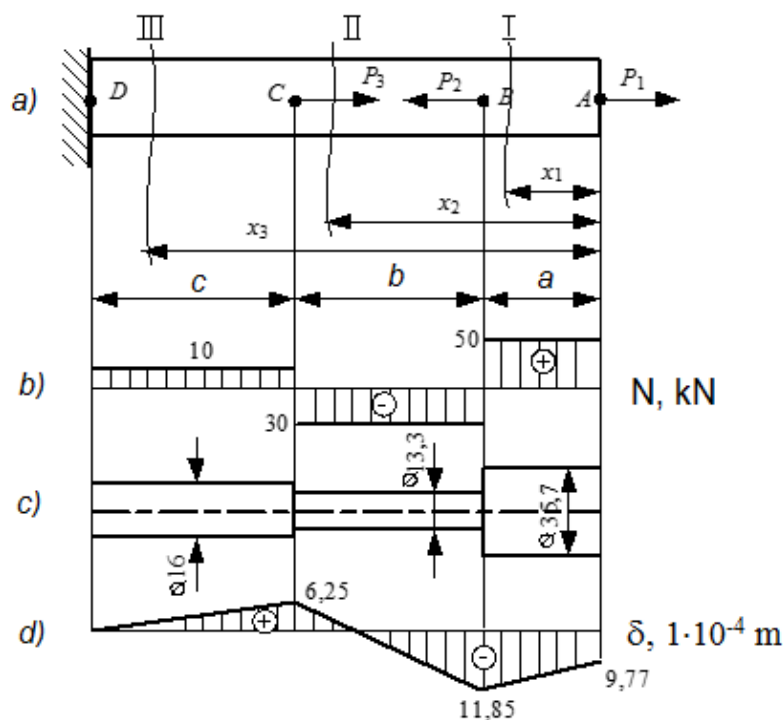


## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.1.** Dla pręta przedstawionego na rysunku (rys. 2.3, a) wykonać wykres sił normalnych i z warunku wytrzymałości określić wymiary przekrojów we wszystkich obszarach, jeśli wiadomo, że przekroje są okrągłe, pręt jest wykonany z żeliwa szarego EN-GJL-150, przyjmując współczynnik bezpieczeństwa  $n = 3$ , wewnętrzne siły i długości wynoszą odpowiednio:  $P_1 = 50$  kN,  $P_2 = 80$  kN,  $P_3 = 40$  kN,  $a = 0,5$  m,  $b = 1,0$  m,  $c = 1$  m. Sporządzić szkic pręta oraz wykres sił i przemieszczenia przekrojów pręta.

### Kolejność działań:

1. Określić dopuszczalne naprężenia.
2. Określić wzdłużną siłę  $N$  w poszczególnych przedziałach, stosując metodę przekrojów.
3. Sporządzić wykres sił  $N$  w dowolnej skali.
4. Dobrać przekrój poprzeczny pręta w jego poszczególnych przedziałach w oparciu o warunki wytrzymałościowe. Naszkicować pręt na podstawie uzyskanych wyników.
5. Aby narysować wykres przemieszczeń przekrojów pręta, najpierw należy określić bezwzględne odkształcenie w każdym przedziale zgodnie z prawem Hooke'a.
6. Określić przemieszczenie charakterystycznych przekrojów pręta i z uzyskanych danych sporządzić wykres przemieszczeń.



Rys. 2.3. Schemat pręta do przykładu 1:

a - układ sił w pręcie; b - wykres sił; c - przekrój poprzeczny pręta w jego poszczególnych przedziałach; d - wykres przemieszczeń przekrojów pręta

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenia:

Z załącznika D wybieramy wartości dla żeliwa szarego EN-GJL-150, niezbędne do obliczeń:  $R_m = 150$  MPa,  $R_e = 650$  MPa,  $E = 1,2 \cdot 10^5$  MPa.

$$k_r = \frac{R_m}{n} = \frac{150}{3} = 50 \text{ MPa};$$

$$k_c = \frac{R_e}{n} = \frac{650}{3} = 217 \text{ MPa}.$$

2. W oparciu o metodę przekrojów określamy wzdłużną siłę  $N$  w przekrojach poprzecznych pręta. Reakcji podpór nie określamy: pręt jest zamocowany tylko do lewego skrajnego przekroju, dlatego siły będziemy określać poprzez znane siły po prawej stronie  $N = \sum P_{pr}$ .

Określamy ilość przedziałów: I - AB, II - BC, III - CD.

Określamy wzdłużne siły  $N$  dla każdego przedziału:

I przedział  $0 \leq x_1 \leq a$

$$N_1 = P_1 = 50 \text{ kN}$$

II przedział  $a \leq x_2 \leq a + b$

$$N_2 = P_1 - P_2 = 50 - 80 = -30 \text{ kN}$$

III przedział  $a + b \leq x_2 \leq a + b + c$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 50 - 80 + 40 = 10 \text{ kN}$$

Z obliczeń wynika, że w przedziałach I i III pręt jest rozciągany, a w II przedziale – ściskany.

Warto zaznaczyć, że przy obliczeniach masa pręta nie była uwzględniona z powodu jej małej wartości w porównaniu z zewnętrznym obciążeniem.

3. Sporządzamy wykres  $N$  w dowolnej skali (rys. 2.3,  $b$ ).

4. Korzystając z warunków wytrzymałościowych, obliczamy średnicę pręta w poszczególnych przedziałach:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq k, \text{ skąd } A \geq \frac{N}{k} \text{ i } d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \approx 1,13\sqrt{A}$$

$$A_1 = \frac{N_1}{k_r} = \frac{50 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 10 \text{ cm}^2; d_1 = 3,57 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{N_2}{k_r} = \frac{30 \cdot 10^3}{217 \cdot 10^6} = 0,138 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 1,38 \text{ cm}^2; d_1 = 1,33 \text{ cm}$$

$$A_3 = \frac{N_3}{k_r} = \frac{10 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 2 \text{ cm}^2; d_1 = 1,6 \text{ cm}$$

Sporządzamy wykres sił działających w pręcie (rys. 2.3,  $c$ ).

5. Aby narysować wykres przemieszczeń, korzystając z prawa Hooke'a, należy określić bezwzględne odkształcenia w każdym obszarze:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}$$

Wydłużenie I-go przedziału

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1,2 \cdot 10^{11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} = 0,0208 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,0208 \text{ cm}$$

Skrócenie II-go przedziału

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{1,2 \cdot 10^{11} \cdot 0,138 \cdot 10^{-3}} = -0,181 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -0,181 \text{ cm}.$$

Wydłużenie III-go przedziału

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_3} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{1,2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 0,0625 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,0625 \text{ cm}.$$

6. Określamy przemieszczenia poszczególnych przekrojów i z uzyskanych danych sporządzamy wykresy przemieszczeń.

Pionowe przemieszczenie dowolnego przekroju jest równe zmianie długości części pręta, która znajduje się między danym przekrojem a nieelastyczną podporą (punkt początkowy). Określamy przemieszczenia poszczególnych obszarów pręta:

$$\delta_D = 0$$

$$\delta_C = \Delta l_3 = 0,0625 \text{ cm}$$

$$\delta_B = \Delta l_3 - \Delta l_2 = 0,0625 - 0,181 = 0,1185 \text{ cm}$$

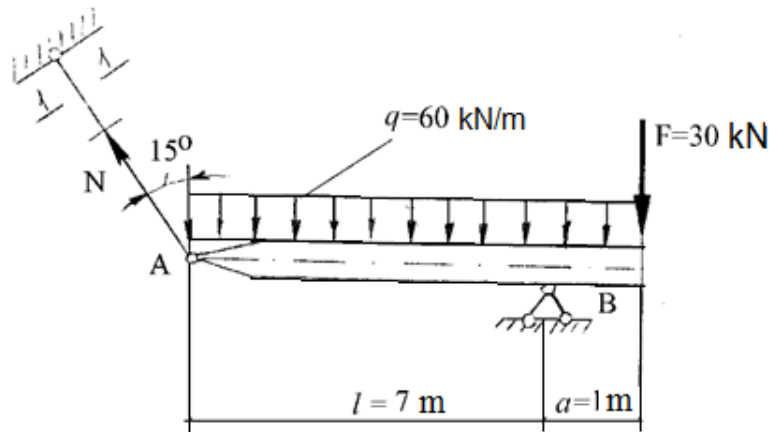
$$\delta_A = \Delta l_3 - \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,0625 - 0,181 + 0,208 = -0,0977 \text{ cm}$$

Z uzyskanych wyników sporządzamy wykres przemieszczeń (rys. 2.3, d).

Przemieszczenie przekroju A jest równie bezwzględnemu odkształceniu całego pręta

$$\delta_A = \Delta l = -0,977 \text{ mm}$$

**Przykład 2.2.** Dobrać wymiary belki AB, na której znajduje się obciążenie ciągłe (obciążenie działające na dużej powierzchni belki) (rys. 2.4). Materiał stal S215.



Rys. 2.4. Siły działające na belkę do przykładu 2.2

### Kolejność działań:

1. Określamy reakcję podpory.
2. Określamy wymagane pole przekroju poprzecznego pręta z warunków wytrzymałościowych.
3. Z przekroju poprzecznego określamy wymagany profil.
4. Sprawdzamy wytrzymałość przyjętego przekroju.

### Rozwiązanie

1. Zamieniamy obciążenie ciągłe na siłę skupioną  $N$ .

2. Układamy równanie równowagi

$$\sum M_B = 0;$$

$$-N \cdot \sin 75^\circ \cdot 7 + q \cdot 7 \cdot 3,5 - q \cdot 1 \cdot 0,5 - F \cdot 1 = 0$$

$$N = \frac{60 \cdot 7 \cdot 3,5 - 60 \cdot 1 \cdot 0,5 - 30 \cdot 1}{\sin 75^\circ \cdot 7} = 208,6 \text{ kN}$$

3. Określamy wymagany przekrój poprzeczny pręta ze wzoru:

$$A \geq \frac{N}{k}$$

$$A \geq \frac{208,6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 = 13 \text{ cm}^2$$

Dla S215  $k = 160 \text{ MPa}$  (tabela D.2).

4. Znając pole przekroju, określamy wymagany kształt profilu. Dwa kątowniki powinny mieć pole przekroju  $13 \text{ cm}^2$ , w związku z tym jeden  $A_1 = 6,5 \text{ cm}^2$ . Z tabeli D.60 przyjmujemy 2 kątowniki  $70 \times 5$  o przekroju poprzecznym  $A_1 = 6,86 \text{ cm}^2$  każdy.

$$A = 2 \cdot 6,86 = 13,72 \text{ cm}^2$$

5. Sprawdzamy wytrzymałość przyjętego przekroju:

$$\sigma \geq \frac{N}{A}$$

$$A \geq \frac{208,6 \cdot 10^3}{13,72 \cdot 10^{-4}} \approx 152 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 150 \text{ MPa} < 160$$

Warunek wytrzymałościowy został spełniony.

*Odpowiedź:* Dla pręta przyjęto przekrój z dwóch kątowników  $70 \times 5$ .

W przypadku przekroju okrągłego pręta korzystamy ze wzoru:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 1,13\sqrt{A} = 1,13\sqrt{9,93} = 3,56 \text{ cm}$$

Obliczoną wartość zaokrąglamy do standardowej wartości z tabeli D.63  
 $d = 36 \text{ mm} = 3,6 \text{ cm}$ .

*Sprawdzenie:*

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{3,6^2}{4} = 10,17 \text{ cm}^2$$

$$\frac{N}{A} = \frac{208,6 \cdot 10^3}{10,17 \cdot 10^{-4}} = 205,1 \text{ MPa} < 210 \text{ MPa}$$

Wytrzymałość została zapewniona.

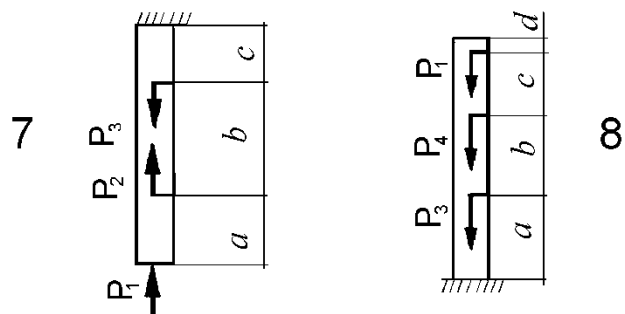
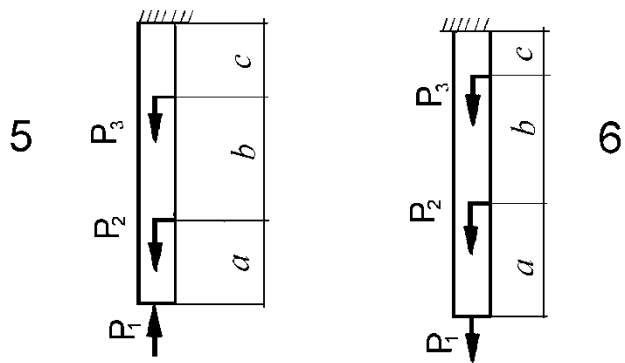
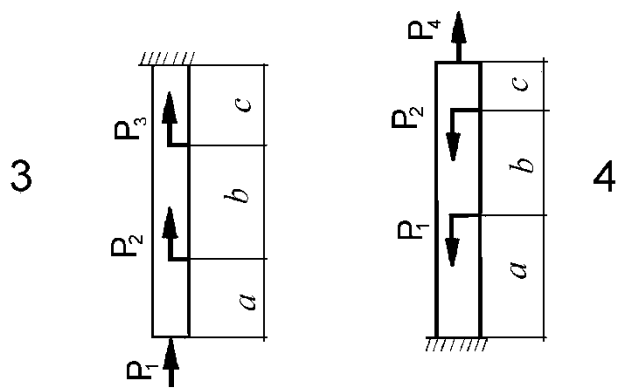
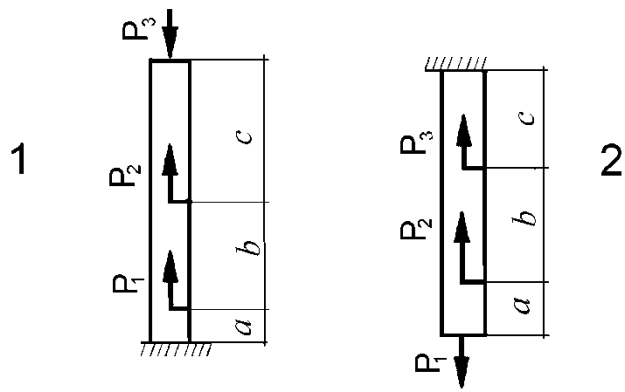
## Zadania do samodzielnej pracy (obliczeniowe)

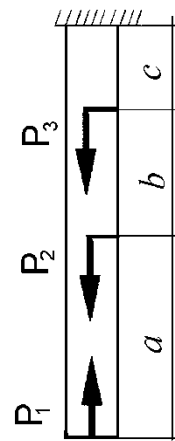
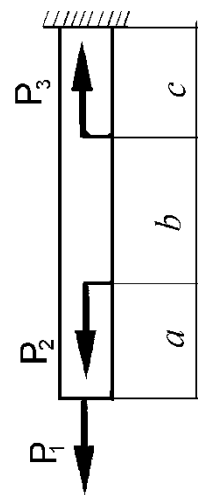
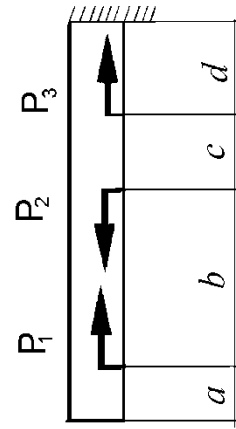
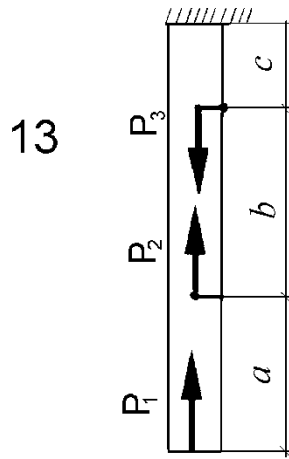
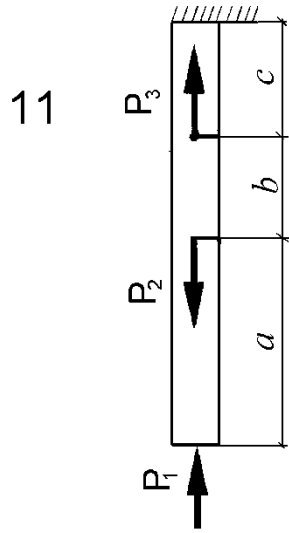
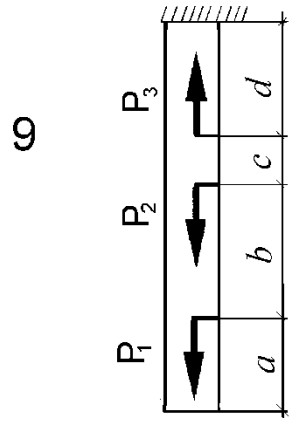
**Zadanie 2.1.** Przeprowadzić obliczenia wytrzymałości i określić odkształcenia przy rozciąganiu i ściskaniu (schematy do zadania), jeśli pręt został wykonany z żeliwa szarego EN-GJL-150, dla którego  $R_m = 150$  MPa,  $R_e = 650$  MPa,  $E = 1,2 \cdot 10^5$  MPa. Masę pręta pominąć. Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Dane wejściowe do zadania 2.1

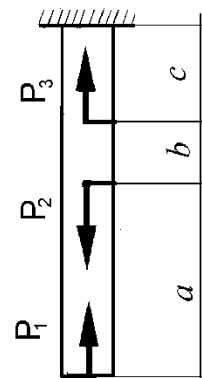
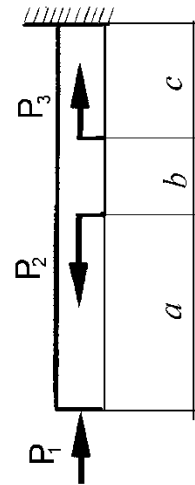
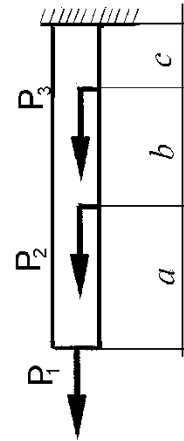
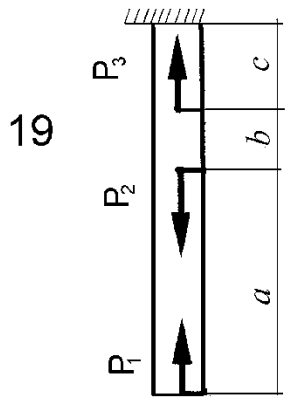
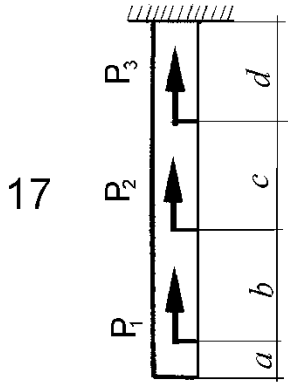
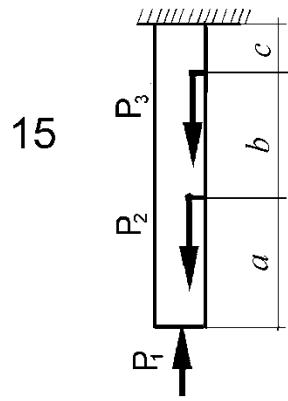
Nr war.	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
	kN			m				
1	2,5	4	2	1	2	1	2	1
2	1	6	4	2	1	2	2	1
3	2	5	8	2	1	3	2	1
4	10	24	15	2	4	1	2	2
5	7	2	4	1	2	2	2	1
6	11	6	8,5	1	2	1	1	1
7	34	11	6	2	1	2	1	1
8	2	6	5	1	3	1	2	1
9	1	2,5	1,5	3	1	1	3	1
10	8	5	7	1	2	2	1	1

## Schematy obliczeniowe do zadania 2.1

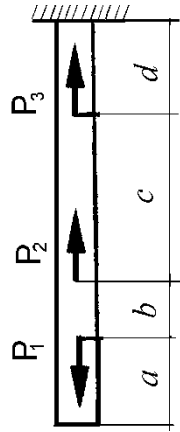




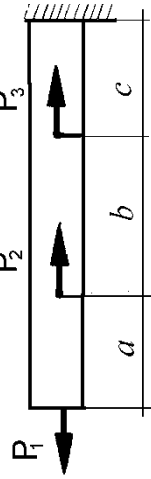




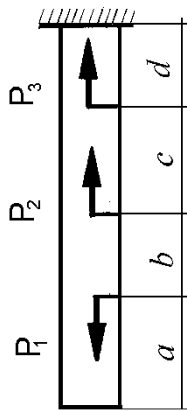
21



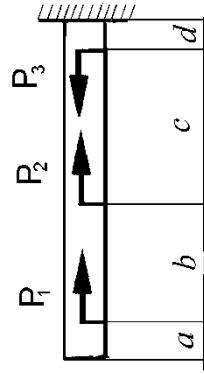
23



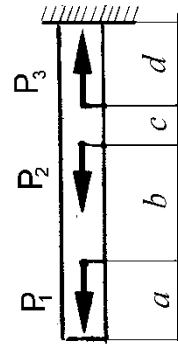
25



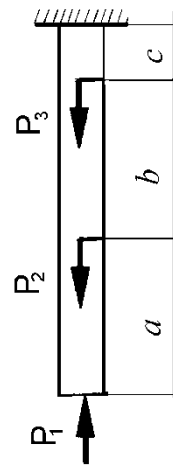
22



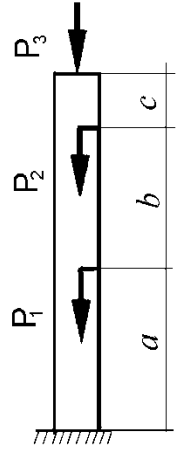
24



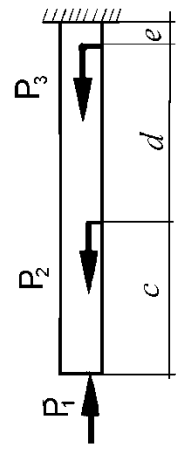
26



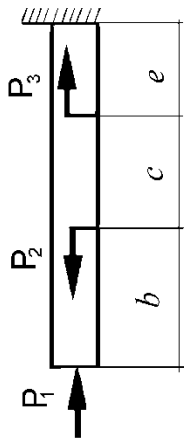
27



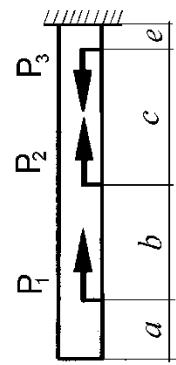
28



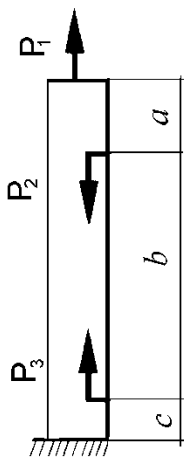
29



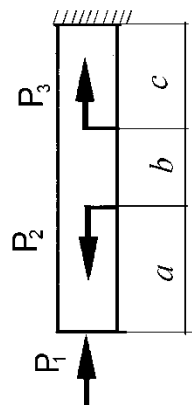
30

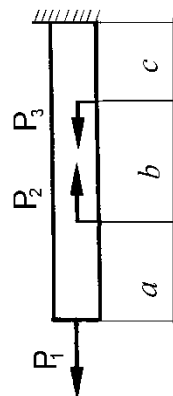
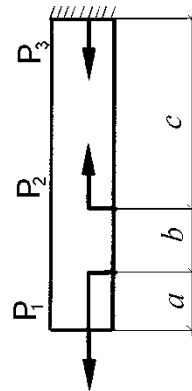
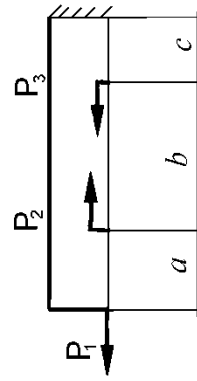
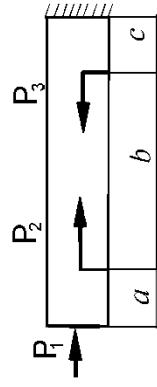
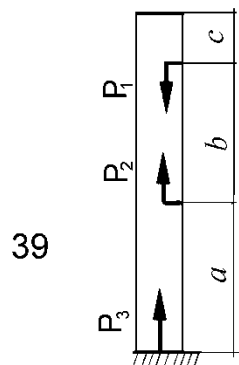
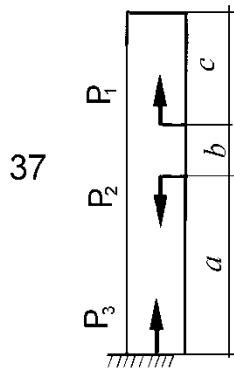
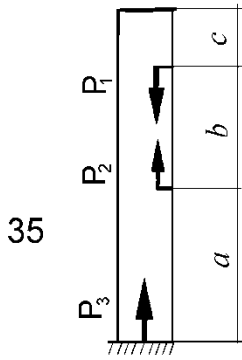
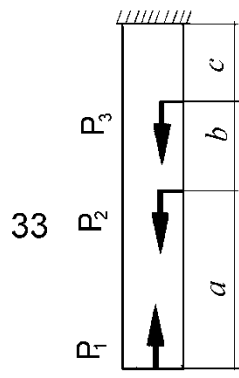


31



32





34

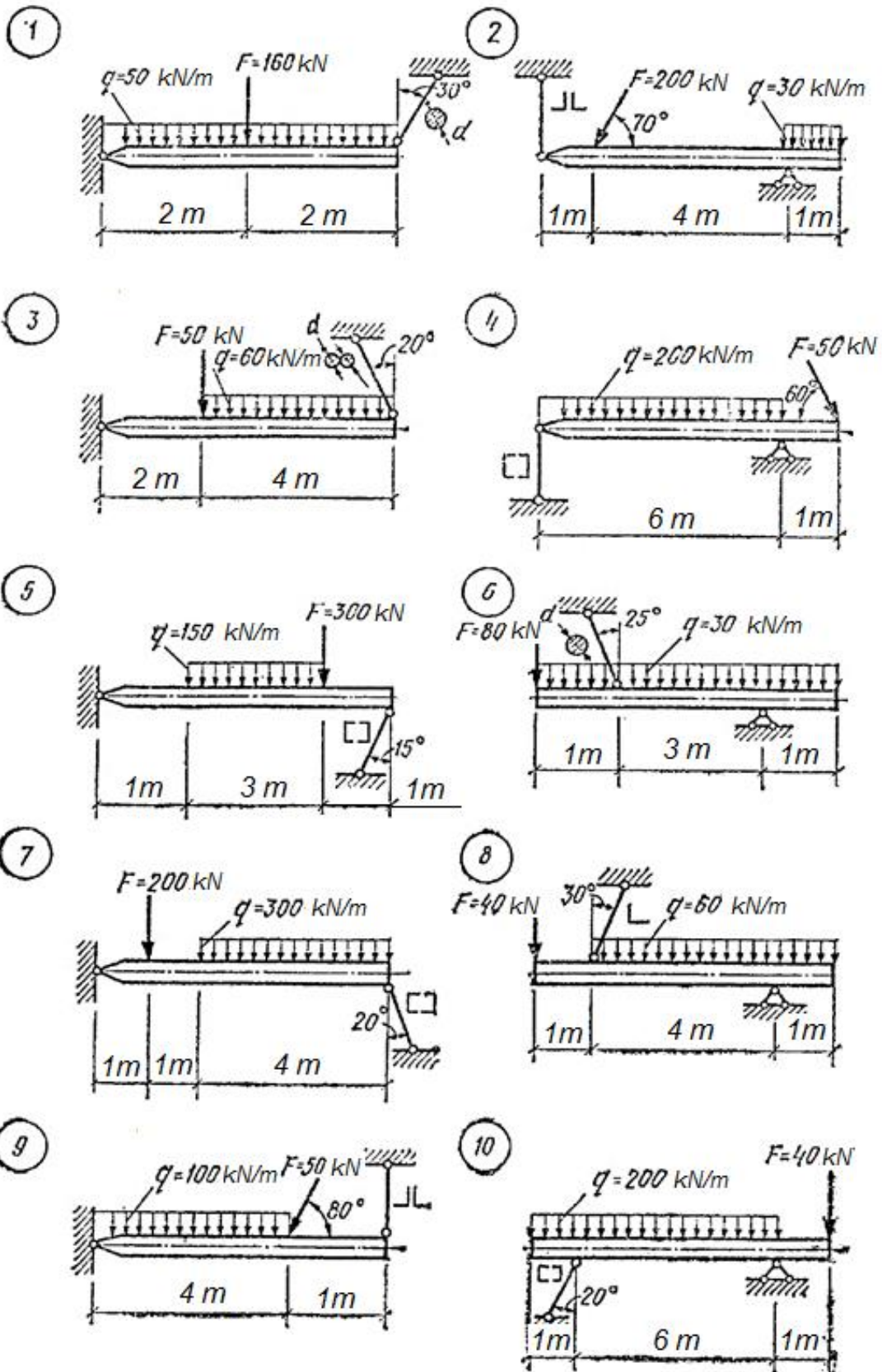
36

38

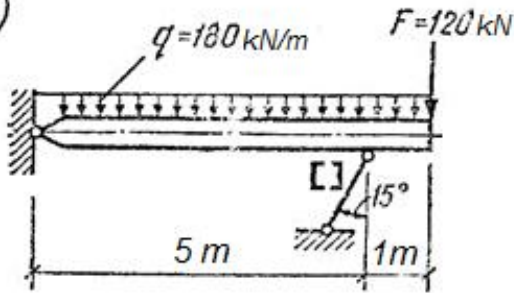
40

**Zadanie 2.2.** Wybrać przekrój poprzeczny pręta utrzymującego poprzeczkę (schematy do obliczeń). Materiał stal S215.

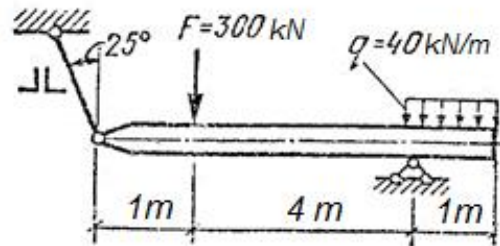
**Schematy obliczeniowe do zadania 2.2**



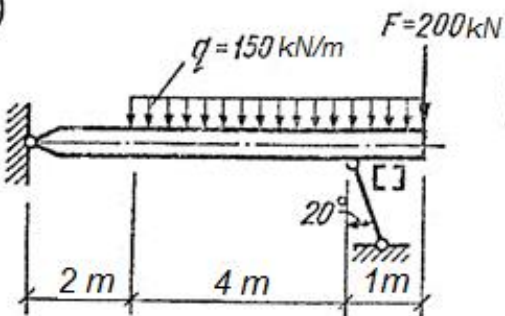
11



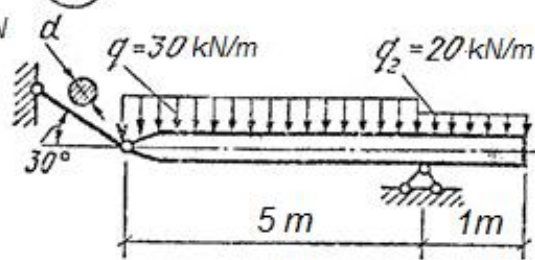
12



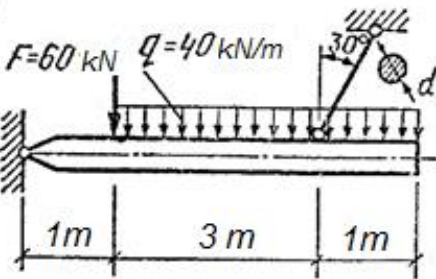
13



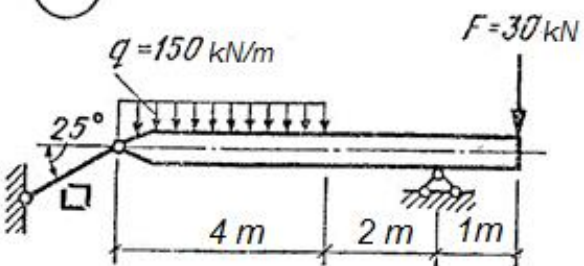
14



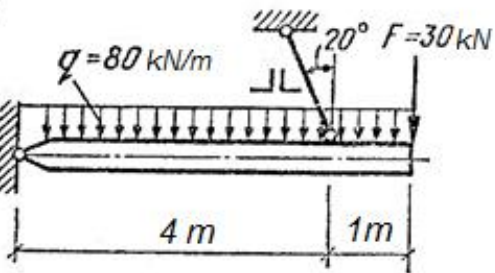
15



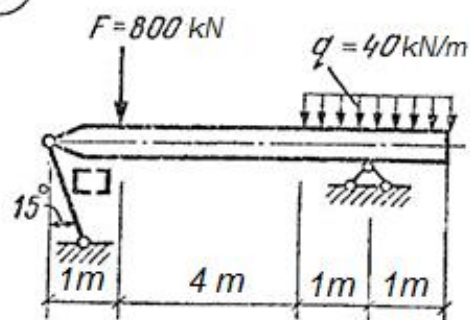
16



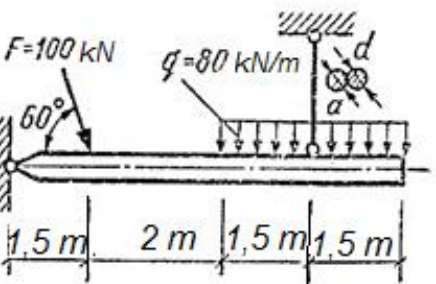
17



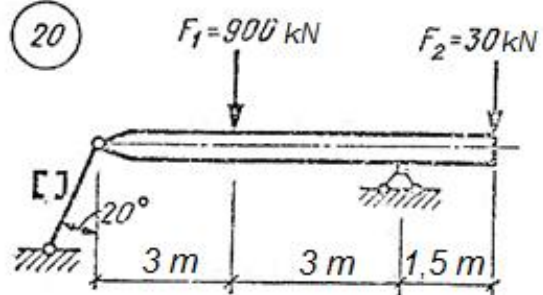
18

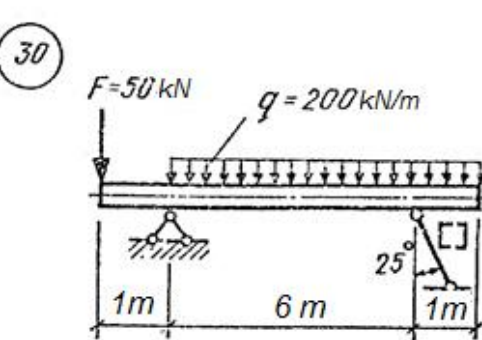
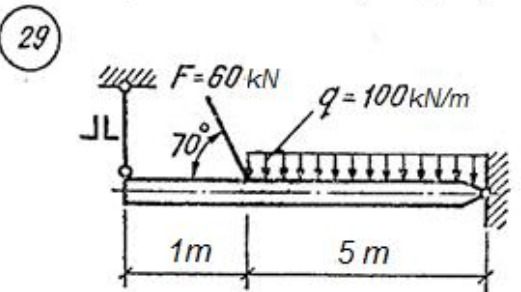
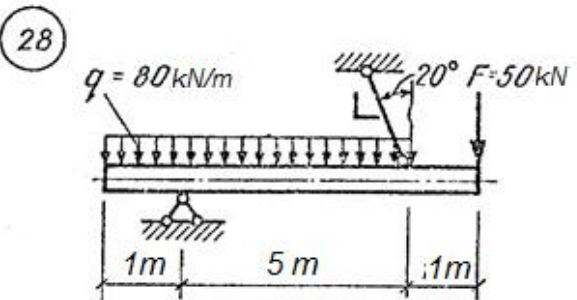
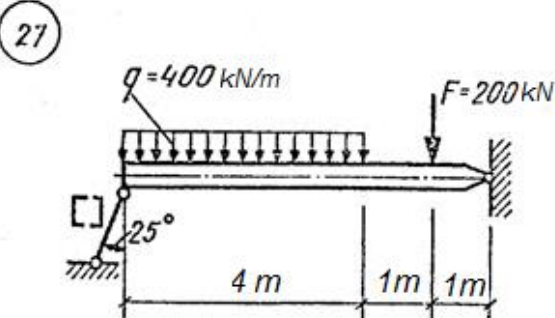
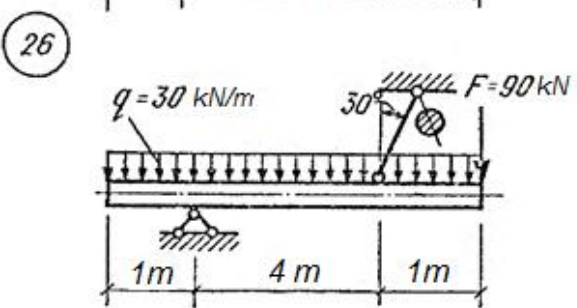
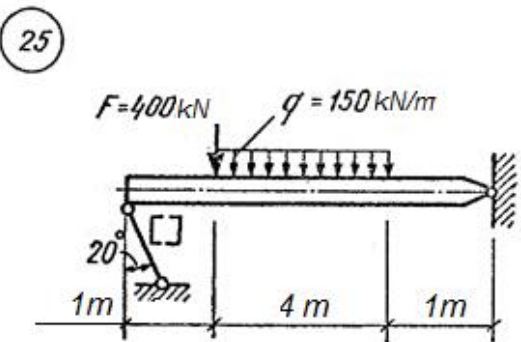
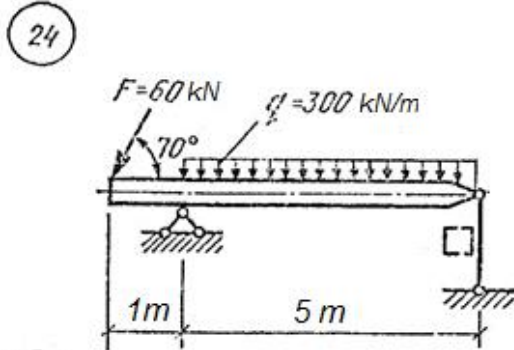
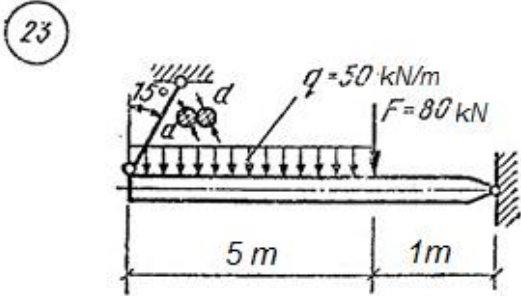
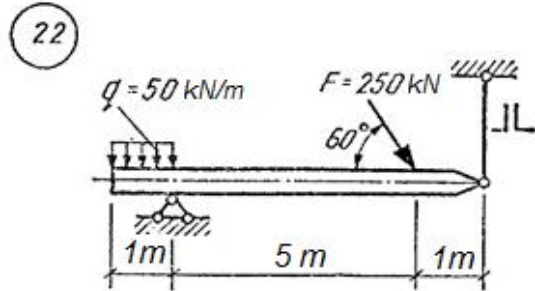
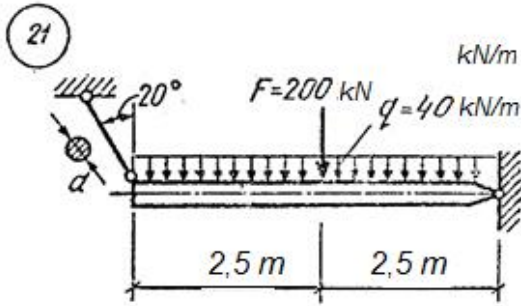


19

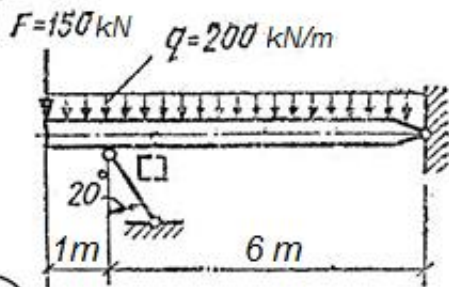


20

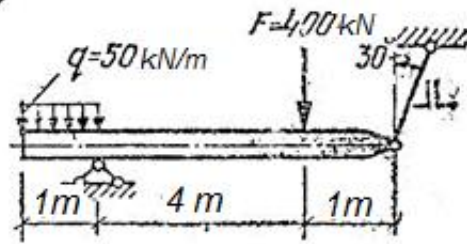




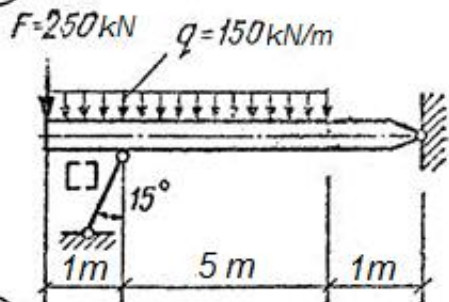
31



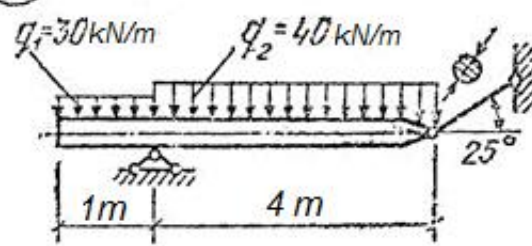
32



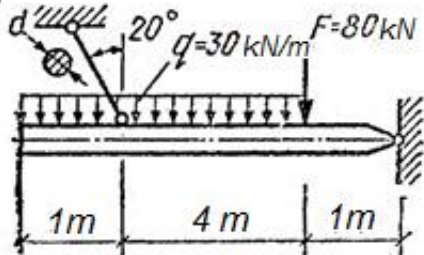
33



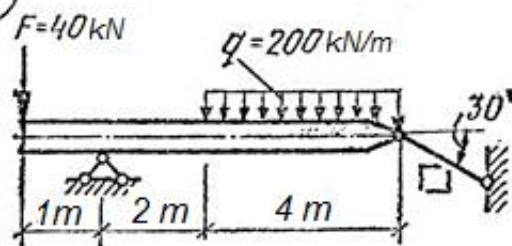
34



35



36





## 2.2. Konstrukcje statycznie niewyznaczalne

### Wiadomości ogólne

Istnieje wiele konstrukcji, w których siły wewnętrzne nie mogą być określone przy użyciu samych równań statyki, ponieważ liczba nieznanych sił w tych konstrukcjach jest większa niż liczba równań równowagi. Zadania te nazywane są statycznie *niewyznaczalnymi*.

Różnica między liczbą niewiadomych a liczbą równań statyki określa liczbę nadmiarowych niewiadomych lub stopień niepewności statycznej. Gdy jest jedna dodatkowa niewiadoma, element jest nazywany jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym, gdy są dwie, jest nazywany dwukrotnie statycznie niewyznaczalnym itd.

Opracowano ogólne metody rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych: równania równowagi statycznej są uzupełniane dodatkowymi **równaniami przemieszczeń** opartymi na wspólności odkształceń odzwierciedlających specyfikę działania konstrukcji oraz zależnościami wyrażającymi zależność przemieszczeń elementów konstrukcyjnych od sił. Wygodne jest przestrzeganie następującej kolejności:

*Statyczny aspekt zagadnienia.* Ułożyć równania równowagi dla pojedynczego elementu konstrukcji, przyjmując jedną z sił jako statycznie niewyznaczalną.

*Geometryczny aspekt zagadnienia.* Ustalić związek pomiędzy odkształceniem poszczególnych elementów konstrukcji na podstawie odkształcenia całkowitego. Otrzymane równania są **równaniami całkowitego odkształcenia**.

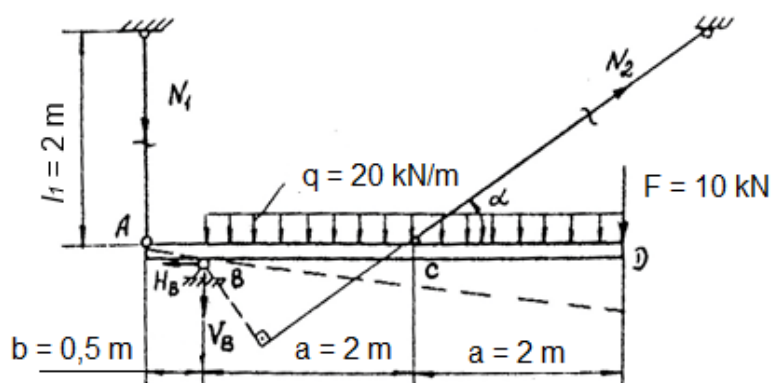
*Fizyczny aspekt zagadnienia.* Na podstawie prawa Hooke'a wyrażamy odkształcenie elementów konstrukcyjnych poprzez statycznie niewyznaczalne siły działające na nie.

*Synteza.* Rozwiązując wspólnie równania statyczne, geometryczne i fizyczne, określamy nieznanne siły.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.3.** Dla statycznie niewyznaczalnego układu prętów (rys. 2.5) określić wymiary przekrojów prętów z warunku wytrzymałości, jeżeli wiadomo, że stosunek ich przekrojów poprzecznych  $A_1:A_2 = \beta$ , pręty są wykonane ze stali S215; współczynnik bezpieczeństwa  $n = 1,6$ . Belka pozioma  $AD$  jest całkowicie sztywna, siły zewnętrzne i wymiary geometryczne wynoszą odpowiednio:

$$F = 10 \text{ kN}; q = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}; \alpha = 30^\circ; a = 2 \text{ m}; b = 0,5 \text{ m}; \beta = 0,5; l_1 = 2 \text{ m}; l_2 = 3,4 \text{ m}$$



Rys. 2.5. Schemat statycznie niewyznaczalnego układu prętów do przykładu 2.3

### Rozwiązanie

1. Dla stali S215 w tabeli D.1 znajdujemy wartości własności mechanicznych materiału, niezbędnych do obliczeń:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  i  $R_e = 240 \text{ MPa}$ .

Naprężenia dopuszczalne będą wynosić:

$$k = \frac{R_e}{n} = \frac{240}{1,5} = 1,5 \text{ MPa}$$

2. Za pomocą metody przekrojów określamy nieznanne siły  $N_1$  i  $N_2$  w prętach, uzgadniając ich kierunek z dowolnie wybranym charakterem deformacji układu prętów (na przykład, jak pokazano linią przerywaną na rys. 2.5, pierwszy pręt będzie ściskany, a drugi rozciągany). Dla określenia sił  $N_1$  i  $N_2$  rozpatrzmy równowagę układu przy oddziaływaniu sił wewnętrznych i reakcji w podporach:

$$\sum M_B = 0$$

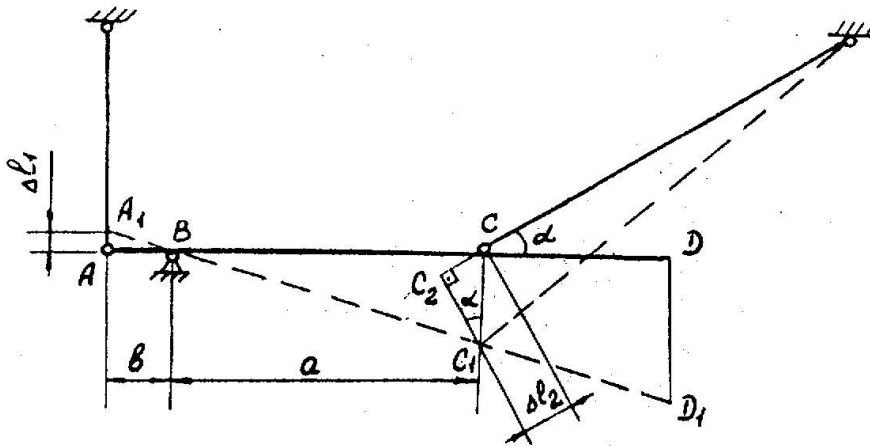
$$N_1 \cdot l + N_2 \cdot a \cdot \sin \alpha - q \cdot 2 \cdot a^2 - F \cdot 2 \cdot a = 0 \quad (2.1)$$

$$N_1 \cdot 0,5 + N_2 \cdot 2 \cdot 0,5 - 20 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = 0$$

$$0,5 \cdot N_1 + N_2 = 200 \quad (2.2)$$

Zastosowanie dwóch innych równań równowagi ( $\sum X=0$  i  $\sum Y$ ) nie ma sensu, ponieważ zawierają one nieznaną reakcję  $H_B$  i  $V_B$ , które nie muszą być określone. W taki sposób układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, ponieważ korzystając z równań statyki, można wyznaczyć trzy równania równowagi, a nieznaną są cztery wielkości:  $N_1, N_2, H_B, V_B$ .

3. Piszemy pomocnicze równanie dla zdeformowanego stanu układu (rys. 2.6).



Rys. 2.6. Zdeformowany stan układu

Z podobieństwa  $\triangle AA_1B$  i  $\triangle CC_1B$  mamy  $\frac{\Delta l_1}{CC_1} = \frac{b}{a}$ , skąd  $CC_1$  określamy z  $\triangle CC_1C_2$

$$CC_1 = \frac{\Delta l}{\sin \alpha}$$

Równanie zgodności będzie miało wówczas postać:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \sin \alpha} = \frac{a}{b} \quad (2.3)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a wyrażamy odkształcenia przez nieznaną siły

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$N_1 \cdot l_1 \cdot \sin \alpha - N_2 \cdot l_2 \cdot \beta \cdot b = 0$$

$$N_1 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 2 - N_2 \cdot 3,4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0$$

$$2N_1 - 0,85N_2 = 0 \quad (2.4)$$

4. Rozwiązując równania równowagi (2.2) i równania odkształcenia (2.4), otrzymamy siły normalne w prętach

$$N_1 = 70 \text{ kN}; \quad N_2 = 165 \text{ kN}$$

5. Zgodnie z warunkami wytrzymałości określamy wymagane pola przekroju poprzecznego obu prętów:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{k} = \frac{70 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,438 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (2.5)$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{k} = \frac{165 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (2.6)$$

Zgodnie z treścią zadania stosunek pól przekroju powinien wynosić:

$$\beta = A_1 : A_2 = 0,5$$

Zgodnie z warunkiem (2.5)  $A_1 = 0,438 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  i znając wartość  $\beta$ , obliczamy

$$A_2 = \frac{A_1}{\beta} = 0,876 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

który nie spełnia warunku (2.6). Z tego powodu, w celu spełnienia obu warunków, z (2.6) przyjmujemy  $A_2 = 1,03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .

Wtedy  $A_1 = \beta \cdot A_2 = 0,525 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  zamiast  $0,438 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .

W takim przypadku naprężenia działające w dwóch prętach będą wynosić:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{70 \cdot 10^3}{0,515 \cdot 10^{-3}} = 136 \text{ MPa} < k = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{165 \cdot 10^3}{1,03 \cdot 10^{-3}} = 160 \text{ MPa} = k = 160 \text{ MPa}$$

## **Zadania dla samodzielnej pracy** (obliczeniowe)

**Zadanie 2.3.** Sztywna belka jest podtrzymywana przez przegubową stałą podporę i przymocowana do dwóch sprężystych prętów (patrz schematy do zadania). Z obliczeń wytrzymałości określić wartość obciążenia  $P$ . Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 2.2.

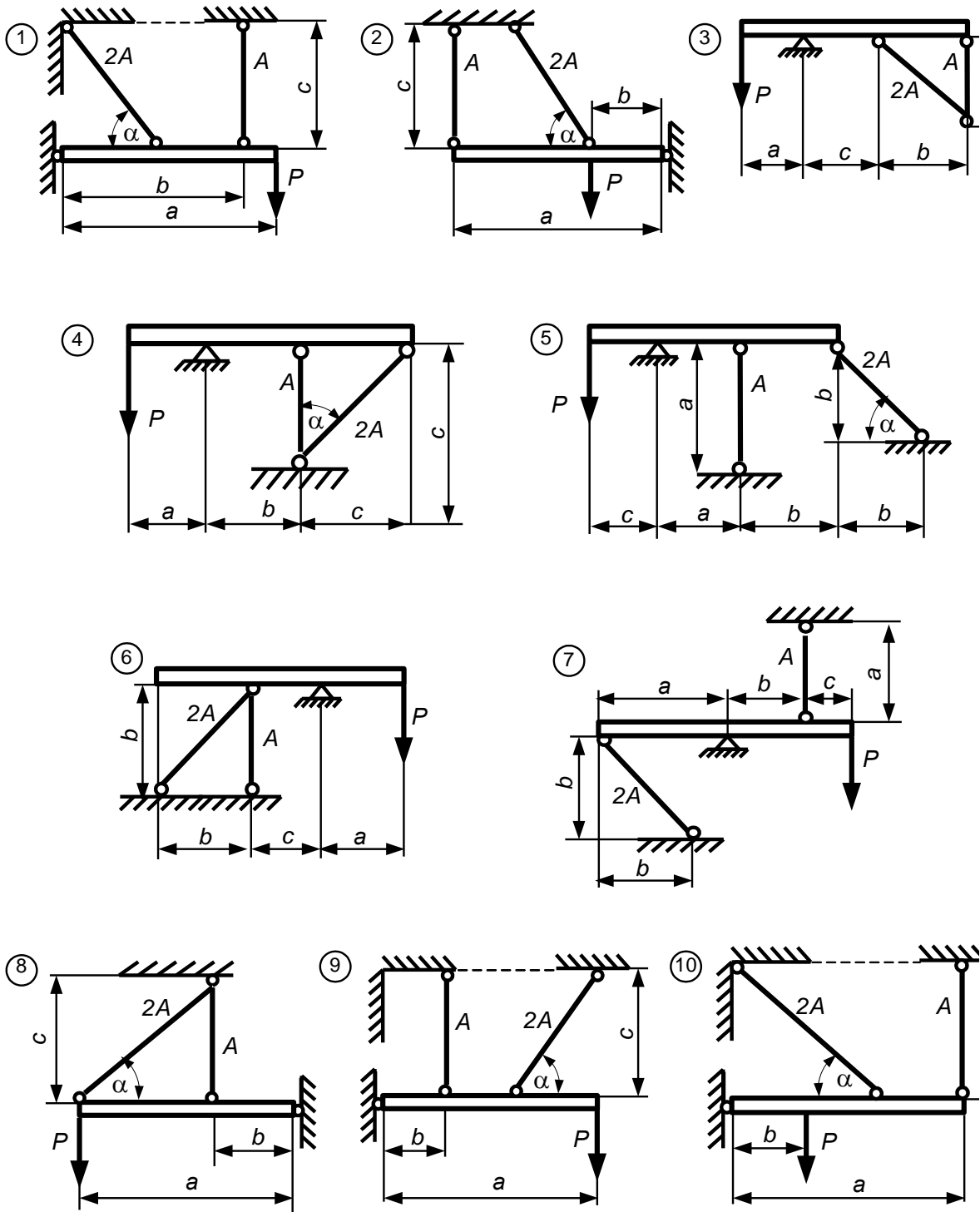
**Kolejność postępowania:**

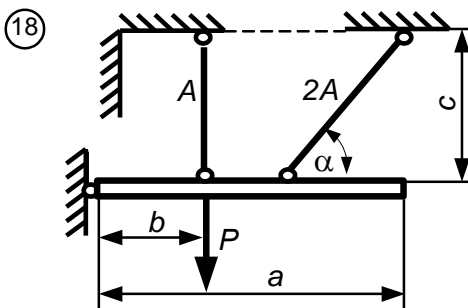
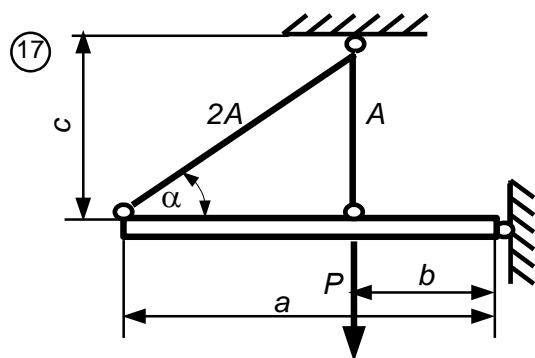
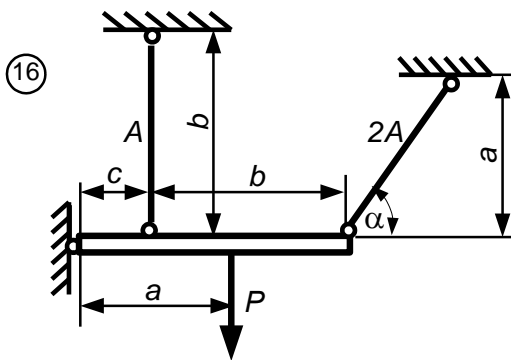
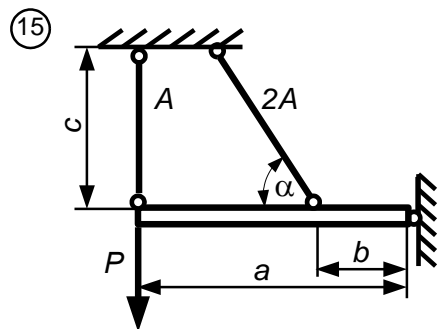
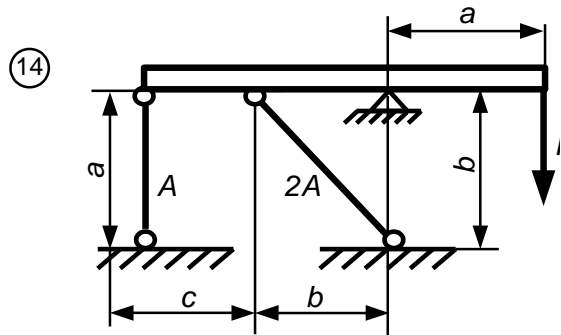
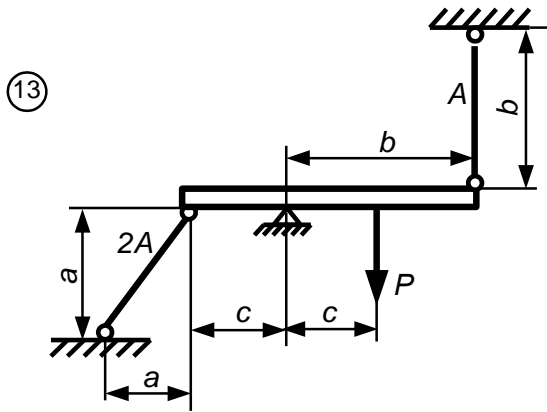
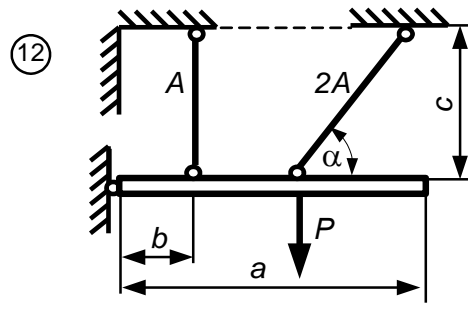
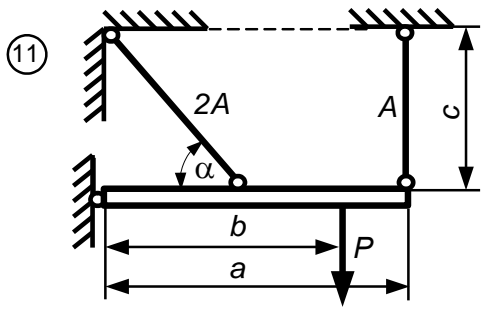
1. Stosując metodę przekrojów, określić siły działające w przekrojach.
2. Dla określenia sił należy rozpatrzyć równowagę układu, uwzględniając przyłożone do belki obciążenia i reakcje w podporach.
3. Ułożyć pomocnicze równanie zgodności odkształcenia, rozpatrując układ odkształconego stanu układu i stosunek sił.
4. Z warunku wytrzymałości określić maksymalną wartość obciążenia  $P$ .

Tabela 2.2. Dane wejściowe do zadania 2.3

Nr war.	Nr schematu	$A$ , cm <sup>2</sup>	$a$ , m	$b$ , m	$c$ , m	$\alpha$ , °	$k$ , MPa	$E \cdot 10^5$ , MPa
1	1	16	10	8	2,5	30	160	2
2	7	14	7	2	2	45	180	2
3	13	15	5	4	1,5	45	160	2
4	11	16	12	6	4	45	180	2
5	12	15	7	2	2	45	160	2
6	14	16	3	4	2	45	160	2
7	15	16	10	5	3	45	180	2
8	9	15	8	2	4	45	180	2
9	4	16	10	8	4	45	180	2
10	3	16	4	2	3	45	180	2
11	2	17	7	3	2,5	30	150	2
12	5	14	7	2	4	45	140	2
13	16	18	5	8	2	45	160	2
14	17	15	10	6	4	45	140	2
15	8	12	5,5	2	2	30	120	2
16	18	16	9	6	2	45	150	2
17	10	14	8	2	4	45	160	2
18	6	15	7	2,5	4	45	140	2
19	7	18	10	3	2,5	45	150	2
20	14	16	2,8	2,8	1,8	45	120	2
21	1	13	10	7	2	30	140	2
22	5	16	8	3,5	5	45	150	2
23	13	14	3	5	2	45	160	2
24	17	16	5	3	2	45	180	2
25	12	15	8	2	3	45	160	2
26	18	16	6	2,3	1,3	45	180	2
27	3	15	7	2	3	45	160	2
28	9	16	7	2	3	45	160	2
29	4	16	6	3	2,5	45	180	2
30	3	16,5	3	4	4	45	140	2
31	15	16	5	2,5	1,5	45	150	2
32	6	16	8	2	4	45	160	2
33	8	18	7,4	3	2,5	30	160	2
34	16	20	2,5	7,5	1,5	45	140	2
35	10	15	7	1	3	45	160	2
36	11	12	9	4	2	45	150	2
37	17	16	6	4	2	45	170	2
38	14	14	3	4	2	45	180	2
39	9	18	9	2	3	30	140	2
40	7	16	9	2	3	45	150	2

### Schematy obliczeniowe do zadania 2.3







## 2.3. Geometryczne charakterystyki przekrojów

### Wiadomości ogólne

W przypadku jednoosiowego rozciągania, ściskania i ścinania, cechą geometryczną przekroju poprzecznego elementu konstrukcyjnego było pole przekroju poprzecznego, które w pełni określało odporność elementu na odkształcenia. Jednak w przypadku zginania, skręcania i złożonych odkształceń ta charakterystyka nie jest wystarczająca.

Wytrzymałość i sztywność belki dla danego materiału i długości zależą od wymiarów i kształtów przekroju poprzecznego. Charakterystyki geometryczne przekrojów służą do ilościowego określenia tej zależności.

Umiejętność określania wymaganych charakterystyk geometrycznych jest niezbędna do obliczania wytrzymałości i sztywności belek przy różnych rodzajach odkształceń.

### Charakterystyki geometryczne płaskich przekrojów

#### Momenty bezwładności

**Statycznym momentem bezwładności płaskiego przekroju względem dowolnej osi**, która leży z nim w jednym przekroju, jest suma iloczynów powierzchni elementarnych  $dA$  całego przekroju i ich odległości do tej osi (rys. 2.7), czyli:

$$S_x = \int_A y \cdot dA,$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

Jednostka momentu statycznego –  $[m^3]$ .

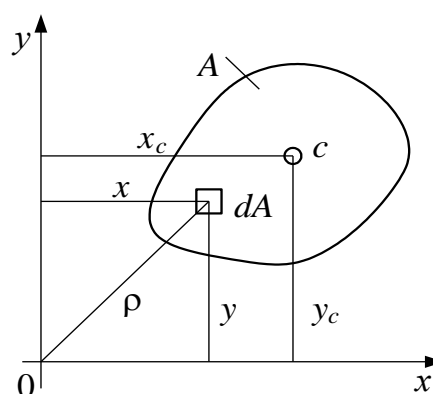
Stosując twierdzenie o sumie momentów układów sił:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_c$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = A \cdot x_c,$$

gdzie  $A$  – powierzchnia całego przekroju;

$x_c, y_c$  – współrzędne środka ciężkości przekroju.



Rys. 2.7. Przekrój pręta z układem  $xy$

Statyczny moment może przyjmować wartości **dodatnie lub ujemne**. Jeżeli oś, względem której określany jest statyczny moment, przechodzi przez środek ciężkości przekroju, czyli  $x_c = 0$  i  $y_c = 0$ , to jego statyczny moment jest **równy zero**:

$$S_x = A \cdot 0 = 0$$

$$S_y = A \cdot 0 = 0$$

Statyczne momenty przekroju złożonego wyrażają wzory:

$$S_x = \sum A_i \cdot y_i$$

$$S_y = \sum A_i \cdot x_i$$

gdzie  $A_i$  – pola części składowych przekroju złożonego;

$x_i, y_i$  – współrzędne środka ciężkości składowych przekroju względem osi  $x$  i  $y$ .

Określenie współrzędnych środka ciężkości złożonego przekroju przeprowadza się za pomocą wzorów:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

Jeżeli przekrój ma dwie osie symetrii, wówczas środek ciężkości znajduje się na ich przecięciu. Jeżeli przekrój ma jedną oś symetrii, wówczas środek ciężkości leży na tej osi i dla określenia jego położenia wymagane jest określenie tylko jednej współrzędnej.

**Osiowy moment bezwładności przekroju płaskiego względem dowolnej osi**, która leży w tej samej płaszczyźnie, jest sumą iloczynów powierzchni elementarnych  $dA$  i kwadrat ich odległości od osi (rys. 2.7). Obliczamy go ze wzoru:

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_y = \int_A x^2 dA,$$

gdzie  $x, y$  – odległość od osi, względem których określany jest moment bezwładności. Jednostka momentu bezwładności –  $[m^4]$ .

Osiowe momenty bezwładności **zawsze są dodatnie i nie mogą być równe zero**.

**Biegunowym momentem bezwładności płaskiego przekroju  $J_o$**  względem dowolnego bieguna „0”, który leży na płaszczyźnie przekroju, jest suma iloczynów powierzchni elementarnych  $dA$  przez kwadrat ich odległości od bieguna, tj.:

$$J_o = \int_A \rho^2 dA$$

gdzie  $\rho$  – odległość powierzchni elementarnej  $dA$  od bieguna (rys. 2.7).

Jeśli biegun pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, wtedy spełniona jest zależność:

$$J_o = J_x + J_y$$

Jednostka biegunowego momentu bezwładności –  $[m^4]$ .

Biegunowy moment bezwładności **zawsze jest dodatni i nie może być równy zero**.

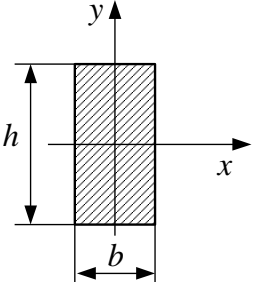
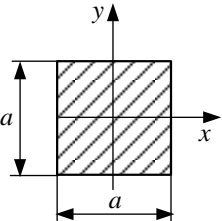
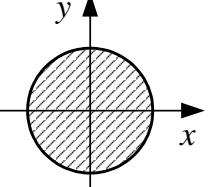
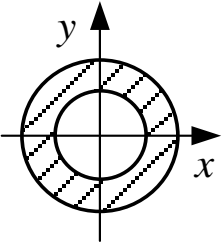
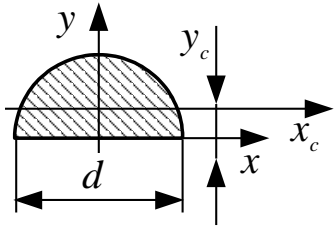
**Odśrodkowy moment bezwładności przekroju poprzecznego** jest sumą iloczynów powierzchni elementarnych  $dA$  oraz ich odległości od osi  $x$  i  $y$ . Obliczamy go ze wzoru:

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y dA$$

Odśrodkowy moment może być **dodatni, ujemny i równy zero**. Jeśli co najmniej jedna z dwóch wzajemnie prostopadłych osi jest osią symetrii, wówczas odśrodkowy moment bezwładności przekroju względem takich osi wynosi zero.

Dane z tabeli 2.3 mogą być wykorzystywane do obliczania charakterystyk geometrycznych prostych kształtów względem ich własnych osi centralnych, a dla kształtowników są one pobierane z tabel w załączniku.

Tabela 2.3. Momenty bezwładności wybranych figur płaskich

<p>Prostokąt</p> 	$A = h \cdot b$ $J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12}$
<p>Kwadrat</p> 	$A = a^2$ $J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$
<p>Koło</p> 	$A = \frac{\pi d^2}{4}$ $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05d^4$
<p>Pierścień</p> 	$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$ $J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $= (D^4 - d^4)$
<p>Półkole</p> 	$A = \frac{\pi d^2}{8}$ $y_c = 0,424r$ $J_x = J_y$ $J_{x_c} = 0,00686d^4, J_{y_c} = 0,025d^4$

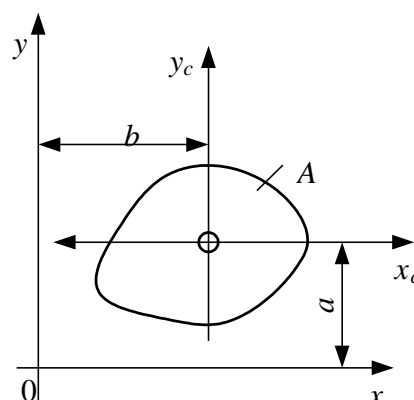
## Zależność między momentami bezwładności względem osi równoległych

Osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju nazywane są **osiami centralnymi** ( $x_c, y_c$ ), a momenty bezwładności względem nich nazywane są **centralnymi momentami bezwładności**.

Jeżeli momenty bezwładności  $J_{x_c}, J_{y_c}, J_{x_c y_c}$  względem osi centralnych  $x_c, y_c$  (rys. 2.8) są znane, to momenty bezwładności względem osi  $x$  i  $y$ , które są przesunięte równoległe do osi centralnych, są wyznaczane zgodnie ze wzorami (tw. Steinera):

$$J_x = J_{x_c} + a^2 \cdot A \qquad J_y = J_{y_c} + b^2 \cdot A \qquad J_{xy} = J_{x_c y_c} + a \cdot b \cdot A$$

gdzie  $a, b$  – współrzędne środka ciężkości ( $x, y$ ).



Rys. 2.8. Przekrój pręta z układem  $xy$

W odśrodkowym momencie bezwładności należy uwzględnić znaki współrzędnych  $a$  i  $b$  środka ciężkości.

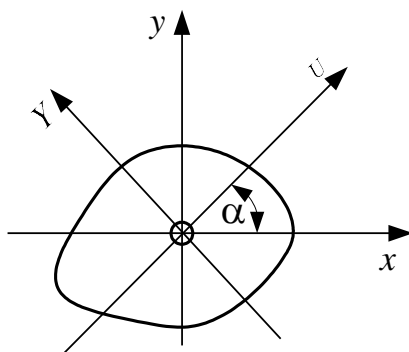
### Obliczanie momentów bezwładności przekrojów złożonych

Momenty bezwładności przekroju złożonego oblicza się jako sumę momentów jego części składowych:

$$J_x = \sum J_{x_c}^i \qquad J_y = \sum J_{y_c}^i \qquad J_{xy} = \sum J_{x_c y_c}^i$$

Jeśli przekrój posiada otwór, wygodnie jest uznać go za część figury o „ujemnym” polu powierzchni.

### Momenty bezwładności przy obrocie układu współrzędnych



Rys. 2.9. Przekrój pręta w obróconym układzie współrzędnych

Momenty bezwładności przekroju względem osi  $x', y'$ , obróconych o kąt  $\alpha$  od początkowych osi  $x, y$  (rys. 2.9), oblicza się korzystając ze wzorów:

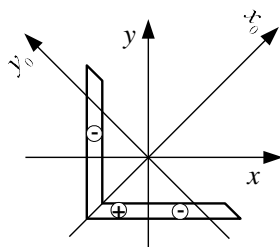
$$J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'} = J_y \sin^2 \alpha + J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

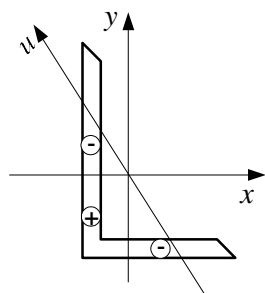
Dodatni kierunek odniesienia kąta to kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Odśrodkowy moment bezwładności kątowników względem obróconego układu współrzędnych:



kątownik równoramienny

$$J_{xy} = \pm \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2}$$



kątownik nierównoramienny

$$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_u)(J_y - J_v)}$$

Znaki „+” i „-” zależą od położenia przekroju kątownika w układzie współrzędnych.

Charakterystyki geometryczne przekrojów dla kształtowników walcowanych pochodzą z tabel asortymentu.

### Osie główne i główne momenty bezwładności

Osie główne to osie, dla których odśrodkowy moment bezwładności wynosi zero, a osiowe momenty bezwładności osiągną wartości ekstremalne.

Kąt  $\alpha$ , który określa położenie osi głównych, obliczany jest według wzoru:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

Momenty bezwładności względem głównych osi nazywają się głównymi momentami bezwładności i są obliczane zgodnie ze wzorem:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

Jedna z osi głównych obrócona jest o kąt  $\alpha$  względem osi  $x$ , druga – jest prostopadła do niej.

Osie główne przechodzące przez środek ciężkości przekroju mają znaczenie praktyczne. Są one nazywane *osiąmi głównymi centralnymi*. Momenty bezwładności względem tych osi nazywane są *głównymi centralnymi momentami bezwładności*. Są one wykorzystywane w obliczeniach.

### Wskaźniki wytrzymałości przekrojów

Wskaźniki wytrzymałości przekrojów na zginanie obliczane są względem osi głównych centralnych zgodnie ze wzorem:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}, W_y = \frac{J_y}{x_{max}}$$

gdzie  $W_x, W_y$  – wskaźniki wytrzymałości przekrojów na zginanie;

$x_{max}, y_{max}$  – odległość najdalszego punktu przekroju poprzecznego od jego osi głównej centralnej.

Jednostka wskaźnika wytrzymałości –  $[cm^3]$ . Wskaźniki nie są addytywne!

### Wzory na wskaźniki wytrzymałości na zginanie dla prostych przekrojów:

prostokąt:  $W_x = \frac{bh^2}{2}, W_y = \frac{hb^2}{2}$

kwadrat:  $W_x = W_y = \frac{a^3}{6}$

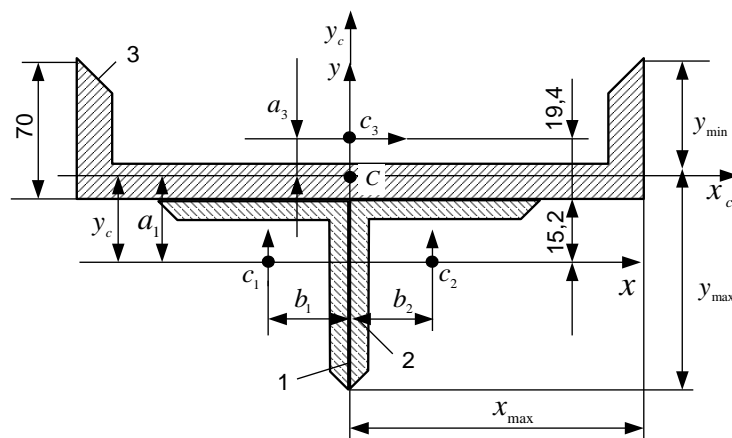
koło:  $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3$

pierścień:  $W_\rho = \frac{\pi D_z^3}{16} (1 - \alpha^4) = 0,2D_z^3 (1 - \alpha^4), \alpha = \frac{d_w}{D_z}$

$D_z$  – zewnętrzna średnica,  $d_w$  – wewnętrzna średnica.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.4.** Określić główne momenty bezwładności i wskaźniki wytrzymałości przekroju, który składa się z dwóch kątowników o wymiarach  $56 \times 56 \times 4$  oraz ceownika C18 (rys. 2.10)



Rys. 2.10. Schemat obliczeniowy do przykładu 2.4

### Rozwiązanie

1. Rys. 2.10. Dzielimy przekrój na profile walcownicze. Składa się on z dwóch kątowników  $56 \times 56 \times 4$  i ceownika C18, oznaczamy je 1, 2, 3.

2. Określamy środki ciężkości  $c_1, c_2, c_3$ , używając danych z tabeli odpowiadających każdemu profilowi.

3. Wprowadzamy układ współrzędnych. Oś  $y$  pokrywa się z osią symetrii, a oś  $x$  poprowadzimy przez środek ciężkości kątowników.

4. Określamy współrzędne środka ciężkości całego przekroju.

Ponieważ oś  $y$  pokrywa się z osią symetrii, to przechodzi ona przez środki ciężkości przekroju, dlatego  $x_c = 0$ .

Współrzędną  $y_c$  określamy za pomocą wzoru:

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Korzystając z tabel w załączniku, określamy pole powierzchni każdego profilu oraz ich współrzędne środka ciężkości.

$$A_1 = 4,38 \text{ cm}^2, y_1 = 0;$$

$$A_2 = 4,38 \text{ cm}^2, y_2 = 0;$$

$$A_3 = 20,7 \text{ cm}^2, y_3 = z_0 \text{ (kątownika)} + z_0 \text{ (ceownika)} = 1,52 + 1,94 = 3,46 \text{ cm.}$$

Współrzędne  $y_1$  i  $y_2$  są równe zero, ponieważ oś  $x$  przechodzi przez środki ciężkości kątowników.

Podstawiamy uzyskane wartości do wzoru na obliczenie  $y_c$ :



$$y_c = \frac{2 \cdot 4,38 \cdot 0 + 20,7 \cdot 3,46}{2 \cdot 4,38 + 20,7} = 2,43 \text{ cm}$$

Oznaczmy środek ciężkości literą  $c$  na rys. 2.10.

Rysujemy główne osie centralne. Oś  $y_c$  łączymy z osią symetrii, a oś  $x_c$  prowadzimy przez środek przekroju  $c$  prostopadłe do osi  $y_c$ . Osie  $y_c$  i  $y_3$  się pokrywają.

Z tabel D.58, D.60:

Ceownik C18:  $A = 20,7 \text{ cm}^2$ ,  $z_0 = 1,94 \text{ cm}$ ,  $J_x = 86 \text{ cm}^4$ ,  $J_y = 1090 \text{ cm}^4$ .

Kątownik  $56 \times 56 \times 4$ :  $A = 4,38 \text{ cm}^2$ ,  $z_0 = 1,52 \text{ cm}$ ,  $J_x = J_y = 13,1 \text{ cm}^4$ ,

$$J_{x_0} = 20,8 \text{ cm}^4, J_{y_0} = 5,41 \text{ cm}^4$$

Określamy główny moment bezwładności względem osi  $x_c$  całego przekroju (korzystamy z tw. Steinera)

$$J_{x_c} = \sum J_{x_c}^i = J_{x_c}^1 + J_{x_c}^2 + J_{x_c}^3$$

$$J_{x_c}^1 = J_{x_{c1}} + a_1^2 A_1 = 13,1 + 2,43^2 \cdot 4,38 = 38,96 \text{ cm}^4$$

gdzie  $a_1 = y_c = 2,43 \text{ cm}$ .

Z rys 2.10 wynika, że  $A_1 = A_2 = 4,38 \text{ cm}^2$  i  $a_1 = a_2 = y_c = 2,43 \text{ cm}$ , więc

$$J_{x_c}^1 = J_{x_c}^2 = 38,96 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_c}^3 = J_{x_{c3}} + a_3^2 \cdot A_3 = 86 + 1,03^2 \cdot 20,7 = 107,76 \text{ cm}^4,$$

gdzie

$$a_3 = z_{0_{ceow}} + z_{0_{kat}} - y_0 = 1,94 + 1,52 - 2,43 = 1,03 \text{ cm}$$

więc

$$J_{x_c} = 2 \cdot 38,96 + 107,76 = 185,68 \text{ cm}^4$$

Określamy główny moment bezwładności względem osi  $y_c$  całego przekroju:

$$J_{y_c} = \sum J_{y_c}^i = J_{y_c}^1 + J_{y_c}^2 + J_{y_c}^3$$

$$J_{y_c}^1 = J_{y_{c1}} + b_1^2 A_1 = 13,1 + (-1,52)^2 \cdot 4,38 = 23,22 \text{ cm}^4$$

gdzie  $b_1 = -z_{0_{kat}} = -1,52 \text{ cm}$

$$J_{y_c}^2 = J_{y_{c2}} + b_2^2 A_2 = 13,1 + 1,52^2 \cdot 4,38 = 23,22 \text{ cm}^4$$

gdzie  $b_2 = z_{0_{kat}} = 1,52 \text{ cm}$

$$J_{y_c}^3 = J_{y_{c3}} + b_3^2 A_3 = 1090 + 0^2 \cdot 20,7 = 1090 \text{ cm}^4$$

gdzie  $b_3 = 0$  ( $y_{c_{ceow}}$  jest zbieżne z  $y_c$ ).

Wtedy:

$$J_{y_c} = 2 \cdot 23,22 + 1090 = 1136,44 \text{ cm}^4$$

Określamy wskaźnik wytrzymałości względem osi  $x_c$  całego przekroju:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$$

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{y_{max}} = \frac{185,88}{6,51} = 28,55 \text{ cm}^3$$

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{y_{min}} = \frac{185,88}{6,09} = 30,52 \text{ cm}^4$$

gdzie

$$y_{max} = 5,6 - z_{0_{k\acute{a}t}} + y_c = 5,6 - 1,52 + 2,43 = 6,51 \text{ cm}$$

$$y_{min} = 7 + 5,6 - 6,51 = 6,09 \text{ cm}$$

Określamy wskaźnik wytrzymałości względem osi  $y_c$  całego przekroju:

$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{1136,44}{9} = 126,27 \text{ cm}^3$$

gdzie  $x_{max} = 18/2 = 9 \text{ cm}$ .

**Przykład 2.5.** Dla zadanego przekroju określić położenie osi głównych centralnych i wartości głównych centralnych momentów bezwładności (rys. 2.11).

*Dane:*

taśma  $240 \times 10$

kątownik równoramienny  $110 \times 110 \times 8$

ceownik C20

*Szukane:*

$x_c - ? y_c - ? \alpha_0 - ?$

$J_{x_c} - ? J_{y_c} - ?$

### *Rozwiązanie*

1. Rysujemy przekrój w dowolnej skali oraz wprowadzamy układy współrzędnych przechodzące przez środek ciężkości każdej z jego części składowych  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  (rys. 2.11).

2. Obliczamy i wypisujemy z tabel asortymentowych geometryczne charakterystyki części składowych.

Pasmo: pole powierzchni  $A_1 = 24 \cdot 1 = 24 \text{ cm}^2$ ;

momenty bezwładności:

$$J_{x_1} = \frac{24 \cdot 1^3}{12} = 2 \text{ cm}^4, J_{y_1} = \frac{24^3 \cdot 1}{12} = 1152 \text{ cm}^4$$

Kątownik  $110 \times 110 \times 8$  z tabeli D.60: pole powierzchni  $A_2 = 17,2 \text{ cm}^2$ ,

momenty bezwładności:

$$J_{x_2} = J_{y_2} = 98 \text{ cm}^4,$$

$$J_{max} = 315 \text{ cm}^4,$$

$$J_{min} = 81,8 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2 y_2} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \sin 2(-45^\circ) = \frac{315 - 81,8}{2} = -116,6 \text{ cm}^4$$

Ceownik C20 z tabeli D.58: pole przekroju  $A_3 = 23,4 \text{ cm}^2$ ;

momenty bezwładności:

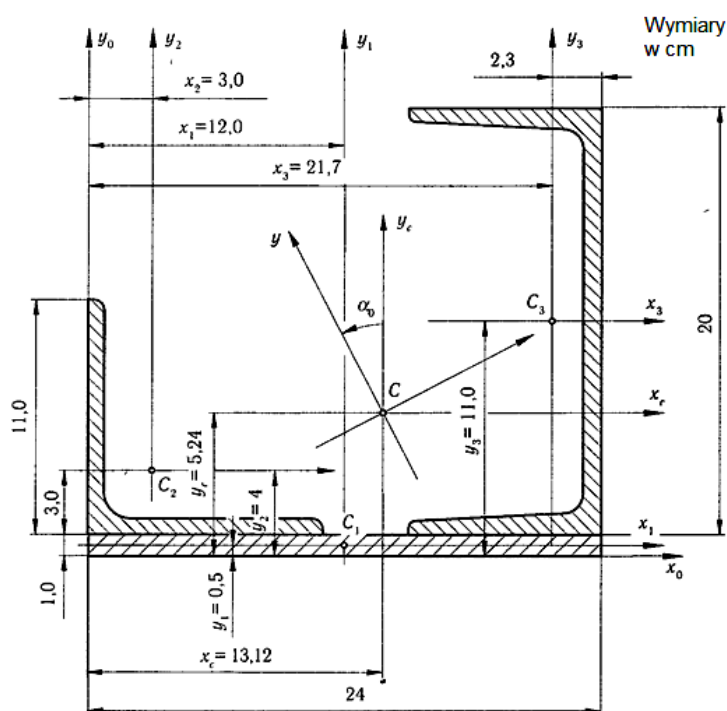
$$J_{x_3} = 1520 \text{ cm}^4, J_{y_3} = 113 \text{ cm}^4, J_{x_3 y_3} = 0$$

3. Wprowadzamy dodatkowy układ współrzędnych  $x_0, y_0$  w taki sposób, żeby cały przekrój znalazł się w pierwszej ćwiartce (to nie jest obowiązkowe, ale wygodne, ponieważ przy takim doborze osi współrzędne środków ciężkości składowych przekroju mają dodatnie wartości) i określamy za pomocą wzorów położenia środków ciężkości względem tych osi:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{24 \cdot 12 + 17,2 \cdot 3 + 23,4 \cdot 21,93}{24 + 17,2 + 23,4} = 13,2 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{24 \cdot 0,5 + 17,2 \cdot 4 + 23,4 \cdot 11}{24 + 17,2 + 23,4} = 5,24 \text{ cm}$$

Wizualnie sprawdzamy poprawność położenia określonego środka ciężkości: znajduje się on w obszarze trójkąta  $C_1 C_2 C_3$ , więc można kontynuować obliczenia.



Rys. 2.11. Schemat obliczeniowy do przykładu 2.5

4. Przez obliczony środek ciężkości  $C$  przeprowadzamy centralne osie przekroju  $x_c$  i  $y_c$  i względem tych osi określamy współrzędne środków ciężkości figur składowych.

Dla sprawdzenia poprawności określenia środka ciężkości przekroju i współrzędnych środków ciężkości prostych części składowych względem centralnych osi  $x_c, y_c$  obliczamy statyczne momenty przekroju względem osi  $x_c$  i  $y_c$ :

$$S_{x_c} = A_1(y_1 - y_c) + A_2(y_2 - y_c) + A_3(y_3 - y_c) = 24(0,5 - 5,24) + 17,2(4 - 5,24) + 23,4(11 - 5,24) = -135,088 + 134,784 = -0,304 \text{ cm}$$

$$S_{y_c} = A_1(x_1 - x_c) + A_2(x_2 - x_c) + A_3(x_3 - x_c) = 24(12 - 13,2) + 17,2(3 - 13,2) + 23,4(21,93 - 13,2) = -204,24 + 204,282 = 0,042 \text{ cm}$$

Wartości statycznych momentów są bliskie zera. Świadczy to o tym, że współrzędne środka ciężkości obliczono z wysoką dokładnością. Więc położenie centralnych osi określono poprawnie.

5. Określamy osiowe momenty i moment odśrodkowy bezwładności względem centralnych osi  $x_c$  i  $y_c$ :

$$\begin{aligned} J_{y_c} &= \sum_{i=1}^3 [J_{y_c}] = \sum_{i=1}^3 [J_{y_i} + (x_i - x_c)^2 A_i] \\ &= J_{y_1} + (x_1 - x_c)^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + (x_2 - x_c)^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + (x_3 - x_c)^2 \cdot A_3 \\ &= 1152 + (12 - 13,2)^2 \cdot 24 + 198 + (3 - 13,2)^2 \cdot 17,2 + 113 + (21,93 - 13,2)^2 \cdot 23,4 = 5070,43 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= \sum_{i=1}^3 [J_{x_c}] = \sum_{i=1}^3 [J_{x_i} + (y_i - y_c)^2 A_i] \\ &= J_{x_1} + (y_1 - y_c)^2 \cdot A_1 + J_{x_2} + (y_2 - y_c)^2 \cdot A_2 + J_{x_3} + (y_3 - y_c)^2 \cdot A_3 \\ &= 2 + (0,5 - 5,24)^2 \cdot 24 + 198 + (4 - 5,24)^2 \cdot 17,2 + 1520 + (11 - 5,24)^2 \cdot 23,4 \\ &= 3062,02 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Moment odśrodkowy całego przekroju:

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= \sum_{i=1}^3 [J_{x_c y_c}] = \sum_{i=1}^3 [J_{x_i y_i} + (x_i - x_c)(y_i - y_c) A_i] = J_{x_1 y_1} + \\ &+ (x_1 - x_c)(y_1 - y_c) \cdot A_1 + J_{x_2 y_2} + (x_2 - x_c)(y_2 - y_c) \cdot A_2 + J_{x_3 y_3} + \\ &+ (x_3 - x_c)(y_3 - y_c) \cdot A_3 = 0 + (12 - 13,2)(0,5 - 5,24) \cdot 24 - 116,6 + \\ &+ (3 - 13,2)(4 - 5,24) \cdot 17,2 + 0 + (21,93 - 13,2)(11 - 5,24) \cdot 23,4 = 1414,12 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

6. Obliczamy położenie głównych osi centralnych i określamy wartości głównych centralnych momentów bezwładności:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 1414,12}{5070,43 - 3062,02} = 1,408$$

$$2\alpha_0 = 54,62^\circ \Rightarrow \alpha_0 = 27,31^\circ$$

Ponieważ  $J_{x_c} < J_{y_c}$ , oś o najmniejszej sztywności  $x$  ( $J_x = J_{min}$ ) jest nachylona pod kątem  $\alpha_0 < 45^\circ$  do osi  $x_c$ , oś o największej sztywności  $y$  ( $J_y = J_{max}$ ) jest do niej prostopadła. Kąt  $\alpha_0$  jest odkładany przeciwnie do ruchu zegara ( $\alpha_0 > 0$ ).

$$\begin{aligned} \frac{J_{max}}{min} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} \\ &= \frac{3062,02 + 5070,43}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3062,02 - 5070,43}{2}\right)^2 + 1414,12^2} \\ &= (4066,225 \pm 1734,406) \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$J_{y_{max}} = 5800,63, J_{x_{min}} = 2331,82 \text{ cm}^4$$

## 7. Sprawdzenie.

W celu weryfikacji sprawdzamy następujące warunki:

1) suma momentów względem dowolnej pary centralnych osi przekroju powinna być stała:

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= 5800,63 + 2331,82 = 8132,45 \text{ cm}^4 \\ J_{x_c} + J_{y_c} &= 3062,02 + 5070,43 = 8132,45 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Warunek (1) jest spełniony:

$$J_x + J_y = J_{x_c} + J_{y_c}$$

2) moment odśrodkowy bezwładności przekroju względem głównych osi centralnych musi wynosić zero, obliczamy moment odśrodkowy bezwładności  $J_{xy}$ :

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = \frac{3062,02 - 5070,43}{2} \sin 54,62^\circ + \\ &+ 1414,12 \cos 54,62^\circ = -818,76 + 818,77 = 0,01 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Błąd względny

$$\frac{0,01}{818,765} 100\% = 0,001\% < 2\%$$

Warunek (2) jest również spełniony:  $J_{xy} \approx 0$ . Świadczy to o tym, że obliczenia przeprowadzono poprawnie.

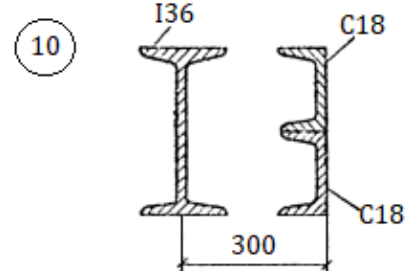
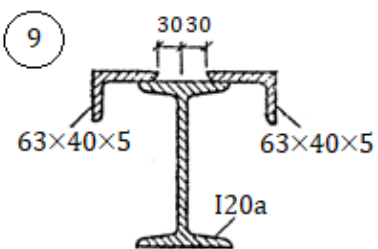
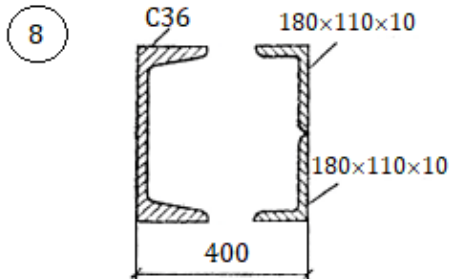
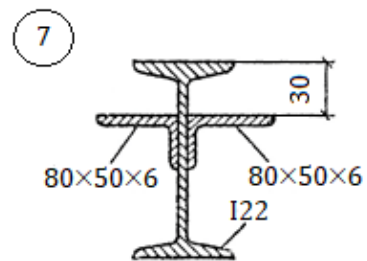
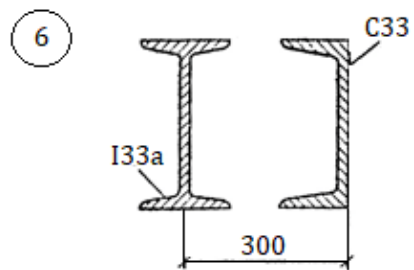
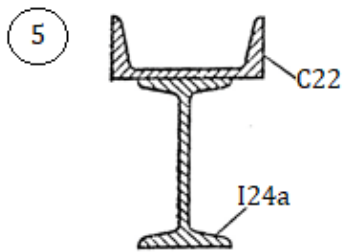
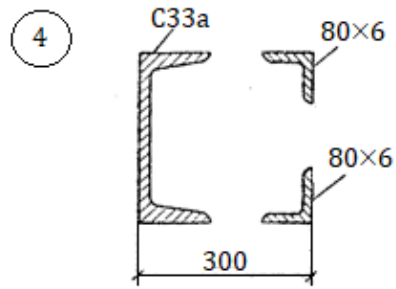
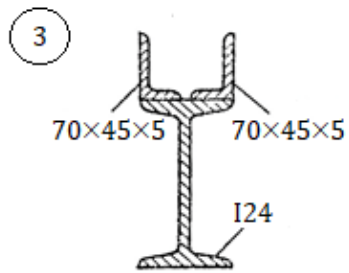
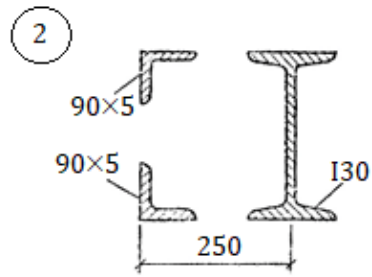
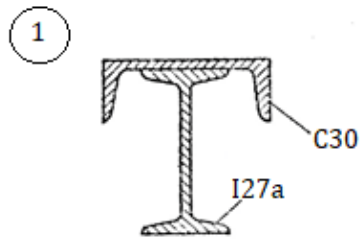
## **Zadania do samodzielnego rozwiązania** (obliczeniowe)

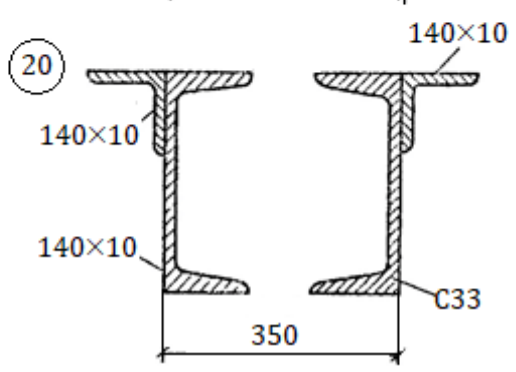
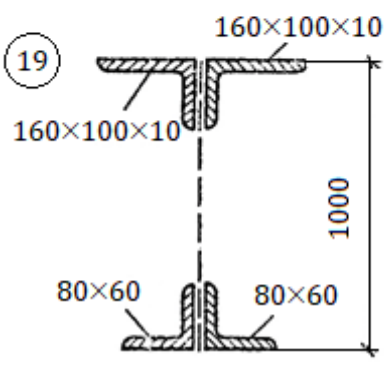
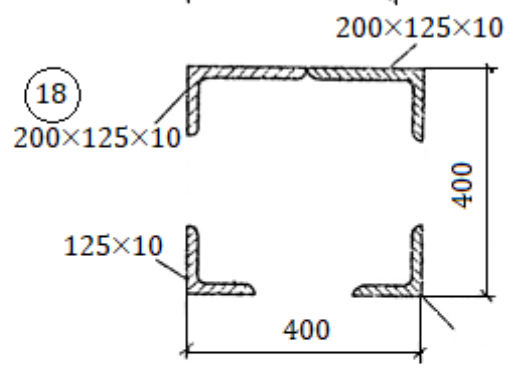
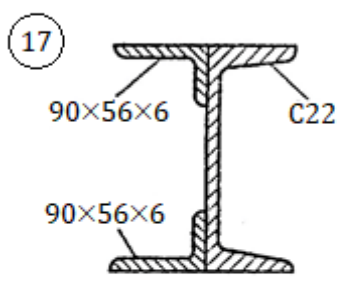
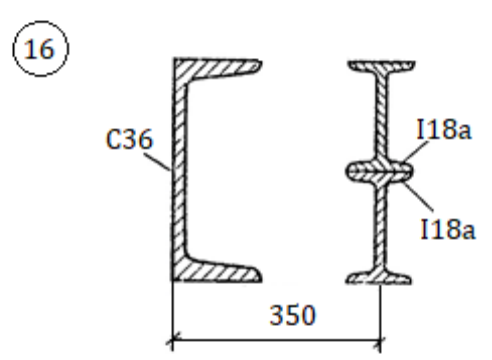
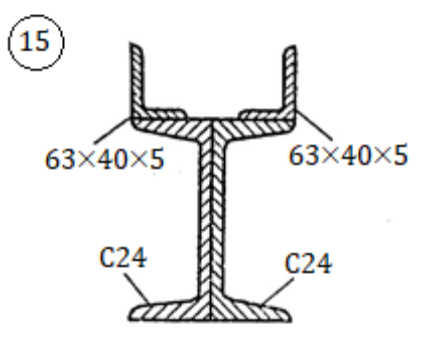
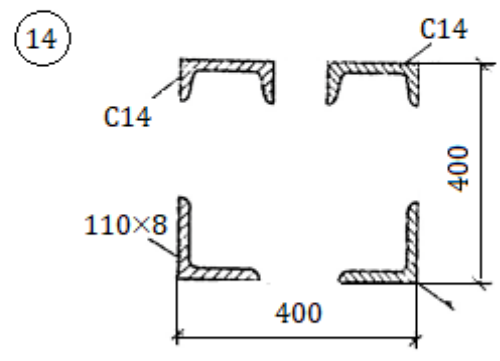
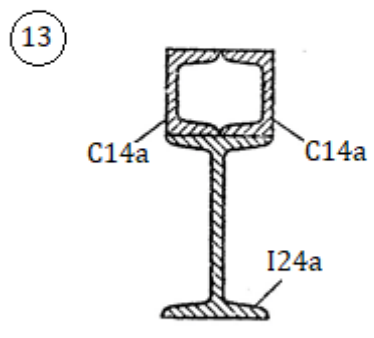
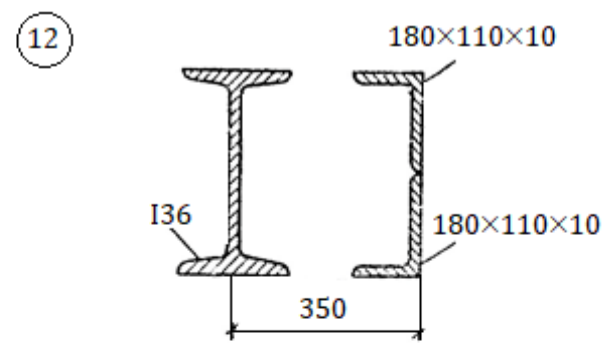
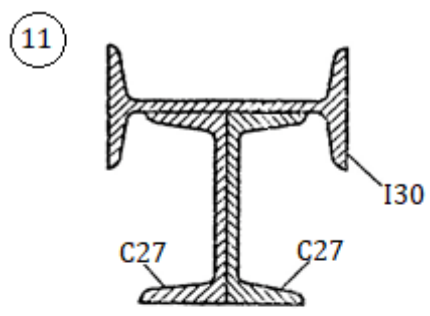
**Zadanie 2.4.** Określić momenty bezwładności (osiowe i odśrodkowe) i wskaźniki wytrzymałości na zginanie względem głównych centralnych osi (schematy do zadania). Parametry profili znajdują się w tabelach D.58, D.59 i D.60.

### **Kolejność postępowania:**

1. Określić współrzędne środka ciężkości całego przekroju.
2. Określić osiowe momenty i moment odśrodkowy względem osi centralnych.
3. Określić położenie głównych centralnych osi.
4. Określić wartości głównych centralnych momentów bezwładności przekroju.
5. Określić wskaźniki wytrzymałości na zginanie względem głównych centralnych osi przekroju.

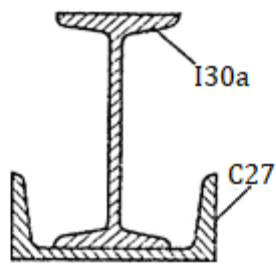
## Schematy obliczeniowe do zadania 2.4



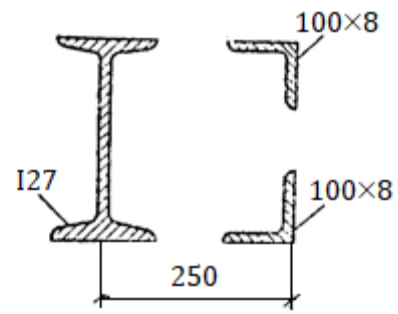




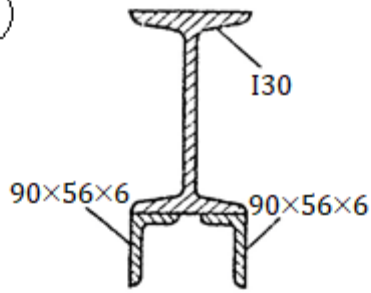
21



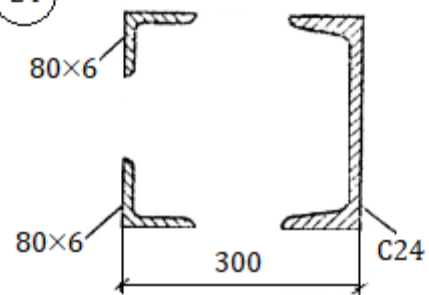
22



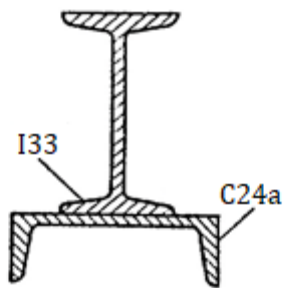
23



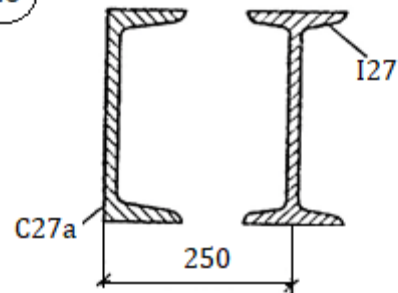
24



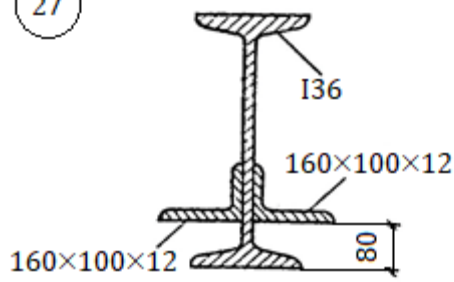
25



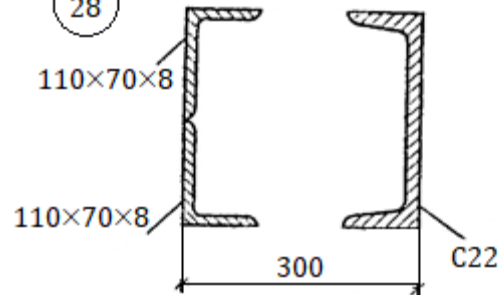
26



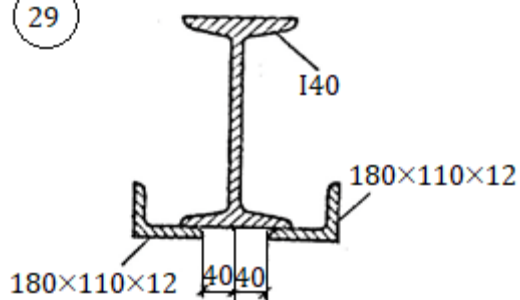
27



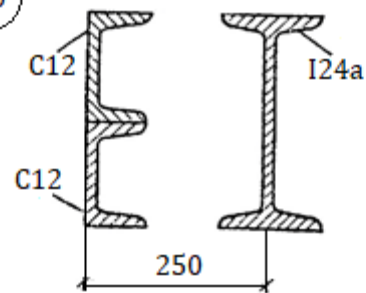
28

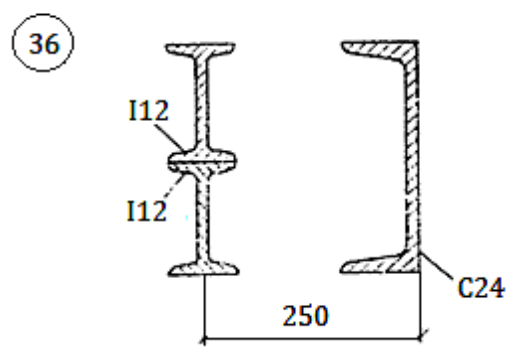
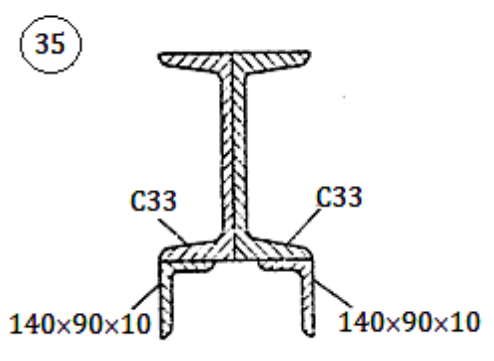
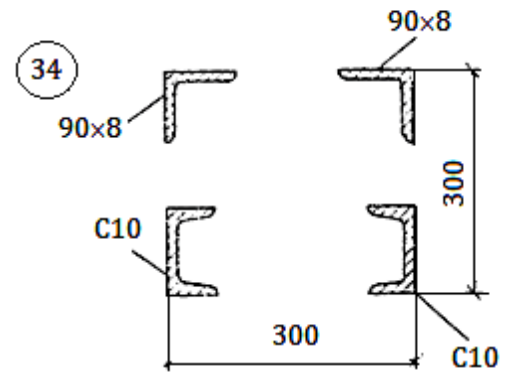
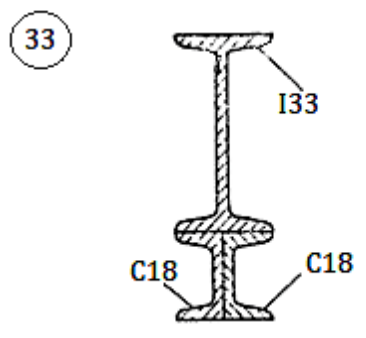
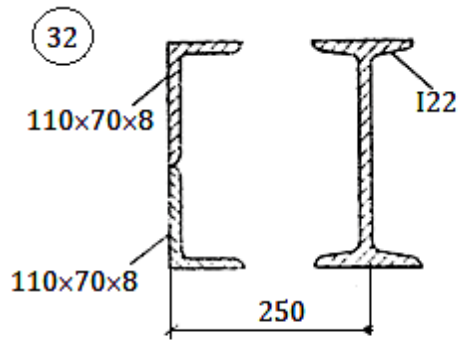
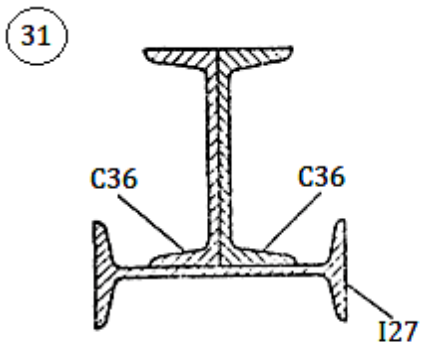


29



30





**Zadanie 2.5.** Określić położenie głównych centralnych osi, wartości głównych centralnych momentów bezwładności oraz wskaźników wytrzymałości na zginanie (patrz schemat do zadania). Numer wariantu i schematu określić z listy grupy.

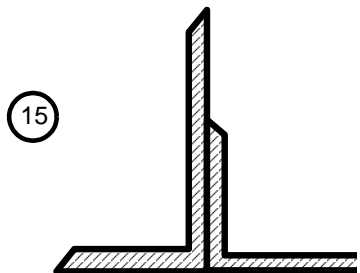
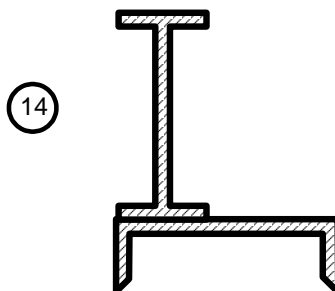
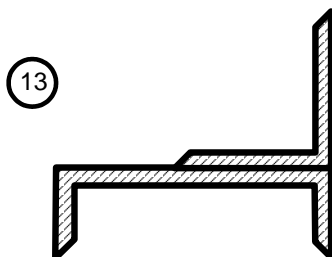
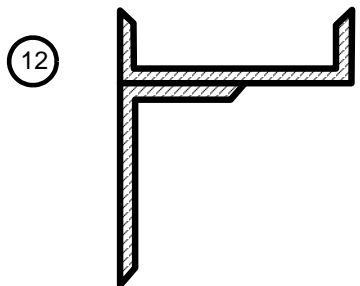
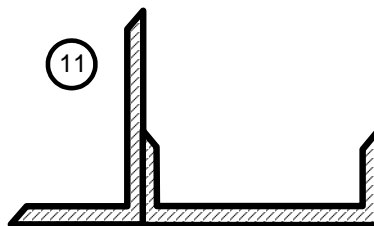
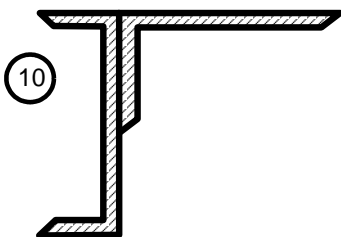
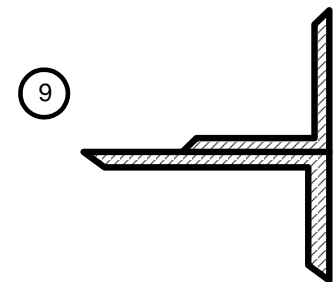
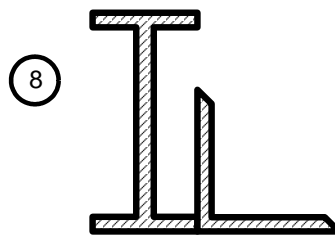
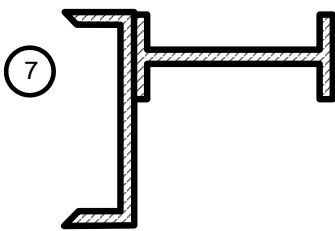
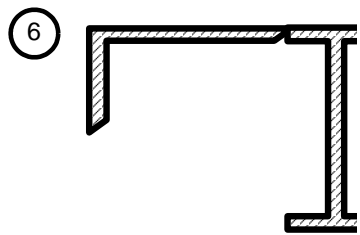
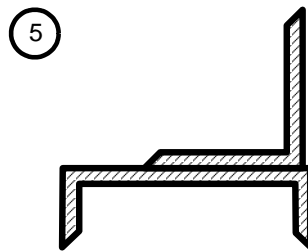
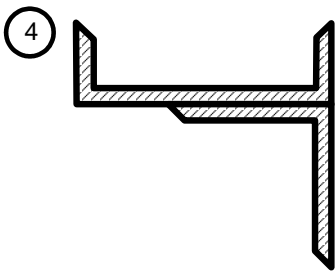
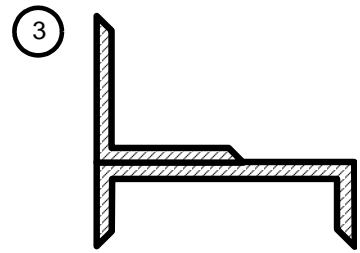
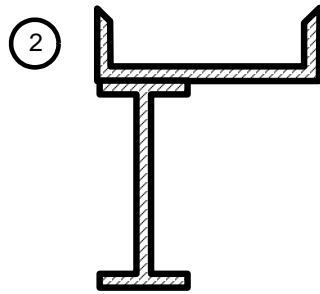
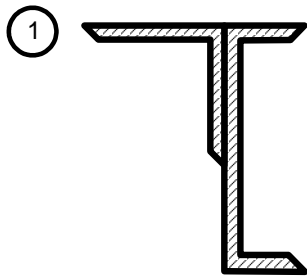
**Kolejność postępowania:**

1. Określić współrzędne środka ciężkości całego przekroju.
2. Określić osiowe momenty bezwładności i odśrodkowy moment bezwładności przekroju względem osi centralnych.
3. Określić położenie głównych centralnych osi.
4. Określić wartości głównych centralnych momentów bezwładności przekroju.
5. Określić wskaźniki wytrzymałości na zginanie względem głównych centralnych osi przekroju.

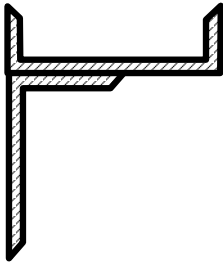
*Dane wejściowe:*

przekrój poprzeczny zawiera: ceownik C20, dwuteownik I20, kątownik równoramienny  $100 \times 100 \times 10$ , kątownik nierównoramienny  $80 \times 50 \times 6$ .

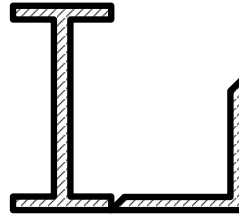
### Schematy do obliczenia do zadania 2.5



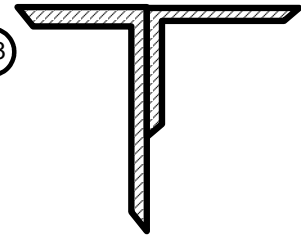
16



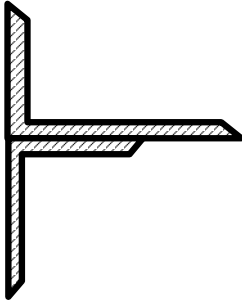
17



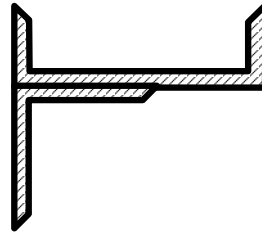
18



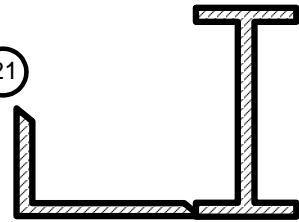
19



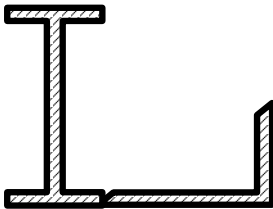
20



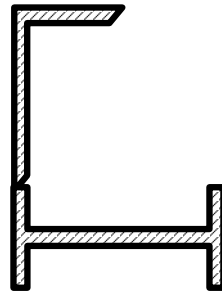
21



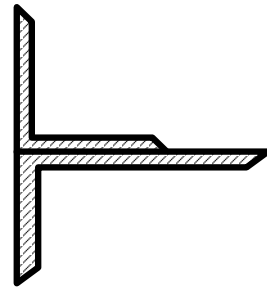
22



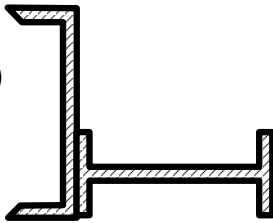
23



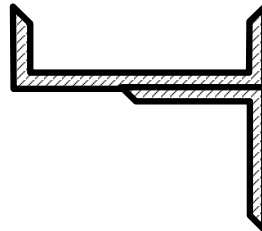
24



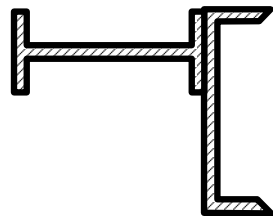
25



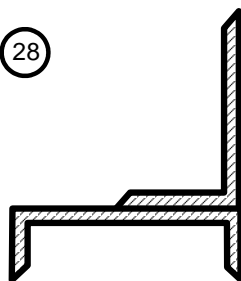
26



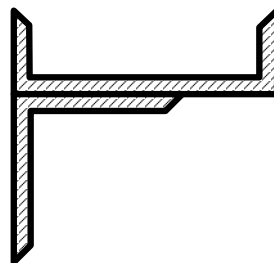
27



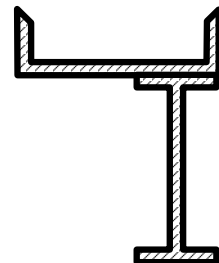
28

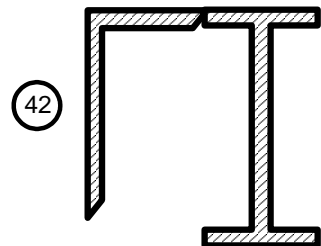
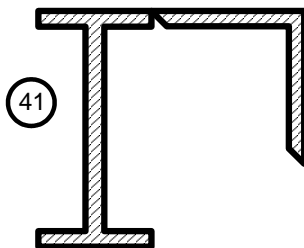
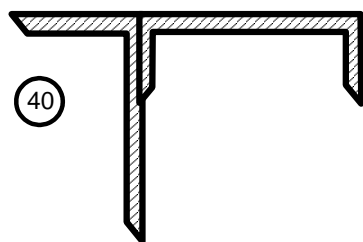
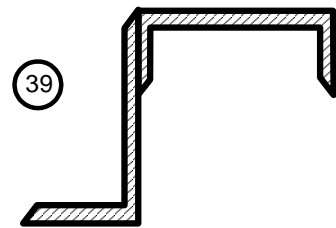
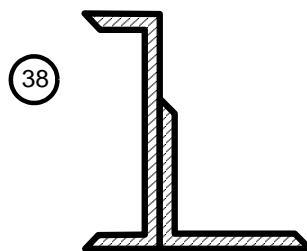
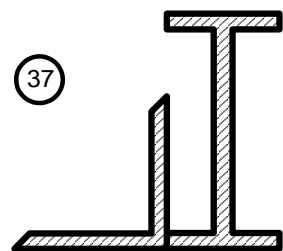
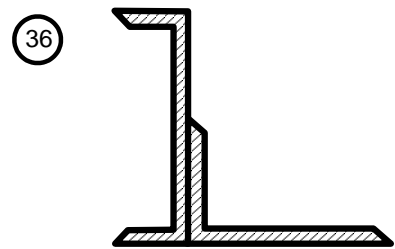
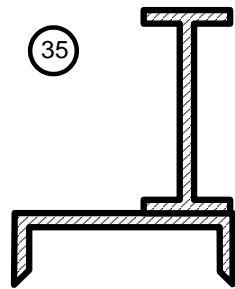
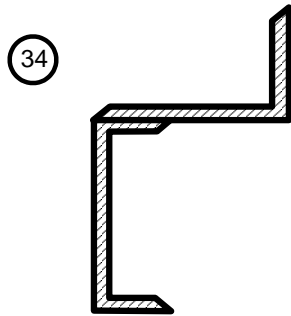
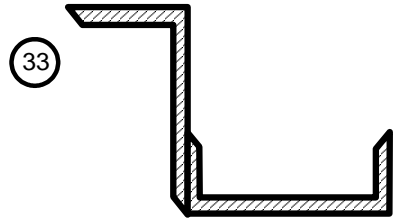
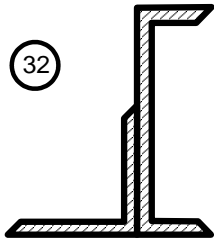
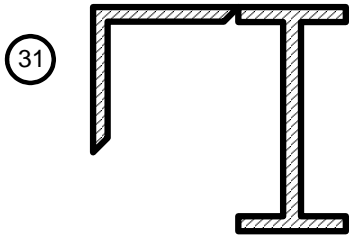


29



30





## 2.4. Skręcanie

### Wiadomości ogólne

Skręcanie występuje wtedy, gdy moment (para sił) działa na pręt w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi.

Moment wewnętrzny  $M_s$  w dowolnym przekroju poprzecznym pręta jest równy algebraicznej sumie momentów skręcających przyłożonych po jednej stronie przekroju poprzecznego  $M_s = \sum M_s$ .

### Zasady określania znaku $M_s$

W odniesieniu do przekroju – moment działający jest *dodatni*, jeśli wywołuje obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara, *ujemny* przy ruchu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Przy obliczeniach często wykorzystywana jest zależność pomiędzy wartością momentu skręcającego  $M_s$  (Nm), mocą  $P$  (W), prędkością kątową  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) albo liczbą obrotów na minutę  $n$  (ob./min):

$$M_s = \frac{P}{\omega} \text{ Nm}$$

Z kursu mechaniki teoretycznej wiadomo, że prędkość kątowa:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ (s}^{-1}\text{)},$$

wtedy:  $M_s = \frac{30P}{\pi n} \text{ Nm}$  albo  $M_s = 9551 \frac{P}{n} \text{ Nm}$

W przekrojach poprzecznych przy odkształceniu skrętnym powstają tylko naprężenia ścinające  $[\tau]$ , które dla prętów wynoszą:

$$\tau = \frac{M_s}{W_o} \text{ MPa}$$

gdzie  $W_o$  – wskaźnik wytrzymałości na skręcanie, który wynosi:  $W_o = \frac{J_o}{r}$ ;

$r$  – promień przekroju,

$J_o$  – biegunowy moment bezwładności;

dla przekroju pełnego:

$$W_o = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2d^3 \text{ cm}^2$$

dla przekroju pierścieniowego:

$$W_o = \frac{\pi D_z^3 (1 - \alpha^4)}{16} = 0,2D_z^3 (1 - \alpha^4), \alpha = \frac{d_w}{D_z}$$

$D_z$  – średnica zewnętrzna,  $d_w$  – średnica wewnętrzna.

Kąt skręcenia odcinka jest wyznaczany ze wzoru:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_o}$$

gdzie  $\theta$  – względny kąt skręcenia;

$l$  – długość przekroju;

$G$  – moduł sprężystości poprzecznej materiału (MPa);

$GJ_o$  – charakteryzuje sztywność przekroju przy skręcaniu.

**Warunek wytrzymałości:**

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s$$

gdzie  $\tau_{max}$  – maksymalne naprężenia styczne, występujące w przekroju pręta;

$M_s$  – moment skręcający;

$W_o$  – wskaźnik wytrzymałości na skręcanie;

$k_s$  – dopuszczalne naprężenia przy skręcaniu ( $k_s = 0,5 \div 0,6 k$ ).

**Warunek sztywności:**

$$\theta_{max} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_s}{GJ_o} \leq [\theta] \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

gdzie  $\theta_{max}$  – maksymalny względny kąt skręcenia, jaki występuje w przekroju pręta;

$M_s$  – moment skręcający w przekroju;

$[\theta]$  – dopuszczalny względny kąt skręcenia.

### Trzy rodzaje zadań

1. Sprawdzenie wytrzymałości elementu konstrukcji (obliczenia sprawdzające)

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s - \text{warunek wytrzymałości.}$$

2. Dobieranie przekroju elementu konstrukcji (obliczenia projektowe)

– **pod względem wytrzymałości:**

$$\text{dla przekroju pełnego } d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_s}{\pi[\tau]}}$$

$$\text{dla przekroju pierścieniowego } D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_s}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}}, \text{ gdzie } \alpha = \frac{d_w}{D_z}$$

– **pod względem sztywności:**

$$\text{dla przekroju pełnego } d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_s}{\pi G[\theta]}}$$

$$\text{dla przekroju pierścieniowego } D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{skr}}{\pi G[\theta](1-\alpha^4)}}, \text{ gdzie } \alpha = \frac{d_w}{D_z}$$

$$[\theta] = (0,44 \div 1,75) \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

3. Sprawdzenie stabilności (eksploatacyjnej):

$$M_s \leq W_o k_s$$



## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.6.** Pary sił działają na stalową belkę poprzez trzy koła pasowe  $M_1, M_2, M_3$  (rys. 2.12, a). Wykonać wykresy momentów  $M_s$  i kątów skręcenia  $\varphi$  przekrojów, sprawdzić wytrzymałość i sztywność belki, jeżeli średnica  $d = 70$  mm, moduł ścinania  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa, dopuszczalny względny kąt obrotu  $[\theta] = 1,5$  stopni/m.

### Rozwiązanie

1. Sporządzanie wykresów momentów skręcających.

Obliczamy wartość momentu skręcającego dla każdego przedziału:

$$M_{s_1} = M_1 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_{s_2} = M_1 + M_2 = 2 + 1 = 3 \text{ kNm}$$

$$M_{s_3} = M_1 + M_2 + M_3 = 2 + 1 - 7 = -4 \text{ kNm}$$

Tworzymy wykres momentów skręcających  $M_s$  (rys. 2.12, b).

2. Sporządzanie wykresów kątów skręcenia.

Kąt skręcenia odcinka jest obliczany zgodnie ze wzorem:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_o}$$

Biegunowy moment bezwładności:  $J_o = \frac{\pi d^4}{32}$ . Sztywność  $GJ_o$  wzdłuż całego wału jest stała, dlatego odcinki odkształcenia są zgodne z odcinkami obciążenia. Wtedy:

$$GJ_o = G \cdot \frac{\pi d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot (72 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 188574 \text{ Nm}$$

Obliczamy kąty obrotu na poszczególnych odcinkach:

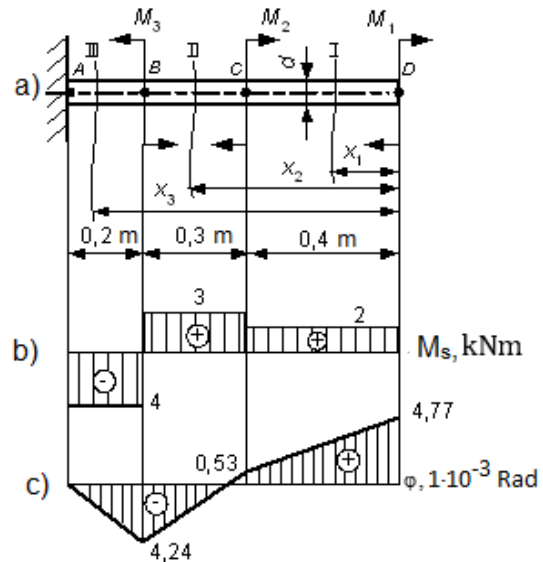
$$\varphi_1 = \frac{M_{s_1} \cdot J_1}{GJ_o} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{188574} = 4,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{s_2} \cdot J_2}{GJ_o} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{188574} = 4,77 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{s_3} \cdot J_3}{GJ_o} = \frac{-4 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{188574} = -4,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Zaczynamy sporządzać wykres kątów skręcenia  $\varphi$  względem nieruchomego przekroju A:

$$\varphi_A = 0;$$



Rys. 2.12. Schemat pręta do przykładu 2.6:

a - schemat obciążenia;

b - wykres momentów skręcających;

c - wykres kątów skręcenia przekrojów belki

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_3 = 0 + (-4,24 \cdot 10^{-3}) = -4,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_3 + \varphi_2 = 0 + (-4,24 \cdot 10^{-3}) + 4,77 \cdot 10^{-3} = 0,53 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_D = \varphi_A + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = 0 + (-4,24 \cdot 10^{-3}) + 4,77 \cdot 10^{-3} + 4,2 \cdot 10^{-3} = 4,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Na podstawie uzyskanych danych tworzymy wykres kątów skręcenia  $\varphi$  (rys. 2.12, c).

3. Sprawdzamy warunki wytrzymałości wału:

$$\tau_{max} = \frac{|M_{smax}|}{W_o} = \frac{|M_{smax}|}{\pi d^3 / 16} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14(70 \cdot 10^{-3})^3} = 59,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 59,4 \text{ MPa}$$

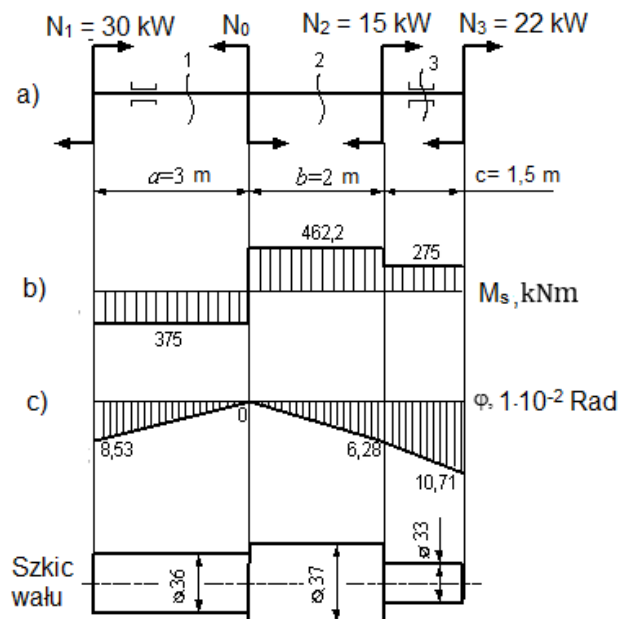
59,4 MPa  $\leq$  70 MPa – warunek wytrzymałości jest spełniony.

4. Sprawdzamy warunek sztywności wału:

$$\theta_{max} = \frac{|M_{smax}|}{GJ_o} = \frac{4 \cdot 10^3}{188574} = 2,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,22 \text{ stopni/m}$$

1,22 stopni/m  $\leq$  1,5 stopni/m – warunek sztywności jest spełniony.

**Przykład 2.7.** Dla wału (rys. 2.13, a), obciążonego jak na rys. 2.13, określić średnice i kąty skręcenia poszczególnych odcinków, jeśli  $[\theta] = 0,03 \text{ rad/m}$ , materiał - stal S215, współczynnik bezpieczeństwa  $n = 1,5$ ; moduł sprężystości  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ , prędkość kątowna wału  $\omega = 80 \text{ rad/s}$ ,  $N_1 = 30 \text{ kW}$ ,  $N_2 = 15 \text{ kW}$ ,  $N_3 = 22 \text{ kW}$ .



Rys. 2.13. Wykres obciążeniowy wału: a – obciążenie wału; b – wykres momentów skręcających; c – wykres kątów skręcenia

### Rozwiązanie

1. Określamy momenty skręcające przenoszone przez koła pasowe według wzoru:

$$M = \frac{N}{\omega}$$
$$M_1 = \frac{30 \cdot 10^3}{80} = 375 \text{ Nm}$$
$$M_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{80} = 187,5 \text{ Nm}$$
$$M_3 = \frac{22 \cdot 10^3}{80} = 275 \text{ Nm}$$

Moment skręcający  $M_0$  obliczamy z warunku równowagi wału:

$$\sum M_i = M_1 - M_0 + M_2 + M_3 = 0; M_0 = 375 + 187,5 + 275 = 837,5 \text{ Nm}$$

2. Obliczamy, metodą przekrojów, momenty skręcające na poszczególnych odcinkach wału:

$$M_{s_1} = -M_1 = -375 \text{ Nm}$$
$$M_{s_2} = -M_1 + M_0 = -375 + 837,5 = 462,2 \text{ Nm}$$
$$M_{s_3} = -M_1 + M_0 - M_2 = -375 + 837,5 - 187,5 = 275 \text{ Nm}$$

Sporządzamy wykres momentów skręcających (rys. 2.13, b).

3. Określamy średnice wału na poszczególnych odcinkach, korzystając z warunku wytrzymałości na skręcanie:

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s, \text{ gdzie } k_s = (0,5 \div 0,6) \cdot k, k = \frac{R_e}{n}$$

Dla stali S215 mamy  $k_s = \frac{240}{1,5} \cdot 0,5 = 80 \text{ MPa}$ .

$$W_o = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ więc } d_i \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_s}{\pi k_s}}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 375}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ m}, d_1 = 30 \text{ mm}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 462,5}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 3,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}, d_2 = 31 \text{ mm}$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 275}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ m}, d_3 = 26 \text{ mm}$$

4. Określamy średnice wału na poszczególnych odcinkach z warunku dostatecznej sztywności skrętnej:

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_o} \leq [\theta], \text{ gdzie } J_o = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$\text{więc } d_i \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_s}{\pi \cdot G[\theta]}}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 375}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,03}} = 3,59 \cdot 10^{-2} \text{ m}; d_1 = 36 \text{ mm}$$

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 462,5}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,03}} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}; d_2 = 37 \text{ mm}$$

$$d_3 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 275}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,03}} = 3,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}; d_3 = 33 \text{ mm}$$

Ostatecznie przyjmujemy:

$$d_1 = 36 \text{ mm}; d_2 = 37 \text{ mm}; d_3 = 33 \text{ mm}$$

Przy takich średnicach spełniony jest warunek sztywności skrętnej i warunek wytrzymałości. Rysujemy szkic wału (rys. 2.13).

5. Aby skonstruować wykres kątów skręcenia, należy określić kąt skręcenia wału na jego poszczególnych odcinkach, korzystając ze wzoru:

$$\varphi_i = \frac{M_s l_i}{G \cdot J_{o_i}}$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{s1} a}{G \cdot J_{o_1}} = \frac{-375 \cdot 3 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 (3,6 \cdot 10^{-2})^4} = -8,53 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{s2} b}{G \cdot J_{o_2}} = \frac{462,5 \cdot 2 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 (3,7 \cdot 10^{-2})^4} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{s3} c}{G \cdot J_{o_3}} = \frac{275 \cdot 1,5 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 (3,3 \cdot 10^{-2})^4} = 4,43 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Jako część nieruchomą rozważamy warunkowo odcinek wału, na którym znajduje się koło pasowe zerowe. W odniesieniu do niego wykreślamy wartości kątów skręcenia poszczególnych odcinków wału, budując wykres kątów skręcenia (rys. 2.13, c).

Pierwszy odcinek:  $\varphi_1 = -8,53 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ .

Drugi odcinek:  $\varphi_2 = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ .

Trzeci odcinek:  $\varphi_2 + \varphi_3 = (6,28 + 4,43) \cdot 10^{-2} = 10,71 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązania (obliczeniowe)

**Zadanie 2.6.** Dla danego wału (patrz schematy dla zadania), na którym zamontowane są koła pasowe, oddziałują moce (tabela 2.4). Określić średnice i kąty skręcania poszczególnych jego odcinków, jeśli  $[\theta] = 0,03$  rad/m, materiał – stal S215, współczynnik bezpieczeństwa  $n = 1,5$ ; moduł sprężystości  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa, prędkość kątowna wału  $\omega = 80$  rad/s. Numer wariantu określa się z listy grupy.

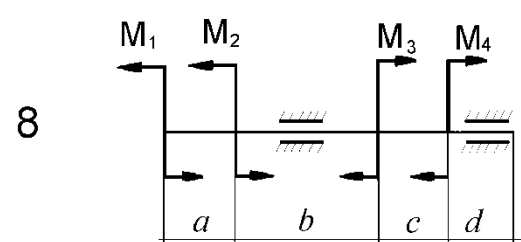
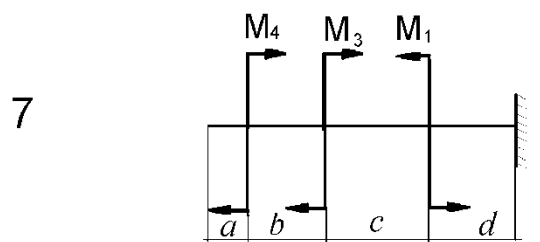
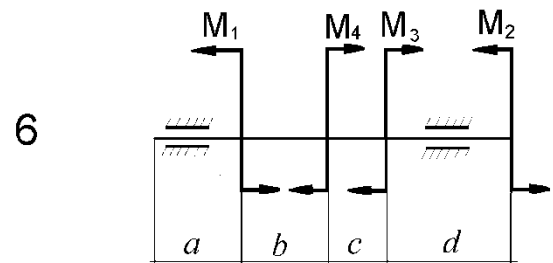
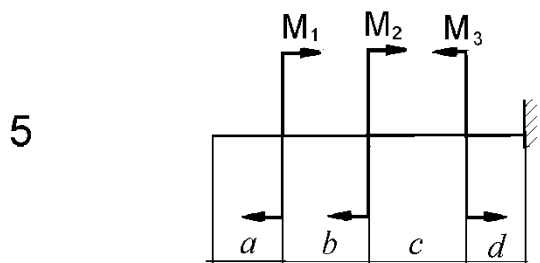
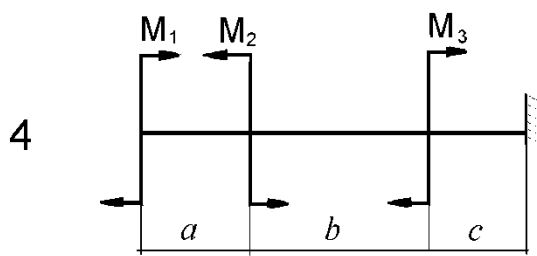
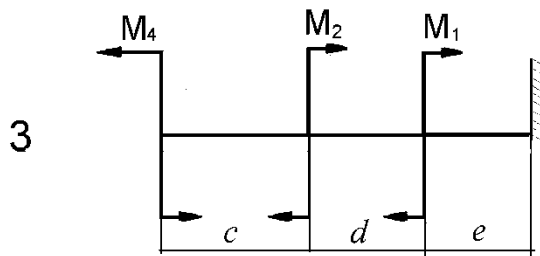
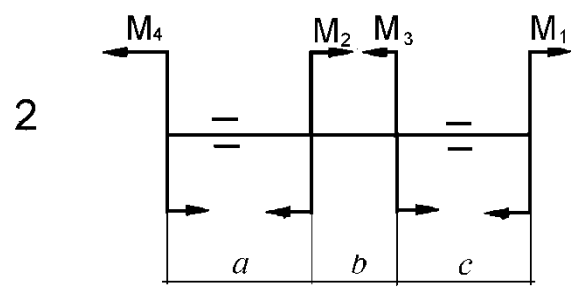
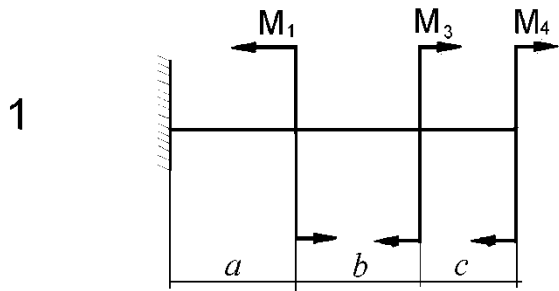
### Kolejność postępowania:

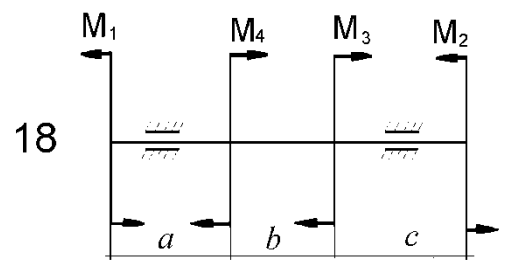
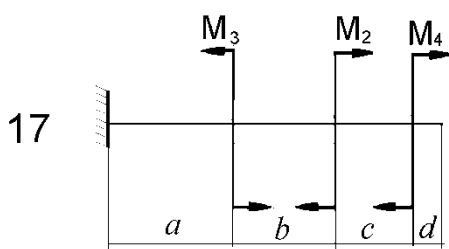
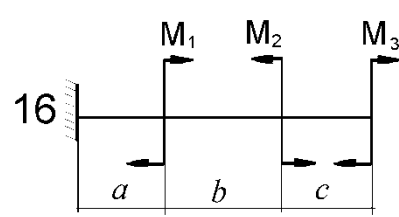
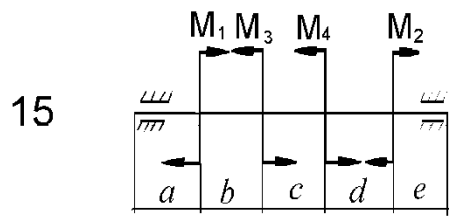
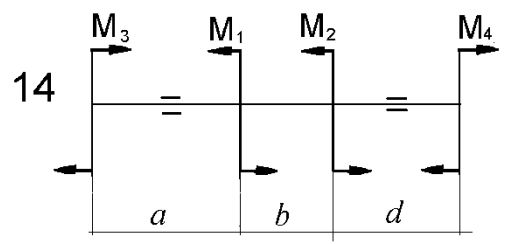
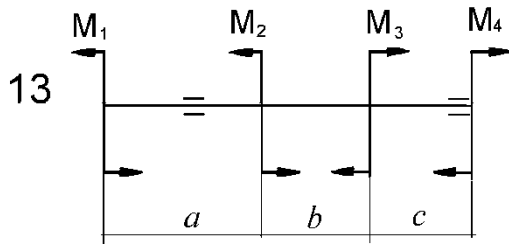
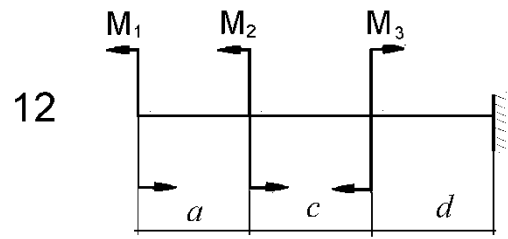
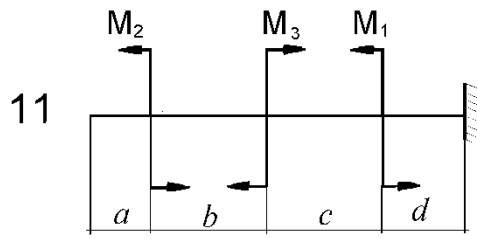
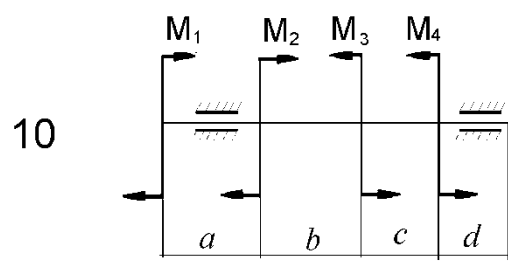
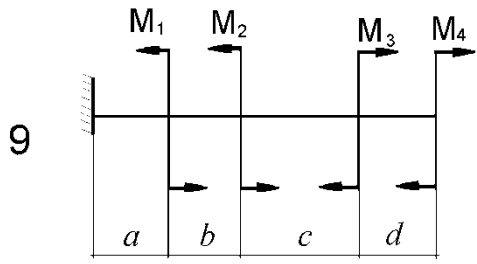
1. Określić momenty skręcające.
2. Określić momenty skręcające na odcinkach wału.
3. Z warunku wytrzymałości określić średnice wału na poszczególnych odcinkach.
4. Z warunku sztywności skrętnej określić średnice wału na poszczególnych odcinkach.
5. Określić kąt skręcenia wału na poszczególnych jego odcinkach i wykonać wykresy kątów skręcenia.

Tabela 2.4. Dane wejściowe do zadania 2.6

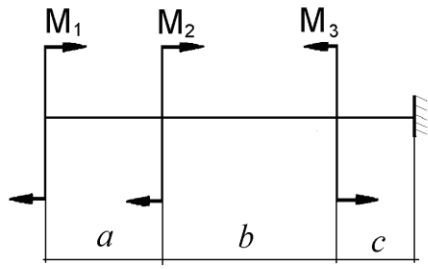
Nr war.	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
	kW				m				
1	10	30	20	20	1	2	1	2	1
2	20	15	10	25	2	1	2	2	1
3	40	15	25	30	2	1	3	2	1
4	5	8,5	10	3,5	2	4	1	2	2
5	8	8	10	6	1	2	2	2	1
6	6	16	20	2	1	2	1	1	1
7	4	16	10	10	2	1	2	1	1
8	20	10	18	12	1	3	1	2	1
9	24	6	10	8	3	1	1	3	1
10	4	12	10	6	1	2	2	1	1

### Schematy obliczeniowe do zadania 2.6

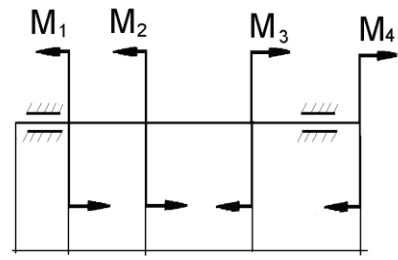




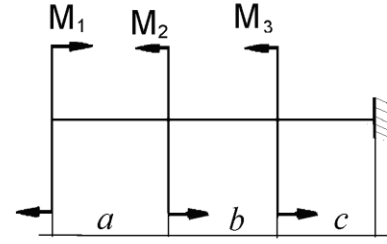
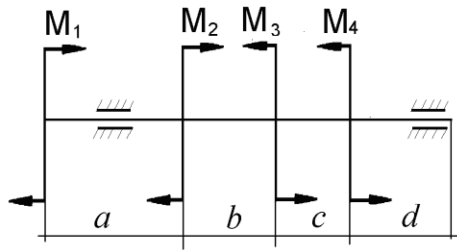
19



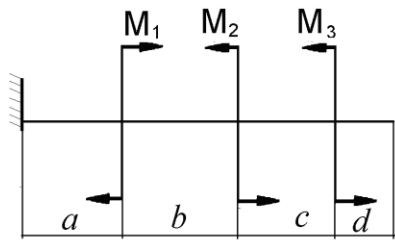
20



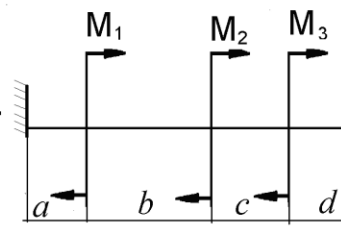
21



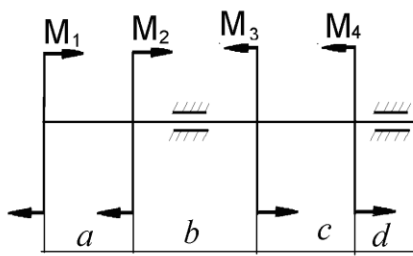
23



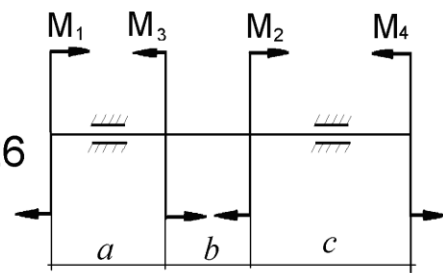
24



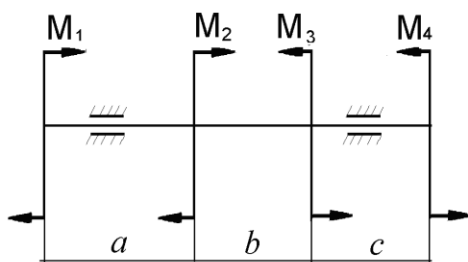
25



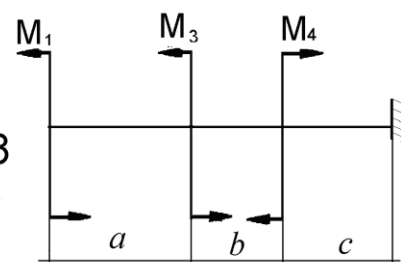
26



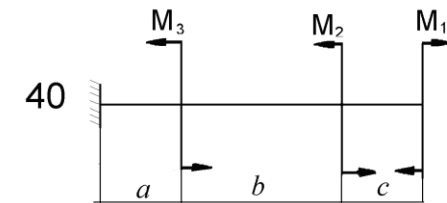
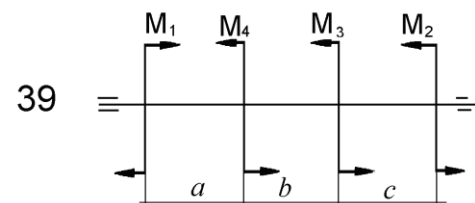
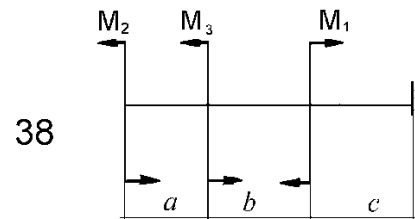
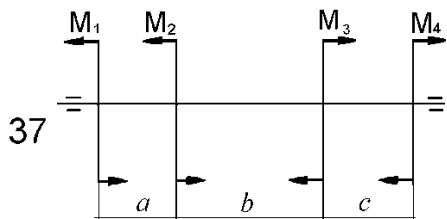
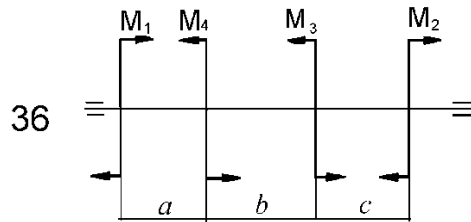
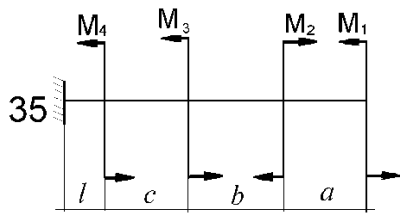
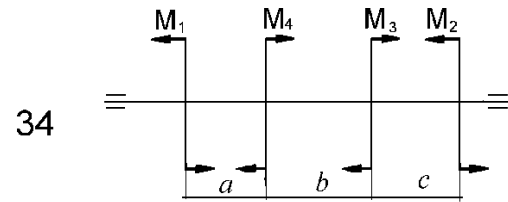
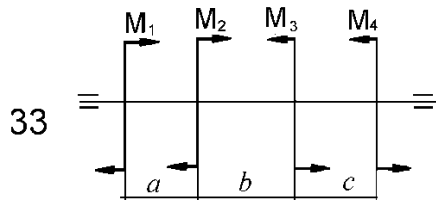
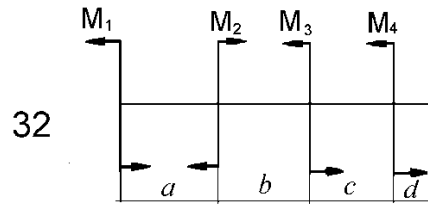
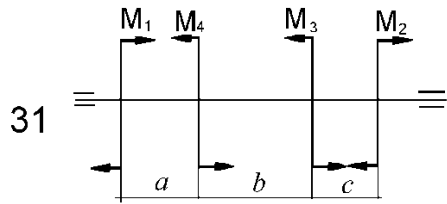
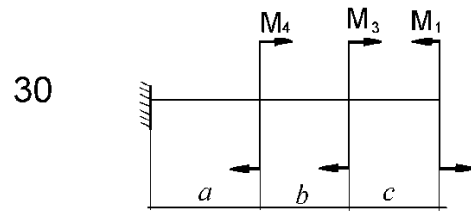
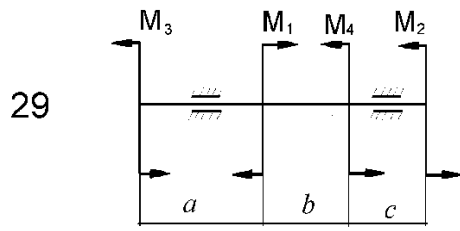
27



28







## 2.5. Zginanie proste

### Wiadomości ogólne

Zginanie, przy którym występuje tylko moment zginający, nazywa się **czystym zginaniem**.

Zginanie, przy którym występują moment zginający i siła styczna, nazywa się **zginaniem poprzecznym**.

Płaszczyzny, w których leżą główne centralne osie bezwładności, nazywają się **głównymi płaszczyznami belki**.

Jeśli płaszczyzna działania siły pokrywa się z jedną z głównych płaszczyzn belki, tj. oś zginania belki leży w płaszczyźnie działania siły, zginanie nazywane jest **płaskim** lub **prostym**.

Jeśli płaszczyzna siły nie pokrywa się z żadną z głównych płaszczyzn belki, tj. oś zginania belki nie leży w płaszczyźnie siły, wówczas takie zginanie nazywane jest **ukośnym**.

### Siła styczna i moment zginający

Przy zginaniu poprzecznym prostym w przekrojach poprzecznych belki występują: siła styczna  $Q$  i moment zginający  $M_g$ .

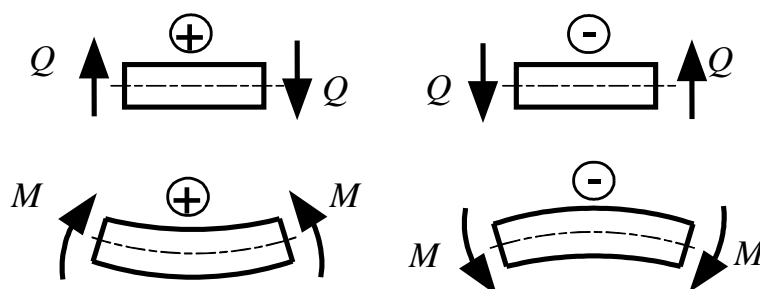
*Siła styczna*  $Q$  w rozpatrywanym przekroju liczbowo jest równa algebraicznej sumie rzutów sił działających po jednej stronie przekroju.

*Moment zginający*  $M_g$  w rozpatrywanym przekroju liczbowo jest równy sumie momentów wszystkich sił i par sił lub momentów działających po jednej stronie przekroju względem osi  $z$ .

### Reguła znaków

**Siła styczna jest dodatnia**, jeśli siła zewnętrzna ma tendencję do obracania belki zgodnie z ruchem wskazówek zegara względem danego przekroju i **ujemną** – jeśli w przeciwnym (rys. 2.14).

**Moment zginający jest dodatni**, jeśli belka ugina się wybrzuszeniem do dołu (rys. 2.14).



Rys. 2.14. Zasada znakowania sił i momentów zginających

## Wykonanie wykresów momentów zginających i sił stycznych

### Sposoby sprawdzenia wykonanych wykresów $Q$ i $M_g$

Na odcinku, na którym występuje obciążenie ciągłe, wykres  $Q$  ma postać linii pochylonej, a wykres  $M_g$  jest parabolą.

Na odcinku, na którym nie występuje obciążenie ciągłe, wykres  $Q$  ma postać prostej, równoległej do osi belki, a wykres  $M_g$  – linii pochylonej.

W miejscu, gdzie przyłożona jest skoncentrowana siła, na wykresie  $Q$  występuje skok wartości bezwzględnej równy tej sile.

W przekroju, gdzie przyłożona jest para sił, na wykresie  $M_g$  występuje skok wartości bezwzględnej równej temu momentowi.

W przekrojach krawędziowych moment zginający wynosi zero. Wyjątkiem są przekroje, w których przyłożona jest para sił (moment zginający).

### Obliczanie wytrzymałości belek przy naprężeniach normalnych Wzór na warunek wytrzymałości na zginanie:

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leq k$$

gdzie  $W_x = \frac{J_z}{y_{max}}$  – wskaźnik wytrzymałości na zginanie przekroju względem osi  $x$ ;

$k$  - dopuszczalne naprężenie materiału.

Za pomocą warunków wytrzymałości na zginanie rozwiązuje się trzy rodzaje zadań.


*Sprawdzenie wytrzymałości belki* (obliczenia weryfikacyjne). Oblicza się  $\sigma_{max}$  i porównuje z  $k$ .


$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leq k$$

*Dobór przekroju belki* (obliczenia projektowe). Oblicza się wymagany wymiar przekroju

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{k}$$

Wartości  $W_x$  i  $W_y$  dla profilu typu dwuteownik, ceownik i kątownik wybiera się z tabel asortymentu. Dla kwadratowego i okrągłego przekroju:


$$W_x = \frac{a^3}{6} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{6 \cdot W_x}$$


$$W_x = 0,1d^3 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}}$$

Obliczenia nośności belki. Oblicza się największy moment zginający:

$$[M] \leq k \cdot W_x$$

### Obliczanie wytrzymałości belek przy naprężeniach stycznych

Przy prostym poprzecznym zginaniu w przekrojach poprzecznych belki występują zarówno naprężenia normalne  $\sigma$ , jak i styczne  $\tau$ , które są obliczane według wzoru:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{x_{max}}}{J_x \cdot b},$$

gdzie  $Q_{max}$  – siła styczna, występująca w przekroju;

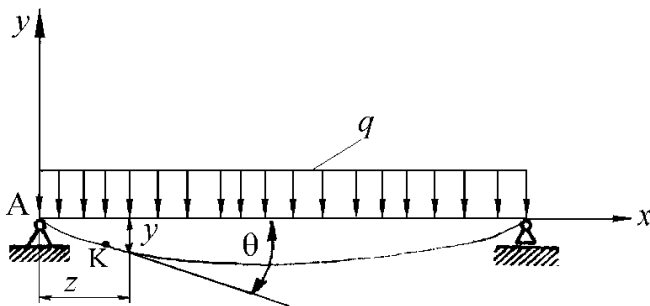
$S_{x_{max}}$  – statyczny moment względem obojętnej osi przekroju poprzecznego odcinka, który znajduje się po jednej stronie linii poprowadzonej przez badany punkt, równoległej do osi obojętnej;

$J_x$  – osiowy moment bezwładności całego przekroju poprzecznego względem osi obojętnej;

$b$  – szerokość przekroju poprzecznego (w przypadku zmiennej szerokości wartości  $b$  przyjmuje się na poziomie badanego punktu).

### Obliczanie sztywności belki przy zginaniu

Przy zginaniu belki jej oś wykrzywia się, więc punkty na tej osi przemieszczają się, jednak odległości są na tyle małe w porównaniu do długości belki, że ich kierunek można uważać za prostopadły do osi belki. Przemieszczenia te nazywane są **ugięciem**.



Rys. 2.15. Schemat sił oddziałujących na belkę

Krzywa, w której pierwotna oś belki obraca się pod działaniem sił zewnętrznych, nazywana jest **zakrzywioną osią** belki lub **linią sprężystą**. Ugięcia w różnych przekrojach są różne i zależą od odległości  $z$  (rys. 2.15) od przyjętego

układu współrzędnych (w tym przypadku  $\theta$  pokrywa się z punktem A), czyli  $y_z = f(z)$ .

Kąt utworzony przez styczną do dowolnego punktu  $k$  zakrzywionej osi z jego początkowym położeniem oznaczymy  $\theta$  (rys. 2.15). Kąt  $\theta$  określa przemieszczenia kątowe przekroju poprzecznego belki przy zginaniu i nazywa się **kątem ugięcia przekroju belki**.

### Wzór na warunek sztywności

Liniowe czy kątowe przemieszczenia przekroju nie powinny przekraczać dopuszczalnej wartości

$$f \leq [f]$$

gdzie  $f$  – maksymalne ugięcie belki;

$[f]$  – dopuszczalne ugięcie belki.

Dopuszczalne ugięcie belki  $[f]$  zależy od definicji i warunków pracy projektowanej konstrukcji. Na przykład, dla żurawia ręcznego  $[f] = l/400$ ; dla żurawia elektrycznego  $[f] = l/700$ ; dla wałów maszyn do cięcia metali  $[f = 0,0005 \div 0,0010l$  ( $l$  – rozstaw belek).

$$\theta_{max} \leq [\theta]$$

Dopuszczalny kąt ugięcia średnio wynosi 0,001 rad.

Aby obliczyć ugięcie belki, używamy uniwersalnego równania sprężystości.

$$f(z) = f_0 + \theta_0 z + \frac{M(z)^2}{2! EJ_x} + \frac{P(z)^3}{3! EJ_x} + \frac{q(z)^4}{4! EJ_x} + \sum \frac{M(z-a)^2}{2! EJ_x} + \sum \frac{P(z-b)^3}{3! EJ_x} + \sum \frac{q(z-c)^4}{4! EJ_x}$$

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{Mz}{EJ_x} + \frac{P(z)^2}{2! EJ_x} + \frac{q(z)^3}{3! EJ_x} + \sum \frac{M(z-a)}{EJ_x} + \sum \frac{P(z-b)^2}{2! EJ_x} + \sum \frac{q(z-c)^3}{3! EJ_x}$$

gdzie „!” – silnia;

$f_0, \theta_0$  – parametry wejściowe (ugięcie i kąt ugięcia lewego przekroju belki);

$a, b, c$  – odcięte przekrojów, w których występują momenty  $M$ , działające siły  $P$  oraz początek odcinka wystąpienia obciążenia  $q$ ;

$EJ_x$  – sztywność przekroju belki wzdłuż osi  $x$ ;

Ugięcie  $f_0$  i kąt  $\theta_0$  oblicza się z warunku zamocowania belki.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.8.** Dla belki obciążonej jak na rys. 2.16 sporządzić wykresy  $Q$  i  $M_g$

*Rozwiązanie*

1. Określenie reakcji podpór belki.

Przy symetrycznym obciążeniu:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ kN}$$

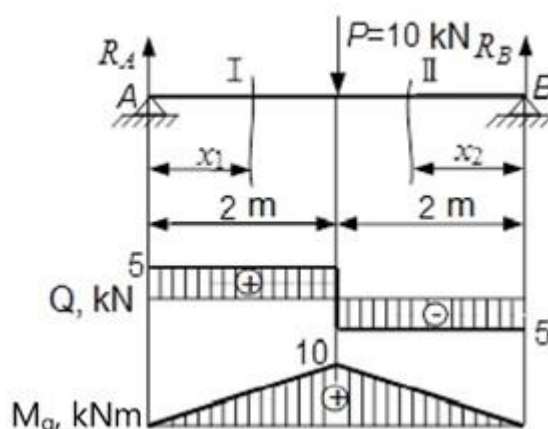
2. Sporządzenie wykresu  $Q$ .

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$Q(x_1) = R_A$$

$$Q(x_1 = 0) = 5 \text{ kN},$$

$$Q(x_1 = 2) = 5 \text{ kN}$$



Rys. 2.16. Schemat obciążenia belki

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$Q(x_2) = R_B$$

$$Q(x_2 = 0) = -5 \text{ kN}, Q(x_2 = 2) = -5 \text{ kN}$$

3. Sporządzenie wykresu  $M_g$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1; M(x_1 = 0) = R_A \cdot 0 = 0, M(x_1 = 2) = R_A \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kNm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$M(x_2) = R_B \cdot x_2; M(x_2 = 0) = R_B \cdot 0 = 0, M(x_2 = 2) = R_B \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kNm}$$

Na podstawie uzyskanych danych wykonujemy wykresy  $Q(x)$  i  $M_g(x)$  (rys. 2.16).

**Przykład 2.9.** Dla belki obciążonej jak na rys. 2.17 sporządzić wykresy  $Q$  i  $M_g$ .

*Rozwiązanie*

1. Określenie reakcji podpór belki.

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot 6}{2}; R_A = R_B = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ kN}$$

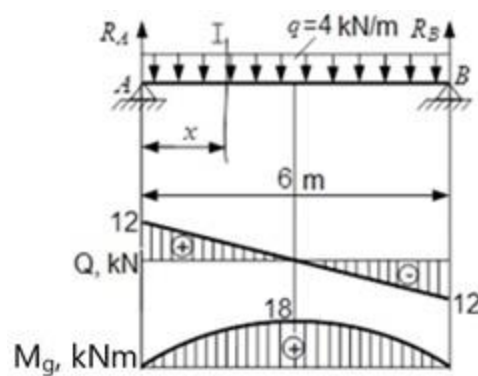
2. Sporządzenie wykresu  $Q$ .

$$0 \leq x \leq 6$$

$$Q(x) = R_A - q \cdot x$$

$$Q(x = 0) = R_A - q \cdot 0 = 12 \text{ kN}$$

$$Q(x = 6) = R_A - q \cdot 6 = 12 - 4 \cdot 6 = -12 \text{ kN}$$



Rys. 2.17. Schemat obciążenia belki

4. Sporządzenie wykresu  $M_g$ .

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$M(x=0) = R_A \cdot 0 - \frac{q \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x=6) = R_A \cdot 6 - \frac{q \cdot 6^2}{2} = 12 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 6^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

W przekroju, w którym  $Q = 0$ , wykres  $M_g$  ma maksymalny moment zginający. Obliczamy największy  $M_g$ . W tym celu równanie siły poprzecznej przyrównujemy do zera i wyznaczamy punkt, w którym występuje ekstremum:

$$Q(x) = R_A - q \cdot x = 0, \quad \text{wtedy } x = \frac{R_A}{q} = \frac{12}{4} = 3 \text{ kN}$$

$$M(x=3) = R_A \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = 12 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3^2}{2} = 18 \text{ kNm}$$

Na podstawie uzyskanych danych wykonujemy wykresy  $Q(x)$  i  $M_g(x)$  (rys. 2.17).

### Przykład 2.10

Sporządzić wykresy  $Q$  i  $M_g$ .

*Rozwiązanie*

1. Wykonanie wykresu  $Q$ .

$$0 \leq x \leq 3$$

$$Q(x_1) = P_1$$

$$Q(x_1=0) = P_1 = 6 \text{ kN}$$

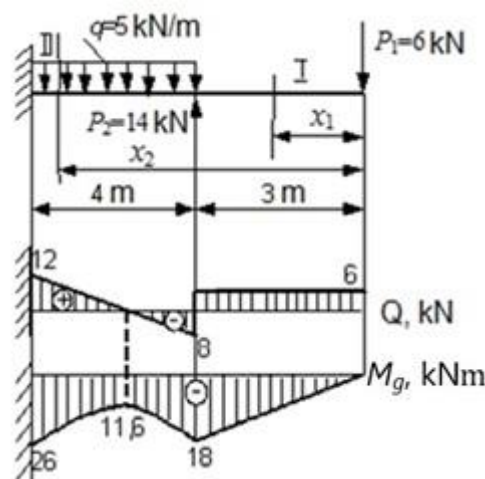
$$Q(x_1=3) = P_1 = 6 \text{ kN}$$

$$3 \leq x \leq 7$$

$$Q(x_2) = P_1 - P_2 + q(x_2 - 3)$$

$$Q(x_2=3) = P_1 - P_2 + q(3 - 3) = 6 - 14 + 5 \cdot 0 = -8 \text{ kN}$$

$$Q(x_2=7) = P_1 - P_2 + q(7 - 3) = 6 - 14 + 5 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$$



Rys. 2.18. Schemat obciążenia belki

2. Wykonanie wykresu  $M_g$ .

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$M(x_1=0) = -P_1 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x_1=3) = -P_1 \cdot 3 = -6 \cdot 3 = -18 \text{ kNm}$$

$$3 \leq x_2 \leq 7$$

$$M(x_2) = -P_1 \cdot x_2 + P_2(x_2 - 3) - \frac{q(x_2 - 3)^2}{2}$$

$$M(x_2=3) = -P_1 \cdot 3 + P_2(3 - 3) - \frac{q(3 - 3)^2}{2} = -6 \cdot 3 + 14 \cdot 0 - \frac{5 \cdot 0^2}{2} = -18 \text{ kNm}$$

$$M(x_2=7) = -P_1 \cdot 7 + P_2(7 - 3) - \frac{q(7 - 3)^2}{2} = -6 \cdot 7 + 14 \cdot 4 - \frac{5 \cdot 4^2}{2} = -26 \text{ kNm}$$

Obliczamy największą wartość  $M_g(x_2)$  w miejscu, gdzie siła tnąca przyjmuje wartość zero w drugim przedziale. Równanie siły poprzecznej przyrównujemy do zera:

$$Q(x_2) = P_1 - P_2 + q(x_2 - 3) = 0$$

$$P_1 - P_2 + q \cdot x_2 - x_2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-P_1 + P_2 + q \cdot 3}{q} = \frac{-6 + 14 + 5 \cdot 3}{5} = 4,6 \text{ m}$$

$$M(x_2 = 4,6) = -6 \cdot 4,6 + 14 \cdot (4,6 - 3) - \frac{5 \cdot (4,6 - 3)^2}{2} = -11,6 \text{ kNm}$$

Na podstawie uzyskanych danych sporządzamy wykresy  $Q(x)$  i  $M_g(x)$  (rys. 2.18).

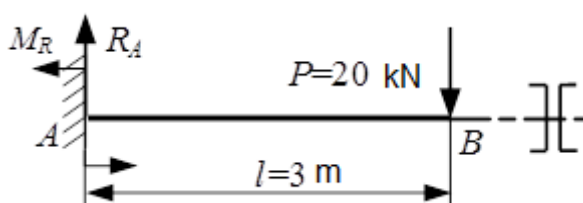
**Przykład 2.11.** W oparciu o warunek wytrzymałości i warunek sztywności określić wymagany rozmiar ceownika dla belki (rys. 2.19), jeśli: dopuszczalne ugięcie  $[f] = l/400$ , dopuszczalne naprężenia  $[\sigma] = 210 \text{ MPa}$ , moduł sprężystości  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

Dane:

$$[f] = l/400$$

$$[\sigma] = 210 \text{ MPa}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$



Szukane:  
Ceownik - ?

Rys. 2.19. Schemat obciążenia belki

### Rozwiązanie

Z warunków równowagi określamy siły reakcji belki:

$$\sum M_A = 0; M_R - P \cdot l = 0; M_R = P \cdot l = 30 \cdot 3 = 60 \text{ kNm}$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$R_A - P = 0; R_A = P = 10 \text{ kN}$$

Określamy maksymalny moment zginający:

$$M(x) = -P \cdot x$$

$$M(x = 0) = -P \cdot 0 = 0$$

$$M(x = 3) = -P \cdot 3 = -20 \cdot 3 = -60 \text{ kNm}$$

Z warunku wytrzymałości dobieramy przekrój:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{k} = \frac{60 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,286 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 286 \text{ cm}^3$$

Przekrój belki składa się z dwóch ceowników, dlatego dla jednego ceownika

$$W_x = \frac{286}{2} = 143 \text{ cm}^3$$



Z tabeli D.58 ceownik C20, który ma wskaźnik wytrzymałości  $W_x = 152 \text{ cm}^3$ ,  $J_x = 1520 \text{ cm}^4$ , wtedy dla dwóch ceowników

$$W_x = 2 \cdot 152 = 304 \text{ cm}^3$$

$$J_x = 2 \cdot 1520 = 3040 \text{ cm}^4$$

Sprawdzamy naprężenia:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq k$$

$$\sigma_{\max} = \frac{60 \cdot 10^3}{304 \cdot 10^{-6}} = 0,197 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 197 \text{ MPa} < 210 \text{ MPa}$$

Wytrzymałość jest zapewniona.

Zgodnie z warunkiem sztywności dobieramy przekrój belki:

$$f \leq [f]$$

$$[f] = \frac{l}{400} = \frac{3}{400} = 0,0074 \text{ m} = 7,4 \text{ mm}$$

Uniwersalne równanie sprężystości dla belki:

$$f(x) = f_0 + \theta_0 x - M_R \frac{x^2}{2EJ_x} + R_A \frac{x^3}{6EJ_x}$$

Ugięcie  $f_0$  i kąt  $\theta_0$  z warunku zamocowania belki są równe zeru, wtedy maksymalne ugięcie dla danego przypadku:

$$f(x = l = 3 \text{ m}) = -Pl \frac{l^2}{2EJ_x} + P \frac{l^3}{6EJ_x} = \frac{-3Pl^3 + Pl^3}{6EJ_x} = -\frac{Pl^3}{3EJ_x}$$

$$f_{\max} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1520 \cdot 10^{-8}} = -0,0296 \text{ m} = -29,6 \text{ mm}$$

Maksymalne ugięcie przekracza wartość dopuszczalnego ugięcia, więc należy dobrać inny ceownik. Określamy wymagany moment bezwładności dla nowego ceownika:

$$f = \frac{-Pl^3}{3EJ_x} \leq [f]$$

$$J_x \geq \frac{P \cdot l^3}{3E[f]} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7,4 \cdot 10^{-3}} = 12,162 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 = 12162 \text{ cm}^4$$

Dla jednego ceownika  $J_x = 12162 / 2 = 6081 \text{ cm}^4$ .

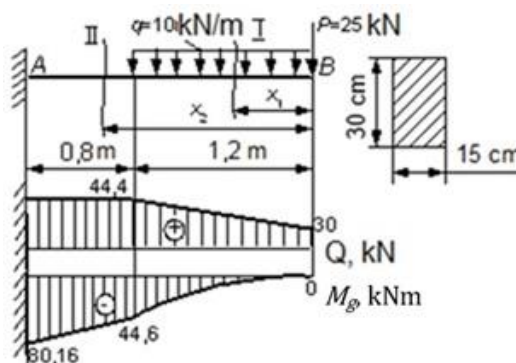
Z tabeli D.58 wybieramy ceownik C33  $J_x = 7980 \text{ cm}^4$ .

Ostatecznie przyjmujemy ceownik C33,  $J_x = 15960 \text{ cm}^4$ , wówczas warunek sztywności jest spełniony.

**Przykład 2.12.** Sprawdzić eksploatacyjną zdolność wspornikowej drewnianej belki (rys. 2.20), jeśli  $\gamma_f = 1,2$  (współczynnik bezpieczeństwa obciążenia), współczynnik warunku pracy  $\gamma_c = 1,1$ ; wytrzymałość obliczeniowa  $R = 15 \text{ MPa}$ .

Dane:  
 $\gamma_f = 1,2$   
 $\gamma_c = 1,1$   
 $R = 15 \text{ MPa}$

Szukane:  
 Zdolność eksploatacyjna belki – ?



Rys. 2.20. Schemat obciążenia belki

### Rozwiązanie

1. Określamy obliczeniowe obciążenie.

$$q_{ob} = q \cdot \gamma_f = 10 \cdot 1,2 = 12 \text{ kN/m}$$

$$P_{ob} = P \cdot \gamma_f = 25 \cdot 1,2 = 30 \text{ kN}$$

2. Sporządzamy wykres  $Q$ .

$$0 \leq x_1 \leq 1,2$$

$$Q(x) = P_{ob} + q_{ob} \cdot x_1$$

$$Q(x=0) = P_{ob} + q_{ob} \cdot 0 = 30 \text{ kN}$$

$$Q(x=1,2) = P_{ob} + q_{ob} \cdot 1,2 = 30 + 12 \cdot 1,2 = 44,4 \text{ kN}$$

$$1,2 \leq x_1 \leq 2$$

$$Q(x) = P_{ob} + q_{ob} \cdot 1,2$$

$$Q(x=1,2) = P_{ob} + q_{ob} \cdot 1,2 = 30 + 12 \cdot 1,2 = 44,4 \text{ kN}$$

$$Q(x=2) = P_{ob} + q_{ob} \cdot 1,2 = 30 + 12 \cdot 1,2 = 44,4 \text{ kN}$$

3. Sporządzamy wykres  $M_g$ .

$$0 \leq x_1 \leq 1,2$$

$$M(x_1) = -P_{ob} \cdot x - \frac{q_{ob} \cdot x^2}{2}$$

$$M(x_1=0) = -P_{ob} \cdot 0 - \frac{q_{ob} \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x_1=1,2) = -P_{ob} \cdot 1,2 - \frac{q_{ob} \cdot 1,2^2}{2} = -30 \cdot 1,2 - \frac{12 \cdot 1,2^2}{2} = -44,6 \text{ kNm}$$

$$1,2 \leq x_1 \leq 2$$

$$M(x) = -P_{ob} \cdot x - q_{ob} \cdot 1,2 \cdot (x_2 - 0,6)$$

$$M(x_2=1,2) = -30 \cdot 1,2 - 12 \cdot 1,2 \cdot (1,2 - 0,6) = -44,6 \text{ kNm}$$

$$M(x_2=2) = -30 \cdot 2 - 12 \cdot 1,2 \cdot (2 - 0,6) = -80,16 \text{ kNm}$$

Na podstawie uzyskanych danych sporządzamy wykresy  $Q(x)$  i  $M_g(x)$  (rys. 2.20).

Określamy wskaźnik wytrzymałości na zginanie dla prostokątnego przekroju:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 30^2}{6} = 2250 \text{ cm}^3$$

Sprawdzamy eksploatacyjną zdolność belki. Z warunku wytrzymałości:

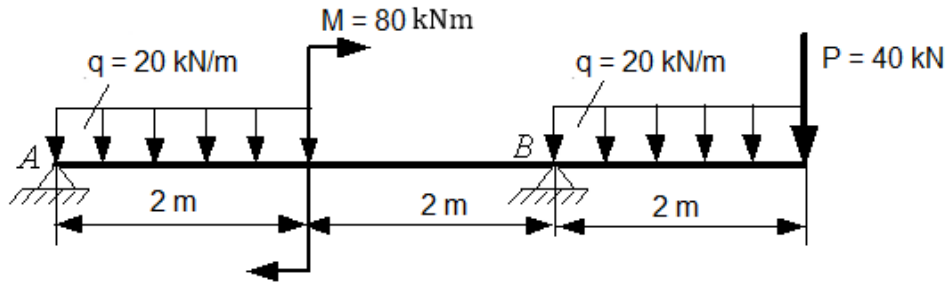
$$M_g = 80,16 \text{ kNm} \leq M_{max}$$

$$M_{max} \leq k \cdot W_x = \gamma_c \cdot R \cdot W_x = 1,1 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 2250 \cdot 10^{-6} = 37125 \text{ Nm} = 37,3 \text{ kNm}$$

Faktyczny moment zginający  $M_g$  jest większy od obliczeniowego  $M_{max}$ .

*Wniosek:* eksploatacyjna zdolność belki nie jest zapewniona, trzeba zmniejszyć obciążenie albo zwiększyć pole przekroju prostokąta.

**Przykład 2.13.** Z warunków wytrzymałości i sztywności dobrać wymiary przekroju poprzecznego belki (rys. 2.21).



Rys. 2.21. Schemat obciążenia belki

Dla obciążonej belki:

- określić wartości sił poprzecznych  $Q_i$  i momentów zginających  $M_{g_i}$  i narysować ich wykresy;

- z warunku wytrzymałości określić wymagane wymiary belki w trzech wariantach:

- przekrój poprzeczny – koło;
- przekrój poprzeczny – prostokąt ( $h/b = 2$ );
- przekrój poprzeczny – dwuteownik.

Wybrać z trzech wariantów i uzasadnić racjonalny kształt przekroju.

- dla racjonalnego przekroju narysować wykresy normalnych i stycznych naprężeń. Określić ekwiwalentne naprężenie dla tej belki.

- sprawdzić sztywność belki wybranego przekroju za pomocą warunku wytrzymałości, jeśli  $[f] = 0,001l$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa;  $k = 160$  MPa.

### Rozwiązanie

Z warunków równowagi obliczamy reakcje podpór belki.

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 2 \cdot 1 - M + R_B - q \cdot 2 \cdot 5 - P \cdot 6 = 0$$

$$R_B = \frac{+q \cdot 2 \cdot 1 + M + q \cdot 2 \cdot 5 + P \cdot 6}{4} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 80 + 20 \cdot 2 \cdot 5 + 40 \cdot 6}{4} = 140 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 = 0$$

$$R_A = \frac{-q \cdot 2 \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2}{4} = \frac{-20 \cdot 2 \cdot 3 + 80 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + 40 \cdot 2}{4} = 20 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y = 0 - R_A - q \cdot 4 - P + R_B = 0$$

$$-20 - 80 - 40 + 140 = 0$$

Określamy siły poprzeczne  $Q$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$Q(x_1) = -R_A - q \cdot x_1$$

$$Q(x_1 = 0) = -R_A - q \cdot 0 = -20 - 20 \cdot 0 = -20 \text{ kN}$$

$$Q(x_1 = 2) = -R_A - q \cdot 2 = -20 - 20 \cdot 2 = -60 \text{ kN}$$

$$2 \leq x_2 \leq 4$$

$$Q(x_2) = -R_A - q \cdot x_2$$

$$Q(x_1 = 2) = P + q \cdot 2 - R_A - q \cdot 2 = -20 - 20 \cdot 2 = -60 \text{ kN}$$

$$Q(x_1 = 4) = -R_A - q \cdot 2 = -20 - 20 \cdot 2 = -60 \text{ kN}$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$Q(x_3) = P + q \cdot x_3$$

$$Q(x_3 = 0) = P + q \cdot 0 = 40 + 20 \cdot 0 = 40 \text{ kN}$$

$$Q(x_3 = 2) = P + q \cdot 2 = 40 + 20 \cdot 2 = 80 \text{ kN}$$

3. Określamy moment zginający  $M_g$ .

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$M(x_1) = -R_A \cdot x_1 - \frac{q \cdot x_1^2}{2}$$

$$M(x_1 = 0) = -R_A \cdot 0 - \frac{q \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x_1 = 2) = -R_A \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = -80 \text{ kNm}$$

$$2 \leq x_2 \leq 4$$

$$M(x_2) = -R_A \cdot x_2 - q \cdot 2(x_2 - 1) + M$$

$$M(x_2 = 2) = -R_A \cdot 2 - q \cdot 2(2 - 1) + M = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x_2 = 4) = -R_A \cdot 4 - q \cdot 2(4 - 1) + M = -120 \text{ kNm}$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

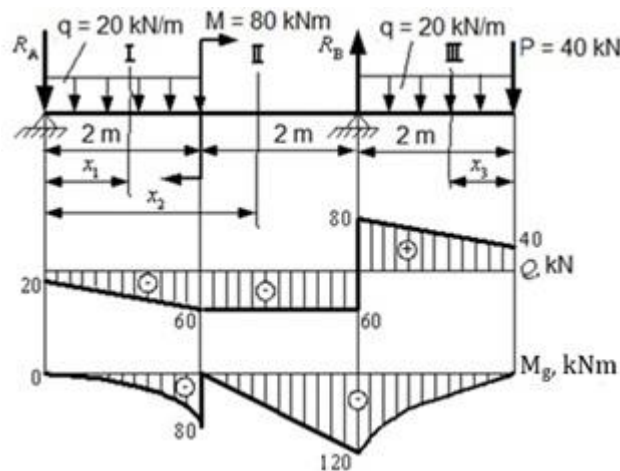
$$M(x_3) = -P \cdot x_3 - \frac{q \cdot x_3^2}{2}$$

$$M(x_3 = 0) = -P \cdot 0 - \frac{q \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

$$M(x_3 = 2) = -P \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = -120 \text{ kNm}$$

4. Sporządzamy wykresy  $Q$  i  $M_g$ , uwzględniając, że w dwóch przedziałach występuje obciążenie ciągłe  $q$ , wówczas wykresem  $M_g$  jest parabola, wyrzucenie której jest zorientowane w kierunku przeciwnym do obciążenia.

W drugim przedziale wykres  $M_g$  jest ograniczony przez proste (rys. 2.22). Jak widać z wykresu, maksymalny moment  $M_g = 120$  kNm występuje w przekroju przy  $x = 4$  m.



Rys. 2.22. Wykres sił tnących i momentów gnących dla belki z przykładu 2.13

5. Z warunku wytrzymałości na naprężenia normalne dobieramy wymagany wymiar przekroju belki:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq k$$

Wymagany moment wytrzymałości przekroju belki:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{k}, \text{ więc } W_x \geq \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 750 \text{ cm}^3$$

Dla okrągłego przekroju belki mamy:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ wtedy}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 750 \cdot 10^{-6}}{3,14}} \geq \sqrt[3]{7,643 \cdot 10^{-3}} \geq 1,97 \cdot 10^{-3 \frac{1}{3}} \geq 1,97 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 19,7 \text{ cm}$$

$$\text{Przyjmujemy } d = 20 \text{ cm}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ cm}^2$$

Działające naprężenia w belce będą wynosić:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,20^3} \cdot 32 = 153 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 153 \text{ MPa}$$

Naprężenia w belce wynoszą:

$$\frac{153 - 160}{160} \cdot 100 \% = -4,4 \% < [5 \%]$$

$$\text{Dla przekroju prostokątnego belki: } W_x = \frac{bh^2}{6},$$

$$\text{ponieważ } b = \frac{h}{2}, \text{ to } W_x = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}.$$

więc

$$h = \sqrt[3]{12W_x} = \sqrt[3]{12 \cdot 750 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{9,0 \cdot 10^{-3}} = 2,082 \cdot 10^{-3 \frac{1}{3}} = 2,082 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 20,82 \text{ cm}$$

$$\text{Przyjmujemy } h = 21 \text{ cm}, \quad b = \frac{h}{2} = 10,5 \text{ cm}, \quad A = 220,5 \text{ cm}^2.$$

W tym przekroju naprężenia działające wynoszą:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{M_{max}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{120 \cdot 10^3}{0,105 \cdot 0,21^2} \cdot 6 = 15,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 155,5 \text{ MPa}$$

Naprężenia w belce będą wynosić:

$$\frac{155,5 - 160}{160} \cdot 100\% = -2,8\% < [5\%]$$

Dla dwuteownika: z tabeli D.58 najbliższe wartości  $W_z = 750 \text{ cm}^3$  ma teownik T36 ze wskaźnikiem wytrzymałości na zginanie  $W_z = 743 \text{ cm}^3$ .

Działające naprężenia w dwuteowniku I36:

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{120 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 0,161 \cdot 10^9 = 162 \text{ MPa}$$

Przeciążenie belki wynosi:

$$\frac{162-160}{160} \cdot 100\% = +1,25\% > [5\%]$$

Ostatecznie wybieramy dwuteownik I36:

moment bezwładności  $J_z = 13380 \text{ cm}^4$ , powierzchnia  $A = 61,9 \text{ cm}^2$ .

Wniosek: najbardziej racjonalnym z trzech przekrojów jest dwuteownik I36.

6. Sprawdzamy wytrzymałość dwuteownika względem największych naprężeń stycznych  $\tau$ :

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{x_{max}}}{J_x \cdot b} \leq k_s$$

gdzie:  $S_{x_{max}}$  – statyczny moment półprzekroju belki dwuteowej względem osi obojętnej (z tabel w załączniku),

$b$  – szerokość półki dwuteownika (tabela D.59).

Dla materiałów  $k_s = (0,5 \div 0,6)k$ , wtedy  $k_s = 0,56 \cdot 160 = 90 \text{ MPa}$ .

$$\tau_{max} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,337 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 33,7 \text{ MPa} < k_s = 90 \text{ MPa}$$

7. Sporządzamy wykresy naprężeń normalnych  $\sigma$  i stycznych  $\tau$  dwuteownika.

$$\text{Naprężenia normalne: } \sigma = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{M_{max} \cdot y}{J_x},$$

gdzie  $y$  – odległość od obojętnej osi do rozpatrywanego punktu.

$$\sigma(1) = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 0,161 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 161 \text{ MPa}$$

$$\sigma(2) = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot (18 - 1,23) \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 0,150 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma(3) = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0}{13380 \cdot 10^{-8}} = 0 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne:

$$\tau(1) = \frac{Q_{max} \cdot S\left(\frac{h}{2}\right)}{b \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0}{145 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0$$

gdzie  $S\left(\frac{h}{2}\right) = 0$  – statyczny moment bezwładności względem obojętnej osi części powierzchni, która jest odcięta od przekroju linią (krawędź półki);

$$\tau(1') = \frac{Q_{max} \cdot S_{półki/1prz}}{b \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6}}{145 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,0128 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,28 \text{ MPa}$$

gdzie  $S_{półki/1prz}$  – statyczny moment bezwładności powierzchni półki względem osi obojętnej:

$$S_{półki/1prz} = b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 145 \cdot 12,3 \left( \frac{360}{2} - \frac{12,3}{2} \right) = 310062 \text{ mm}^2 = 310 \text{ cm}^3$$

gdzie  $b$  – szerokość półki dwuteownika,

$t$  – grubość półki dwuteownika (tabela D.59).

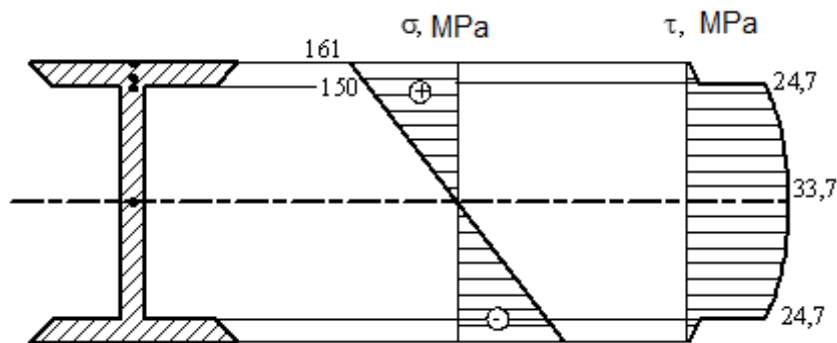
$$\tau(2) = \frac{Q_{max} \cdot S_{półki/1prz}}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,247 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 24,7 \text{ MPa}$$

$$\tau(3) = \frac{Q_{max} \cdot S_{półki/2prz}}{b \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 33,7 \text{ MPa},$$

gdzie

$S_{półki/2prz}$  – statyczny moment półprzekroju dwuteownika względem obojętnej osi (z tabeli w załączniku).

Wykresy naprężeń normalnych  $\sigma$  i stycznych  $\tau$  przekroju dwuteownika pokazano na rys. 2.23.



Rys. 2.23. Wykres naprężeń normalnych i stycznych w dwuteowniku

8. Określamy naprężenia zredukowane przekroju dwuteownika zgodnie z hipotezą wytrzymałościową Hubera-Misesa:

$$\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq k$$

$$\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{150^2 + 3 \cdot 24,7^2} = 156,13 \text{ MPa} < 160 \text{ MPa}$$

9. Sprawdzamy wybrany dwuteownik I36 za pomocą warunku sztywności.

$$\text{Warunek sztywności: } f \geq [f] = 0,001l = [0,006 \text{ m}]$$

W celu określenia ugięcia dwuteownika umieszczamy początek układu współrzędnych na lewej podporze i zapisujemy uniwersalne równanie linii sprężystej dla ostatniego przedziału belki:

$$EJ_x f(x) = EJ_x f_0 + EJ_x \theta_0 \cdot x - R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + M \frac{(x-2)^2}{2} + \\ + q \frac{(x-2)^4}{24} + R_B \frac{(x-4)^3}{6} - q \frac{(x-4)^4}{24}$$

Z warunku zamocowania belki wynika:  $f(x=0) = f_0 = 0$ ,  $f(x=4) = 0$

Kąt  $\theta_0$  obliczamy z warunku, że dla  $x=4$  ugięcie belki  $f=0$ .

$$EJ_x f(x=4) = EJ_x f_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 4 - R_A \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} + M \frac{(x-2)^2}{2} + q \frac{(x-2)^4}{24} = 0$$

$$EJ_x \cdot 0 + EJ_x \theta_0 \cdot 4 - 20 \frac{4^3}{6} - 20 \frac{4^4}{24} + 80 \frac{(4-2)^2}{2} + 20 \frac{(4-2)^4}{24} = 0$$

Stąd kąt obrotu przekroju na lewej podporze wynosi  $\theta_0 = \frac{63,3}{EJ_x}$ .

Określamy ugięcie dwuteownika w niebezpiecznych miejscach:

$$EJ_x f(x=2) = EJ_x \cdot 0 + EJ_x \frac{63,3}{EJ_x} \cdot 2 - 20 \frac{2^3}{6} - 20 \frac{2^4}{24} = 86,7 \text{ kNm}^3$$

$$f(x=2) = \frac{86,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,00324 \text{ m} = 0,324 \text{ cm}$$

$$EJ_x f(x=6) = EJ_x \cdot 0 + EJ_x \frac{63,3}{EJ_x} \cdot 6 - 20 \frac{6^3}{6} - 20 \frac{6^4}{24} + 80 \frac{(6-2)^2}{2} + \\ + 20 \frac{(6-2)^4}{24} + 140 \frac{(6-4)^3}{6} - 20 \frac{(6-4)^4}{24} = -393 \text{ kNm}^3$$

$$f(x=6) = \frac{-393 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,0148 \text{ m} = -1,48 \text{ cm}$$

Maksymalne ugięcie występuje na końcu belki dla  $x=6$  m i wynosi  $f = -0,0148$  m, co przekracza dopuszczalne ugięcie

$$[f] = 0,001l = 0,006 \text{ m} = 0,6 \text{ cm}.$$

Maksymalne ugięcie przekracza dopuszczalne ugięcie, dlatego konieczny jest dobór innego dwuteownika. W tym celu określamy wymagany osiowy moment bezwładności dla nowego dwuteownika:

$$J_x \geq \frac{-393 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 327,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 = 32750 \text{ cm}^4$$

Z tabeli D.59 wynika, że dwuteownik I50 dla którego  $J_z = 39727 \text{ cm}^4$  spełnia warunki sztywności.



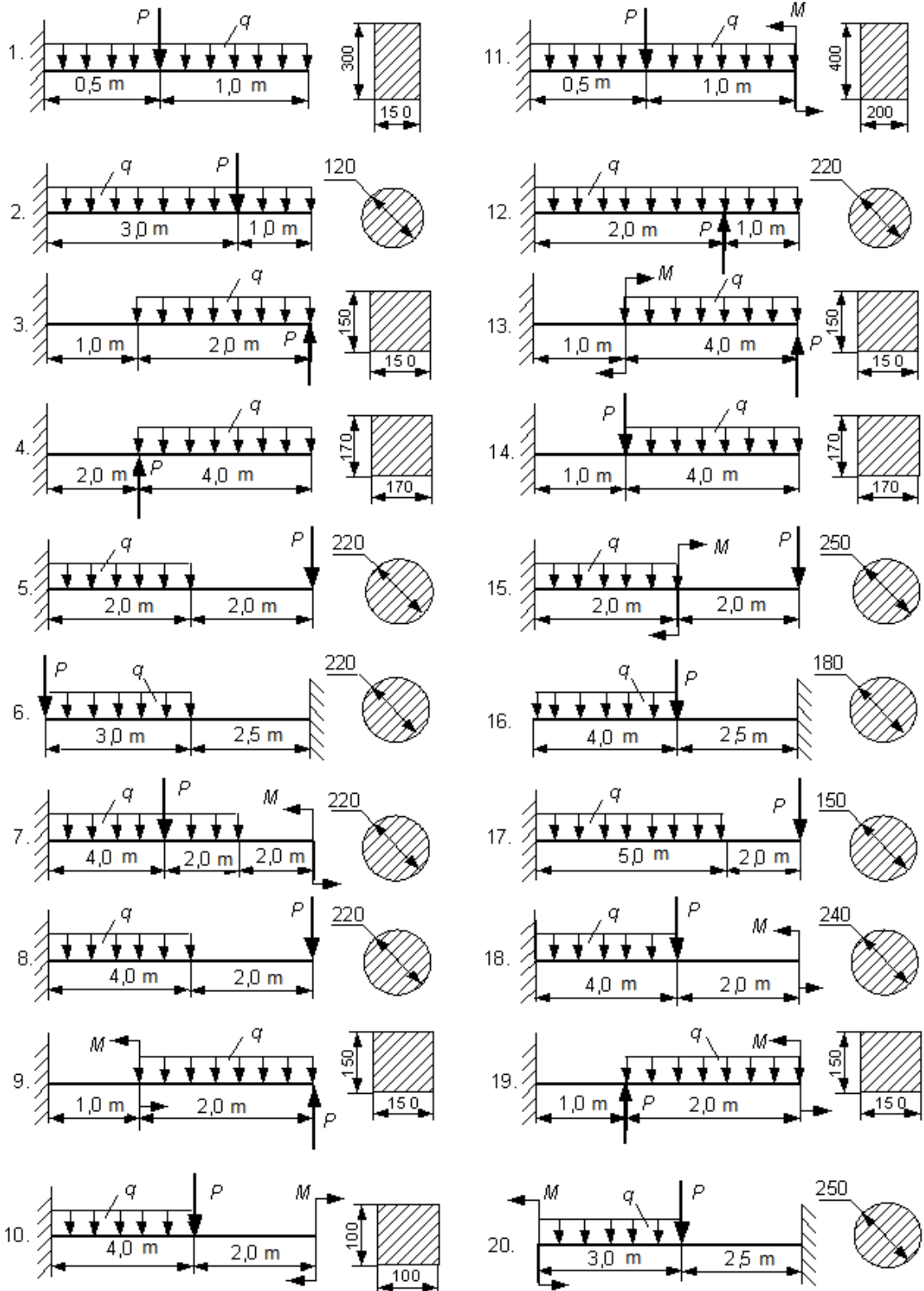
## Zadania dla samodzielnego rozwiązania (obliczeniowe)

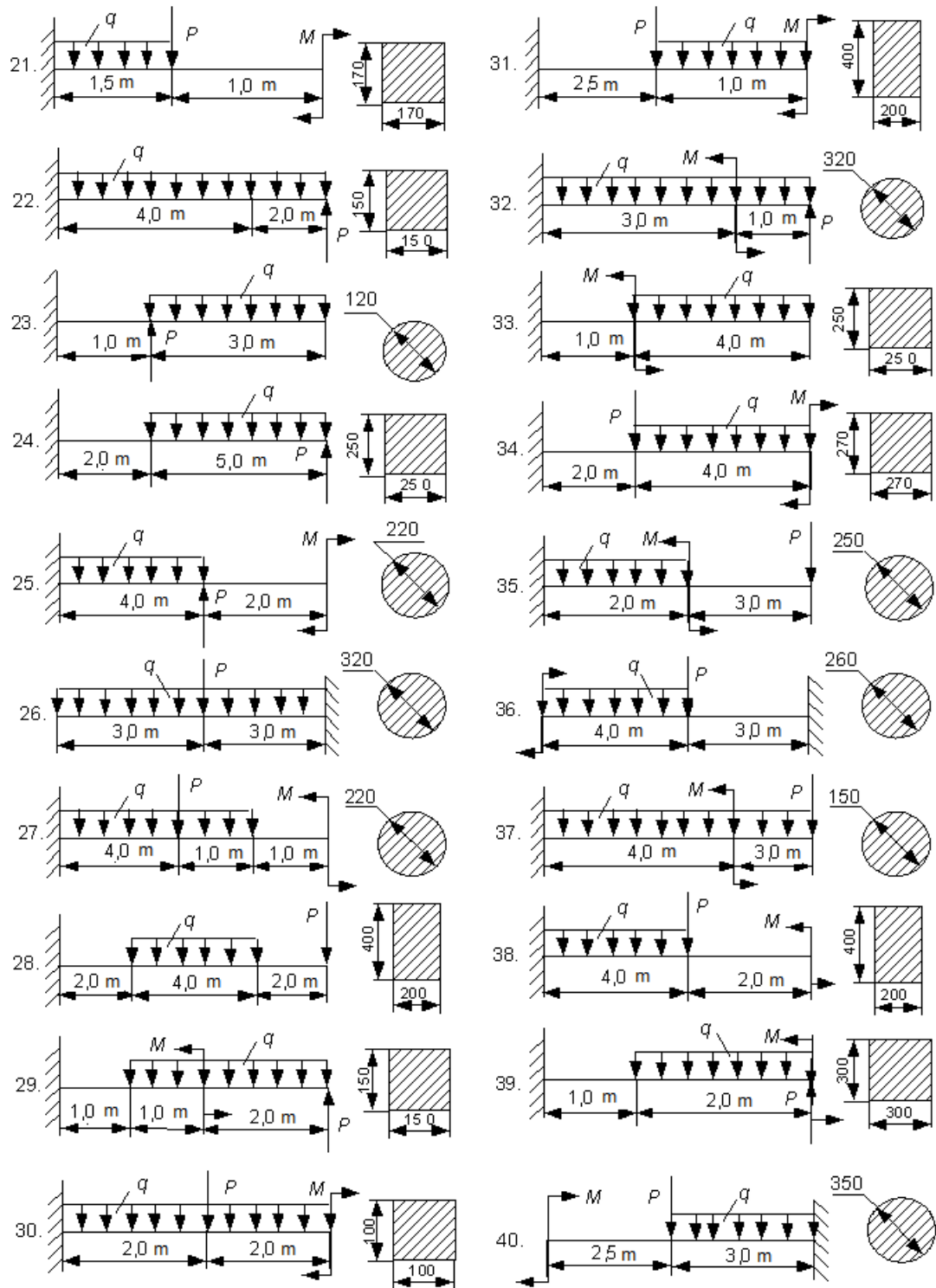
**Zadanie 2.7.** Sprawdzić eksploatacyjną zdolność belki (tabela 2.5, schematy do obliczenia).

Tabela 2.5. Dane wejściowe do zadania 2.7

Nr war.	Siła $P$ , kN	Moment $M$ , kNm	Obciążenie ciągłe $q$ , kN/m	Wsp. niezawodności $\gamma_f$	Wsp. warunków pracy $\gamma_c$	Wytrzymałość obliczeniowa $R$ , MPa
1	25	30	18	1,2	1,1	20
2	40	40	12	1,3	1,2	15
3	15	35	10	1,1	1,1	18
4	20	46	15	1,2	1,2	22
5	35	30	14	1,0	1,1	16
6	25	25	18	1,2	1,2	20
7	22	28	10	1,3	1,1	16
8	34	18	8	1,1	1,2	18
9	28	34	15	1,3	1,1	20
10	18	20	16	1,2	1,2	15

## Schematy do zadania 2.7





**Zadanie 2.8.** Z warunków wytrzymałości i sztywności dobrać przekrój poprzeczny belki (schematy do obliczeń).

Dla obciążonej belki:

– określić wartości sił poprzecznych  $Q$ , momentów zginających  $M_g$  i sporządzić ich wykresy;

– z warunku wytrzymałości określić niezbędne wymiary przekroju belki w trzech wariantach:

a) przekrój poprzeczny – koło;

b) przekrój poprzeczny – prostokąt ( $h/b = 2$ );

c) przekrój poprzeczny – dwuteownik.

Wybrać z trzech wariantów najbardziej racjonalny kształt przekroju i uzasadnić.

– dla wybranego przekroju narysować wykresy normalnych i stycznych naprężeń. Korzystając z odpowiedniej hipotezy wytrzymałościowej określić naprężenia zredukowane dla podanej belki.

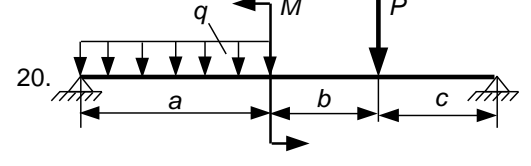
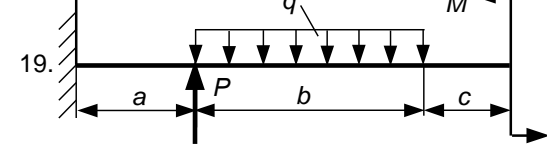
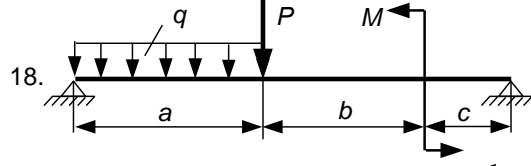
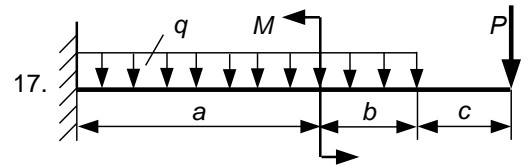
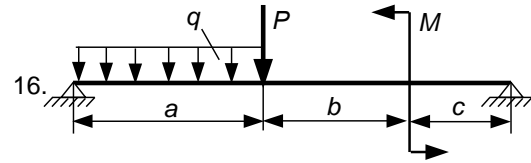
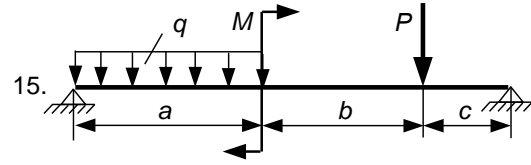
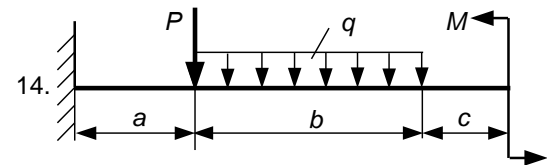
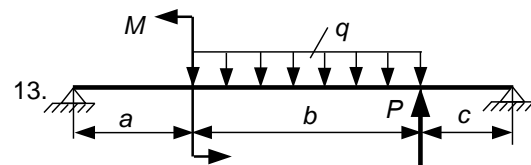
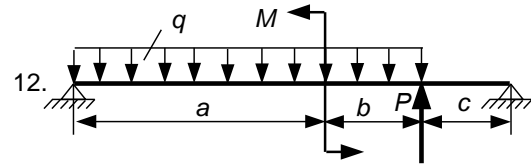
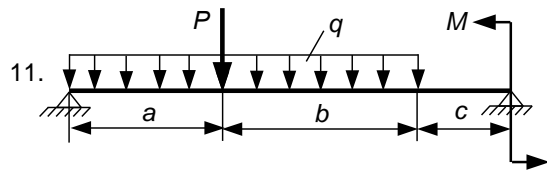
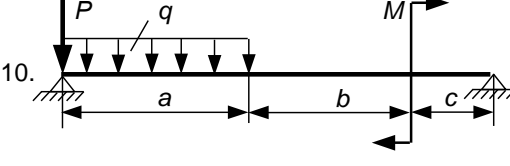
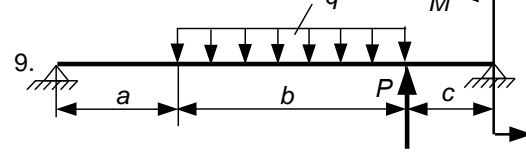
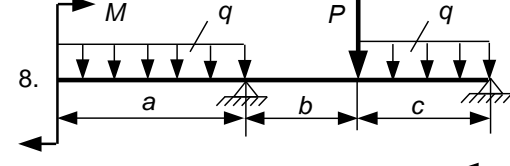
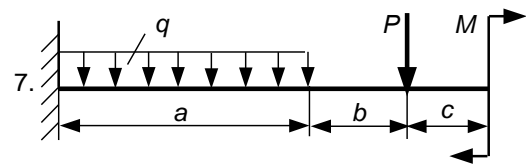
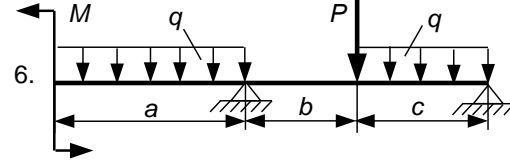
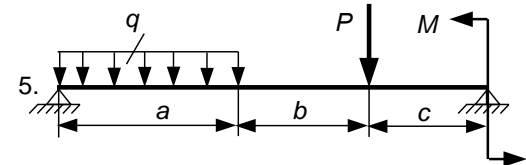
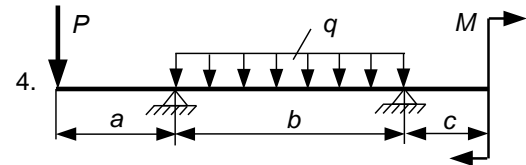
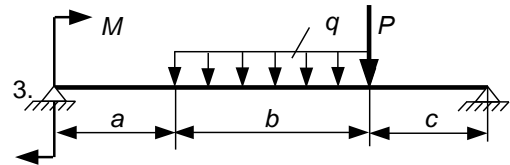
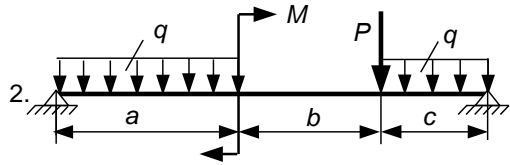
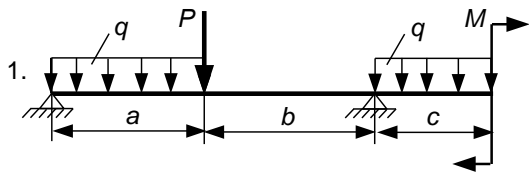
– za pomocą warunku wytrzymałości sprawdzić sztywność belki wybranego przekroju, jeśli  $[f] = 0,001l$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa.

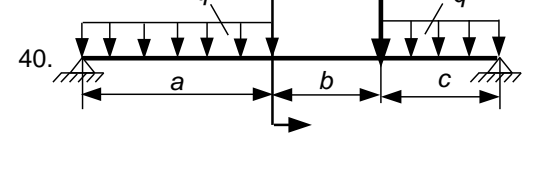
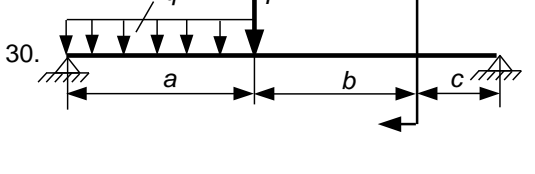
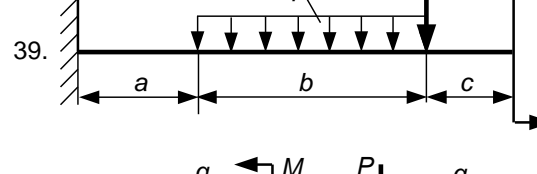
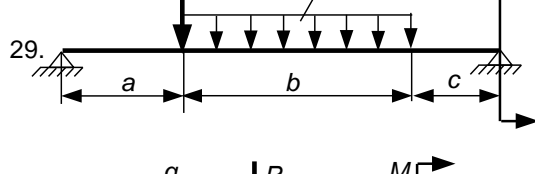
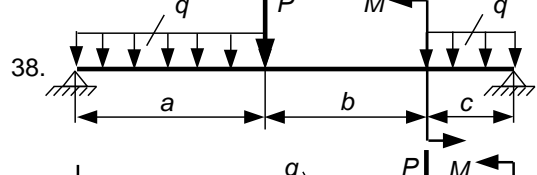
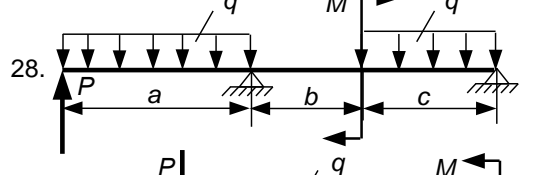
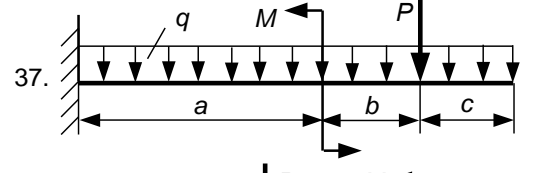
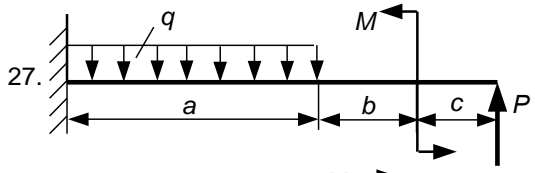
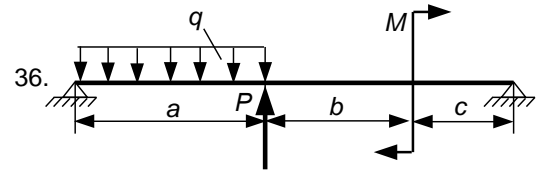
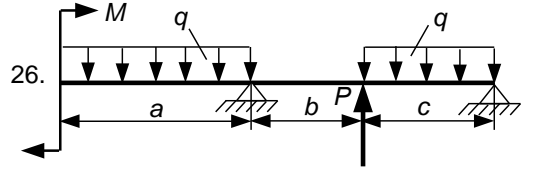
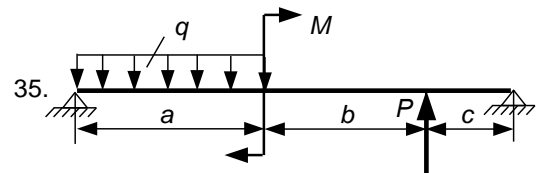
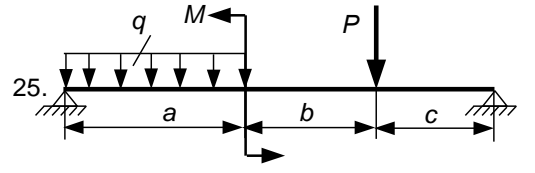
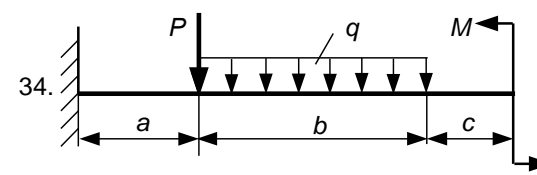
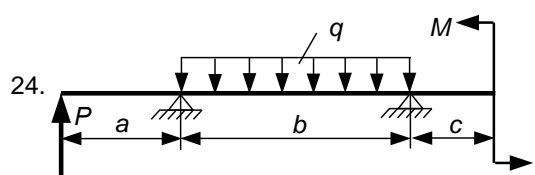
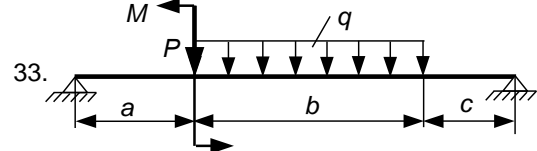
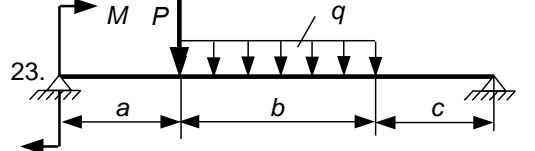
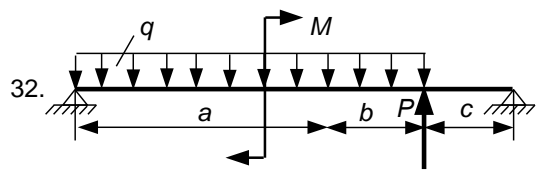
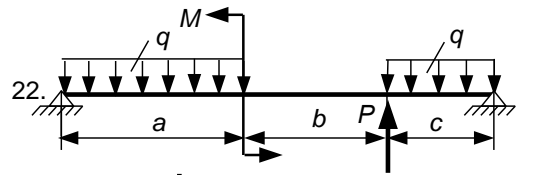
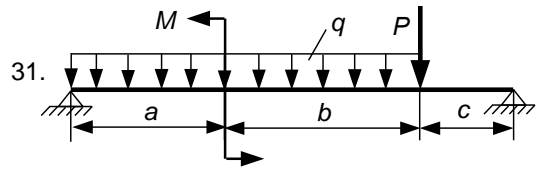
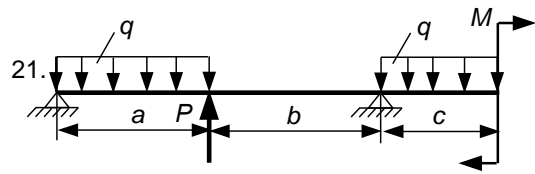
Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 2.6.

Tabela 2.6. Dane wejściowe do zadania 2.8

Nr war.	Siła $P$ , kN	Moment pary sił $M$ , kNm	Obciążenie ciągłe $q$ , kN/m	Dopuszczalne naprężenia $k$ , MPa	$a$ , m	$b$ , m	$c$ , m
1	15	30	8	200	2	3	1
2	14	20	6	150	3	2	2
3	15	15	5	180	1	4	1
4	20	16	10	220	2	4	1
5	15	20	7	160	3	2	2
6	25	25	8	200	3	1	2
7	20	15	10	160	4	1	1
8	14	18	8	180	3	1	2
9	20	30	5	200	2	4	1
10	18	20	6	150	3	2	1

### Schematy do zadania 2.8





## 2.6. Zginanie ze skręcaniem prętów okrągłych

### Wiadomości ogólne

Wały różnych maszyn zazwyczaj pracują w warunkach oddziaływania na nie naprężeń zginających i skręcających. Gdy moment obrotowy jest przenoszony na wał za pomocą koła pasowego i napędu pasowego, generowana jest para sił, wywołanych przez skręcanie i zginanie. Podobny schemat obserwuje się przy przeniesieniu obrotów przez przekładnię. W większości przypadków wały są wyginane w dwóch płaszczyznach, a nie w jednej.

Jeśli napęd pasowy jest ustawiony pod kątem (rys. 2.24), wał jest zginany w płaszczyźnie poziomej przez rzut sił naprężenia paska na oś poziomą, a w płaszczyźnie pionowej przez ciężar własny koła pasowego i rzut sił naprężenia paska na oś pionową.

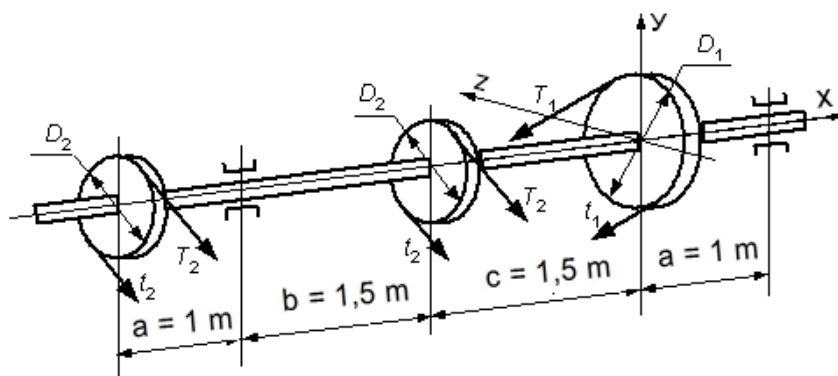
Łożyska, na których spoczywa wał, są uwzględniane w obliczeniach jako przestrzenne podpory przegubowe, tj. połączenia, które zapobiegają ruchom liniowym, ale nie zakłócają obrotu stałych sekcji wału.

Przy jednoczesnym zginaniu i skręcaniu w przekroju poprzecznym wału uwzględniane są moment zginający  $M_g$  i moment skręcający  $M_s$ .

Wały są zwykle wykonywane ze stali konstrukcyjnej o średniej zawartości węgla. Obliczenia konstrukcji opierają się na hipotezach wytrzymałościowych.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.14.** Trzy koła pasowe są zamontowane na wale. Koło o średnicy  $D_1 = 0,6$  m i kącie pochylenia  $\alpha_1 = 45^\circ$  wykonuje  $n = 500$  ob./min i przekazuje moc  $N = 75$  kW. Dwa pozostałe koła mają takie same średnice  $D_2 = 0,4$  m i takie same kąty nachylenia  $\alpha_2 = 45^\circ$ , każde z nich przekazuje moc  $N/2$  (rys. 2.24).



Rys. 2.24. Schemat wału do przykładu 2.14

Należy:

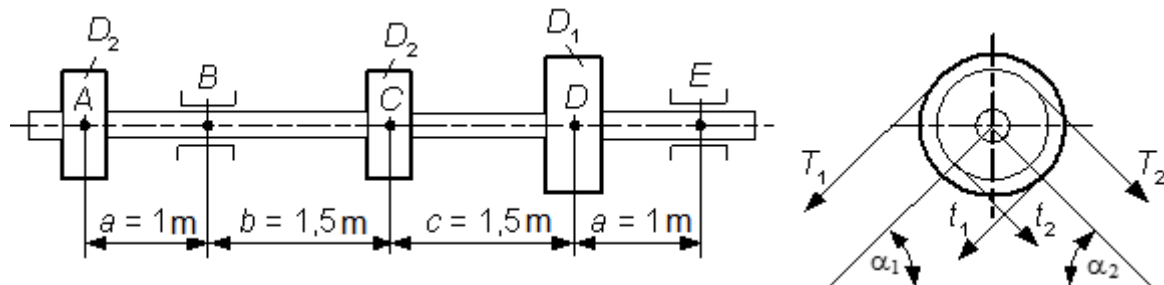
- określić momenty przyłożone do kół pasowych zgodnie z podanymi wartościami  $N$  (kW) i  $n$  (ob./min);
- narysować wykresy momentów skręcających  $M_s$ ;
- znając momenty i zadane średnice kół  $D_1$  i  $D_2$  określić siły naciągu  $t_1$  i  $t_2$ , działające na koła;
- określić siłę na wał, przyjmując siły równe trzem siłom obwodowym;
- określić siły zginające działające w płaszczyźnie poziomej i pionowej (bez uwzględnienia masy kół i wału);
- sporządzić wykresy momentów zginających poziomych sił  $M_g^h$  i pionowych sił  $M_g^v$ ;
- sporządzić wykresy sumarycznych momentów zginających  $M_g$ ;
- za pomocą wykresów  $M_s$  i  $M_g$  określić niebezpieczny przekrój i określić wartość maksymalnego obliczeniowego momentu  $M_{ob}$  (zgodnie z odpowiednią hipotezą wytrzymałościową);
- dobrać średnicę wału  $d$  przy  $k = 70$  MPa.

Dane wejściowe:  $a = 1$  m;  $b = 1,5$  m;  $c = 1,5$  m.



### Rozwiązanie

Koło 1 – napędzające, koła 2 i 3 (o tej samej średnicy) – napędzane.  $T_1$ ,  $T_2$  – naciągnięcie paska koła napędzającego,  $t_1 = t_2 = T/2$  – naciągnięcie paska części napędzanej (rys. 2.25).



Rys. 2.25. Schemat wału napędowego

1. Obliczamy momenty skręcające działające na koła, korzystając z zadanych wartości  $N$  i  $n$  według wzorów:

$$M_1 = \frac{N}{\omega} = \frac{N}{n \frac{\pi}{30}} = \frac{75 \cdot 10^3}{500 \frac{3,14}{30}} = 1433,12 \text{ Nm}$$

$$M_2 = \frac{N/2}{\omega} = \frac{N/2}{n \frac{\pi}{30}} = \frac{75 \cdot 10^3 / 2}{500 \frac{3,14}{30}} = 716,56 \text{ Nm}$$

Rysujemy obliczeniowy schemat momentów skręcających wału (rys. 2.26, a).

2. Określamy wartości momentów skręcających na odcinkach wału jako sumę momentów po jednej stronie od rozpatrywanego odcinka na obliczeniowym schemacie wału (rys. 2.26, a):

$$M_s^{AC} = M_2 = 716,56 \text{ Nm}, \quad M_s^{CD} = M_2 + M_2 = M_1 = 1433,12 \text{ Nm}$$

Na podstawie uzyskanych danych rysujemy wykres momentów skręcających (rys. 2.26, b).

3. Obliczamy siły naciągu  $t_1$  i  $t_2$  działające na koła:

koło 1:

moment obrotowy napędu pasowego jest równy iloczynowi różnicy sił naciągu i połowy średnicy koła pasowego:

$$M_1 = (T_1 - t_1) \frac{D_1}{2} = (2t_1 - t_1) \frac{D_1}{2} = \frac{t_1 D_1}{2}$$

więc,

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1433,12}{0,6} = 4777 \text{ N}$$

koło 2:

$$M_2 = (T_2 - t_2) \frac{D_2}{2} = \frac{t_2 D_2}{2}$$

więc,

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 716,56}{0,4} = 3583 \text{ N}$$

4. Określamy nacisk pasów na wał

$$P_A = T_2 + t_2 = 3t_2 = 10,75 \text{ kN}$$

$$P_C = T_2 + t_2 = 3t_2 = 10,75 \text{ kN}$$

$$P_D = T_1 + t_1 = 3t_1 = 14,37 \text{ kN}$$

5. Obliczamy siły zginające wał w płaszczyźnie poziomej (masę kół i wału pomijamy):

$$P_A^H = P_A \cdot \cos \alpha_2 = 10,75 \cdot \cos 45^\circ = 7,6 \text{ kN}$$

$$P_C^H = P_C \cdot \cos \alpha_2 = 10,75 \cdot \cos 45^\circ = 7,6 \text{ kN}$$

$$P_D^H = -P_D \cdot \cos \alpha_1 = 14,33 \cdot \cos 45^\circ = -10,13 \text{ kN}$$

Sporządzamy wykres sił w płaszczyźnie poziomej (rys. 2.26, c).

Wyznaczamy reakcje podpór:

$$\sum M_B = 0 - P_A^H \cdot a + P_C^H \cdot b - P_D^H \cdot (b + c) + R_E^H \cdot (b + c + a) = 0$$

$$R_E^H = \frac{P_A^H \cdot a - P_C^H \cdot b + P_D^H \cdot (b + c)}{b + c + a} = \frac{7,6 \cdot 1 - 7,6 \cdot 1,5 + 10,13(1,5 + 1,5)}{1,5 + 1,5 + 1} = 6,65 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 - P_A^H(a + b + c + a) + R_B^H(b + c + a) - P_C^H(c + a) + P_D^H \cdot a = 0$$

$$R_B^H = \frac{P_A^H(a + b + c + a) + P_C^H(c + a) - P_D^H \cdot a}{b + c + a} =$$

$$= \frac{7,6 \cdot (1 + 1,5 + 1,5 + 1) - 7,6(1,5 + 1) - 10,13 \cdot 1}{1,5 + 1,5 + 1} = 11,72 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum y = 0 + P_A^H - R_B^H + P_C^H - P_D^H + R_E^H = 0 + 7,6 - 11,72 + 7,6 - 10,13 + 6,65 = 0$$

6. Obliczamy wartości momentów zginających  $M_g^H$  od sił poziomych:

$$M_{g_A}^H = P_A^H \cdot 0 = 0 \text{ Nm}$$

$$M_{g_B}^H = P_A^H \cdot a = 7,6 \cdot 1 = 7,6 \text{ Nm}$$

$$M_{g_C}^H = P_A^H(a + b) - R_B^H \cdot b = 7,6(1 + 1,5) - 11,72 \cdot 1,5 = 1,42 \text{ Nm}$$

$$M_{g_D}^H = P_A^H(a + b + c) - R_B^H(b + c) + P_C^H \cdot c =$$

$$= 7,6(1 + 1,5 + 1,5) - 11,72(1,5 + 1,5) + 7,6 \cdot 1,5 = 6,65 \text{ Nm}$$

$$M_{g_D}^H = P_E^H \cdot d = 6,65 \cdot 1 = 6,65 \text{ Nm}$$

$$M_{g_E}^H = P_E^H \cdot 0 = 0 \text{ Nm}$$

Na podstawie uzyskanych wyników rysujemy wykres momentów zginających w płaszczyźnie poziomej (rys. 2.26, d).

7. Określamy siły zginające wał w płaszczyźnie pionowej (masy kół i wału pomijamy):

$$P_A^V = -P_A \cdot \sin \alpha_2 = -10,75 \cdot \sin 45^\circ = -7,6 \text{ kN}$$

$$P_C^V = -P_C \cdot \sin \alpha_2 = -10,75 \cdot \sin 45^\circ = -7,6 \text{ kN}$$

$$P_D^V = -P_D \cdot \sin \alpha_1 = -14,33 \cdot \sin 45^\circ = -10,13 \text{ kN}$$

Sporządzamy wykres obliczeniowy sił w płaszczyźnie pionowej (rys. 2.26, e).

Określamy reakcje podpór:

$$\sum M_B = 0 = P_A^V \cdot a - P_C^V \cdot b - P_D^V \cdot (b + c) + R_E^V \cdot (b + c + a) = 0$$

$$R_E^V = \frac{-P_A^V \cdot a + P_C^V \cdot b + P_D^V \cdot (b + c)}{b + c + a} = \frac{-7,6 \cdot 1 + 7,6 \cdot 1,5 + 10,13(1,5 + 1,5)}{1,5 + 1,5 + 1} = 8,55 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0; P_A^V(a + b + c + a) - R_B^V(b + c + a) + P_C^V(c + a) + P_D^V \cdot a = 0$$

$$R_B^V = \frac{P_A^V(a + b + c + a) + P_C^V(c + a) + P_D^V \cdot a}{b + c + a} =$$

$$= \frac{7,6 \cdot (1 + 1,5 + 1,5 + 1) + 7,6(1,5 + 1) + 10,13 \cdot 1}{1,5 + 1,5 + 1} = 16,78 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum y = 0 - P_A^V + R_B^V - P_C^V - P_D^V + R_E^V = 0$$

$$-7,6 + 16,78 - 7,6 - 10,13 + 8,55 = 0$$

8. Obliczamy wartości momentów zginających  $M_g^V$  sił pionowych:

$$M_{g_A}^V = -P_A^V \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{g_B}^V = -P_A^V \cdot a = -7,6 \cdot 1 = -7,6 \text{ kNm}$$

$$M_{g_C}^V = -P_A^V(a + b) + R_B^V \cdot b = -7,6(1 + 1,5) + 16,78 \cdot 1,5 = 6,125 \text{ kNm}$$

$$M_{g_D}^V = +P_E^V \cdot a = +8,55 \cdot 1 = 8,55 \text{ kNm}$$

$$M_{g_E}^V = -P_E^V \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzamy wykres momentów zginających w przekroju pionowym (rys. 2.26, f).

9. Obliczenie i sporządzanie wykresów sumarycznych momentów zginających  $M_g$ .

Określamy sumaryczne momenty zginające  $M_g^H$  i  $M_g^V$  w przekrojach wału w oparciu o wykresy

$$M_g = \sqrt{(M_g^H)^2 + (M_g^V)^2} \text{ kNm}$$

$$M_g^A = 0 \text{ kNm}; M_g^B = \sqrt{(-7,6)^2 + (-7,6)^2} = 10,75 \text{ kNm}$$

$$M_g^C = \sqrt{(-1,42)^2 + (6,125)^2} = 6,29 \text{ kNm}$$

$$M_g^D = \sqrt{(-6,65)^2 + (8,55)^2} = 10,83 \text{ kNm}$$

$$M_g^E = 0 \text{ kNm}$$

Wykres sumarycznych momentów zginających przedstawiono na rys. 2.26, g.

10. Określamy niebezpieczny przekrój z wykresów  $M_s$  i  $M_g$  i obliczamy wartość maksymalnego momentu obliczeniowego zgodnie odpowiednią hipotezą wyężeńiową (rys. 2.26, h).

Niebezpiecznym dla wału jest przekrój D, gdzie  $M_s = 1,433 \text{ kNm}$  i  $M_g = 10,83 \text{ kNm}$ .

Zgodnie z hipotezą wyężeńiową Coulomba-Treski:

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_g^2 + M_s^2} = \sqrt{10,83^2 + 1,433^2} = 10,92 \text{ kNm}$$

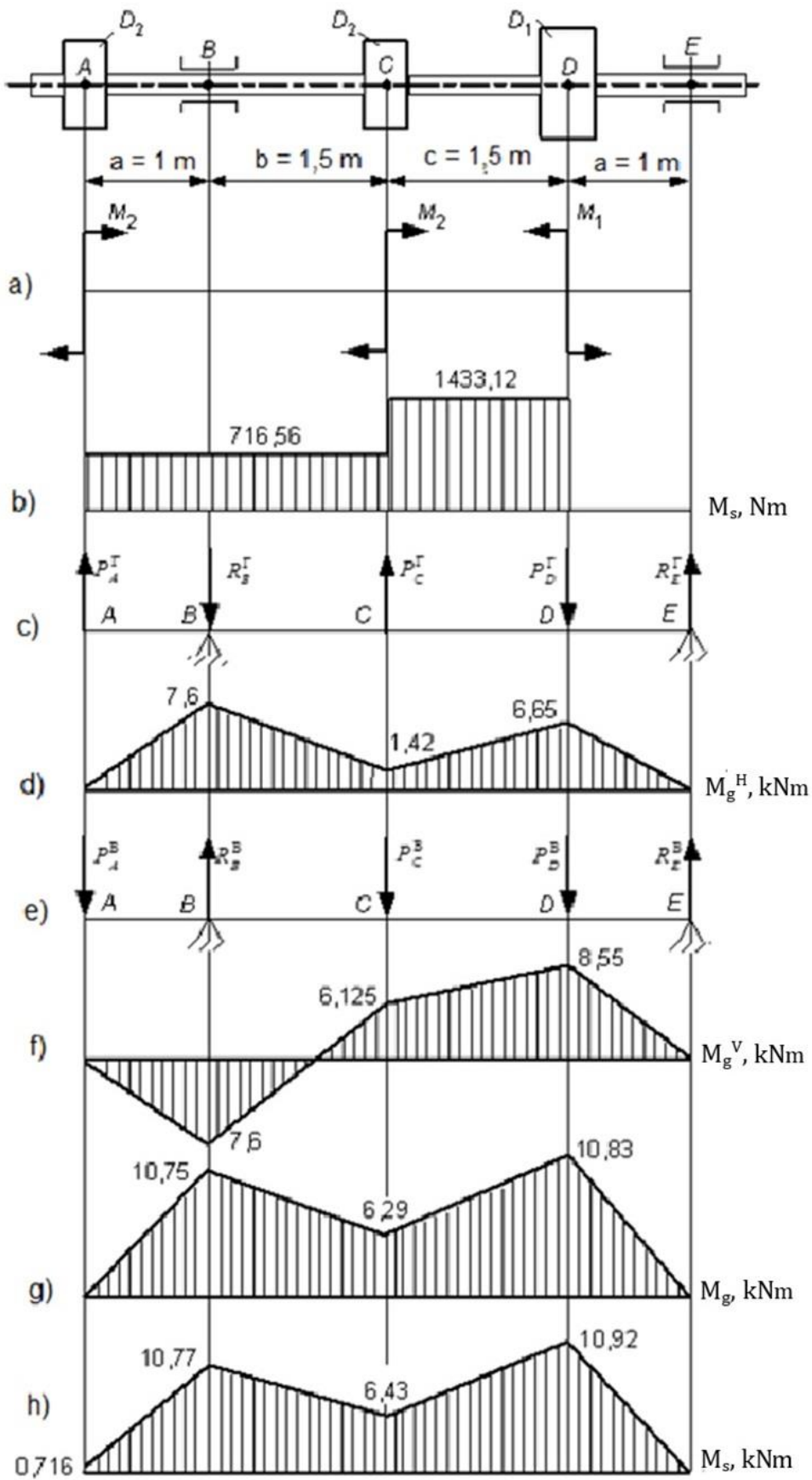
11. Średnicę wału określamy z warunku wytrzymałości

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{M_{\text{red}}}{W} \leq k$$

gdzie  $W = \frac{\pi d^3}{32}$  – wskaźnik wytrzymałości na zginanie dla wału o przekroju ciągłym, więc:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ob}}}{\pi \cdot k}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,92 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,1167 \text{ m}$$

Z tabeli D.43 przyjmujemy średnicę wału  $d = 120 \text{ mm}$ .



Rys. 2.26. Wykres obliczenia wału

**Zadania do samodzielnego rozwiązania**  
(obliczeniowe)

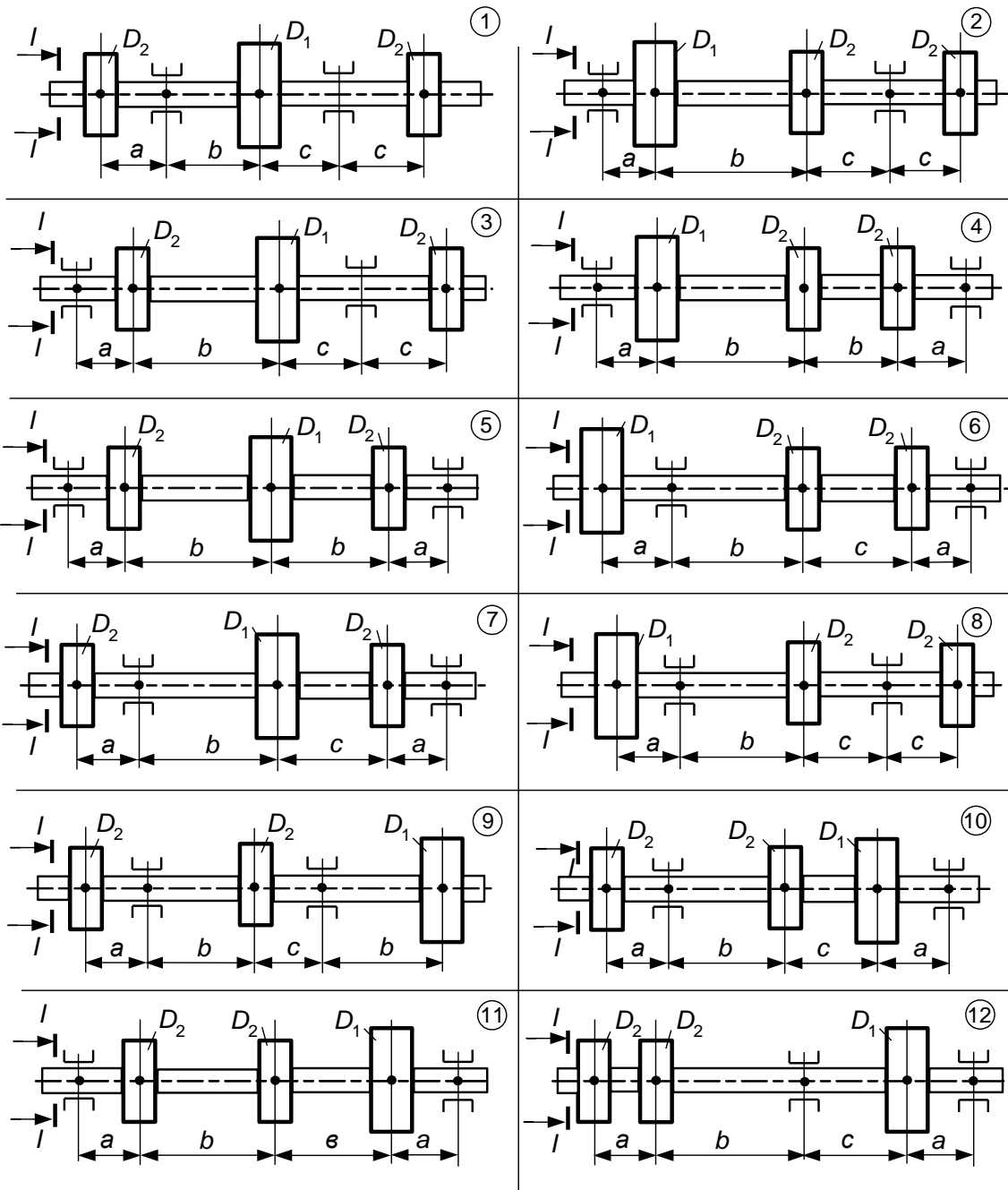
**Zadanie 2.9.** Określić średnicę wału z warunków wytrzymałości na zginanie i skręcanie (tabela 2.7, schematy do obliczenia).

Tabela 2.7. Dane wejściowe do zadania 2.9

Nr war.	Nr schematu	$N$ , kW	$n$ , ob./min	$a$ , m	$b$ , m	$c$ , m	$D_1$ , mm	$D_2$ , mm	$\alpha_1$ , stopni	$\alpha_2$ , stopni
1	7	10	100	0,5	1	1,5	600	400	30	30
2	3	75	600	0,5	2	1	800	650	45	45
3	5	80	800	1	2	1	1000	600	30	45
4	12	100	1000	1	2	0,5	1200	800	45	30
5	9	80	900	1	2,5	1,5	1400	700	45	60
6	2	70	700	0,5	2,5	1	1200	800	60	30
7	1	85	900	0,5	2	1,5	800	500	30	45
8	4	95	1000	1	2,5	2	1000	800	30	30
9	6	75	800	0,5	1,5	1	800	600	60	45
10	7	40	300	1	2	1,5	800	500	45	45
11	10	60	600	0,5	1,5	1	850	650	30	45
12	8	70	900	1	2	1,5	1200	900	60	45
13	7	80	1000	0,5	2	1	850	550	30	60
14	3	90	800	0,5	1,5	1	800	450	30	30
15	5	70	600	0,5	1,5	1	1200	800	60	30
16	2	80	900	1	2	1,5	1300	900	30	45
17	9	100	1000	0,5	1	1,5	1000	600	30	30
18	12	75	900	1	2	1	1000	700	45	30
19	1	40	500	0,5	2	1,5	1000	800	30	45
20	8	50	400	0,5	1	2	600	300	30	60
21	11	80	900	0,5	1	1,5	600	400	30	45
22	10	65	700	1	3	2	1200	900	30	45
23	7	75	800	1	2	1,5	1000	700	45	30
24	6	50	500	0,5	2	1,5	1200	800	30	60
25	11	100	400	0,5	1	1,5	1000	700	45	60
26	5	50	700	1	3	2	1200	400	30	45
27	2	60	800	0,5	2	2,5	1300	900	45	30
28	9	75	750	0,5	2	1,5	900	600	60	60
29	12	85	850	1	3	2	800	500	45	30
30	1	90	900	1	2	1,5	900	600	30	30

Nr war.	Nr schematu	N, kW	n, ob./min	a, m	b, m	c, m	D <sub>1</sub> , mm	D <sub>2</sub> , mm	α <sub>1</sub> , stopni	α <sub>2</sub> , stopni
31	8	120	1200	1	3	2	1200	800	45	30
32	7	140	1400	0,5	2	1	1400	900	30	30
33	5	150	500	0,5	1	1	1000	800	45	60
34	6	65	600	0,5	1,5	1	800	500	30	45
35	4	55	450	0,5	1	1,5	800	500	45	45
36	2	90	900	0,5	2	1	900	500	30	60
37	12	120	1200	0,5	2,5	1	1200	900	45	45
38	1	100	1000	0,5	1,5	1	1000	800	60	45
39	11	90	900	1	3	2	900	600	60	45
40	8	80	900	0,5	1	1,5	600	400	30	45
41	3	100	400	0,5	1	1,5	1000	700	45	60
42	4	50	400	0,5	1	2	600	300	30	60
44	6	65	560	0,5	1,5	1	700	500	45	45
45	7	70	700	0,5	1,5	1	700	500	60	45
46	9	90	1000	1	2	1	1000	800	45	45
47	2	120	1200	0,5	1,5	1	1200	600	45	45

### Schematy do obliczenia do zadania 2.9





## 2.7. Wyboczenie prętów ściskanych

### Wiadomości ogólne

Konstrukcje i ich elementy mogą ulec zniszczeniu w wyniku utraty pierwotnej formy równowagi sprężystej – utraty stateczności. Na charakter uszkodzenia ściskanego pręta istotny wpływ ma jego długość. Tak zwane „krępe” pręty ulegają zniszczeniu z powodu utraty wytrzymałości, a jedynym rodzajem odkształcenia jest ściskanie.

Wraz ze wzrostem długości ściskanego pręta następuje zjawisko utraty stateczności, które wyraża się przejściem od prostoliniowej formy równowagi do pewnej zakrzywionej. W wyniku zakrzywienia osi w pręcie występują zarówno odkształcenia ściskające, jak i zginające. Dzieje się to nagle, wtedy gdy obciążenie pręta nieznacznie wzrasta, a poziom naprężeń jest na tyle niski, że wytrzymałość nie jest jeszcze przekroczona.

Naprężenie, przy którym centralnie ściskany pręt prostoliniowy traci swoją stabilność, może być znacznie mniejsze niż wytrzymałość na rozciąganie materiału, z którego jest wykonany. Gdy pręt traci swój prosty kształt, w jego przekrojach pojawiają się dodatkowe naprężenia zginające, co powoduje jego pęknięcie. Dlatego też, po obliczeniu wytrzymałości, ściskany pręt musi zostać sprawdzony i, jeśli to konieczne, należy przeprowadzić obliczenia pod kątem jego stabilności.

Zginanie spowodowane siłą wzdłużną nazywane jest **wzdłużnym lub wyboczeniem**.

Wartość siły ściskającej, przy której pręt może utracić stabilność, nazywana jest **siłą krytyczną** ( $F_{kr}$ ).

Równowaga może być stateczna, niestateczna i obojętna (rys. 2.27).

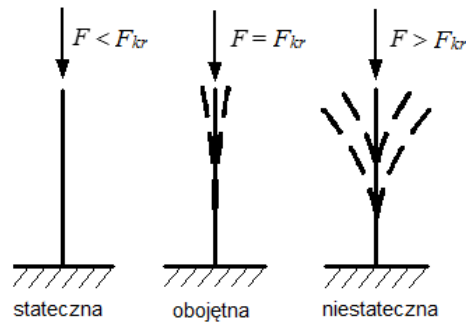
Wartość krytycznej siły ( $F_{kr}$ ) ściśniętego pręta o długości  $l$  jest obliczana zgodnie ze **wzorem Eulera**:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2}$$

gdzie  $E$  – moduł sprężystości podłużnej pręta;

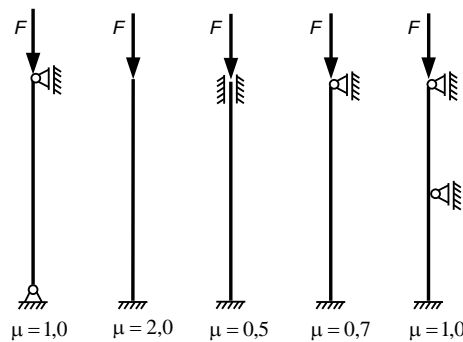
$J_{min}$  – najmniejszy osiowy moment bezwładności przekroju pręta;

$\mu$  – współczynnik redukcji długości (zależy od sposobu mocowania pręta).



Rys. 2.27. Rodzaje równowagi prętów

Wartości współczynnika  $\mu$  są dobierane z odpowiednich tabel. Na rys. 2.28 przedstawiono niektóre przypadki.



Rys. 2.28. Wartości współczynnika  $\mu$  dla wybranych przypadków

Aby spełnić warunek stabilności pręta ściskanego, z pewnym zapasem bezpieczeństwa, konieczne jest spełnienie następujących warunków

$$F < [F], \text{ gdzie } [F] = \frac{F_{kr}}{k_{st}},$$

gdzie  $k_{st}$  – współczynnik bezpieczeństwa.

### Naprężenia krytyczne. Smukłość pręta

Warunek stabilności w naprężeniach:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

Krytyczne naprężenia  $\sigma_{kr}$  obliczane są ze wzoru:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{min}},$$

$\lambda$  smukłość pręta (charakteryzuje sztywność przekroju);

$i = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$  – mniejszy z głównych promieni bezwładności przekroju

pręta (geometryczna charakterystyka przekroju);

$A$  – pole przekroju poprzecznego pręta.

Wzór Eulera można stosować pod warunkiem, że naprężenie krytyczne nie przekracza granicy proporcjonalności materiału:

$$\sigma_{kr} \leq \sigma_{pr} \text{ czyli } \sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq R_m$$

Z reguły warunek zastosowania wzoru Eulera wyraża się poprzez nierówność:

$$\lambda \geq \lambda_{gr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_m}},$$

gdzie  $\lambda_{gr}$  – graniczna smukłość pręta z danego materiału.

W odróżnieniu od smukłości pręta  $\lambda$ , która jest geometryczną charakterystyką, smukłość graniczna  $\lambda_{gr}$  zależy tylko od właściwości fizycznych i mechanicznych materiału pręta i nie zależy od jego wymiaru.

Dla pręta ze stali S215 ( $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $\sigma_r = 200$  MPa):

$$\lambda_{gr} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \cong 100$$

Oznacza to, że jeżeli pręt ze stali S215 będzie miał smukłość  $\lambda < 100$ , to zastosowanie wzoru Eulera dla obliczenia  $F_{kr}$  i  $\sigma_{kr}$  doprowadzi do uzyskania błędnego wyniku.

Z praktycznego doświadczenia zjawisko równowagi statecznej może mieć miejsce również przy naprężeniach, które przewyższają granicę proporcjonalności.

F.S. Jasinski przeprowadził praktyczne badania stabilności prętów poza granicą proporcjonalności i wyprowadził empiryczny wzór dla krytycznych naprężeń zależnych od smukłości pręta:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda + c\lambda,$$

gdzie  $a, b, c$  – empiryczne współczynniki, które mają wymiar naprężenia.

Dla plastycznych materiałów najczęściej przyjmuje się  $c = 0$  i wzór upraszcza się:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda$$

Wzory te znajdują zastosowanie do prętów, których smukłość znajduje się w granicach:

$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_{gr},$$

gdzie  $\lambda_0$  – smukłość, przy której  $\sigma_{kr}$  jest równe naprężeniu granicznemu  $\sigma_{gr}$ .

Dla plastycznego materiału  $\sigma_{gr}$  jest równe granicy plastyczności  $R_e$ , a dla kruchego – granicy wytrzymałości przy ściskaniu  $R_c$ . Dla smukłości  $\lambda < \lambda_0$ ,  $\sigma_{kr} = \sigma_{gr}$ , w tym przypadku pręta na wytrzymałość nie można sprawdzać.

Wartości empirycznych współczynników i smukłości  $\lambda_0$  i  $\lambda_{gr}$  dla niektórych materiałów przedstawiono w tabeli 2.8.

Tabela 2.8. Wartości współczynników empirycznych i smukłość dla wybranych materiałów

Materiał	$a$ , MPa	$b$ , MPa	$c$ , MPa	$\lambda_0$	$\lambda_{gr}$
Stal S215	310	1,14	0	61	100
Stal S275	350	1,15	0	57	90
Duraluminium A7	406	2,83	0	30	53
Żeliwo	776	12	0,053	10	80
Sosna	29,3	0,194	0	–	70

Krytyczna siła jest określana przez naprężenia  $\sigma_{kr}$  jak dla osiowego ściskania pręta:

$$F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A$$

### Promień bezwładności przekroju

W obliczeniach stabilności czasami wygodne jest stosowanie promienia bezwładności  $\rho$ :

$$\rho = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{J_{\min}}}{A}$$

Promień bezwładności charakteryzuje kształt przekroju i nie zależy od jego wymiarów. Im większe jest  $\rho$ , tym większa jest nośność ściśniętego pręta o tej samej powierzchni. W tabeli 2.9 przedstawiono wartości  $\rho$  dla niektórych przekrojów.

Tabela 2.9. Wartości współczynnika  $\rho$  dla niektórych przekrojów

Przekrój	$\rho$
Rurowy ( $c = \frac{d}{D} = 0,95 \div 0,8$ )	1,246 $\div$ 0,602
Rurowy ( $c = 0,7 \div 0,5$ )	0,482 $\div$ 0,364
Kątownik	0,5 $\div$ 0,3
Dwuteownikowy	0,41 $\div$ 0,27
Ceownikowy	0,41 $\div$ 0,29
Kwadratowy	0,289
Okrągły	0,283
Prostokątny	0,204

## Obliczenia stabilności za pomocą współczynnika redukcji naprężenia

Między dopuszczalnym naprężeniem ściskającym  $k$  a dopuszczalnym naprężeniem stabilności  $k_{st}$  istnieje zależność:

$$k_{st} = \varphi \cdot k,$$

gdzie  $\varphi$  – współczynnik redukcji dopuszczalnego naprężenia dla ściśniętego pręta.

Wartości współczynnika  $\varphi$  zostały obliczone dla prętów wykonanych z różnych materiałów w zależności od ich smukłości. W tabeli 2.10 przedstawiono te wartości.

Tabela 2.10. Wartości współczynnika  $\varphi$  dla wybranych materiałów w zależności od smukłości

Smukłość	Stale S215 i S235		Stal S275		Żeliwo		Drewno		Stale 17Mn4, 15GA, 13Mn6, S355J2	
	$\varphi$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	$\varphi$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	$\varphi$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	$\varphi$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$	$\varphi$	$\lambda/\sqrt{\varphi}$
0	1,00	0	1,00	0	1,00	0	1,00	0	1,00	0
10	0,99	10,05	0,98	10,10	0,97	10,15	0,99	10,05	0,98	10,10
20	0,97	20,31	0,96	20,41	0,91	20,97	0,97	20,31	0,95	20,52
30	0,95	30,78	0,93	31,11	0,81	33,33	0,93	31,11	0,92	31,28
40	0,92	41,70	0,89	42,40	0,69	48,15	0,87	42,88	0,89	42,40
50	0,89	53,00	0,85	54,23	0,57	66,23	0,80	55,90	0,84	54,56
60	0,86	64,70	0,80	67,08	0,44	90,45	0,71	71,21	0,78	67,93
70	0,81	77,78	0,74	81,37	0,34	120,15	0,60	90,37	0,71	83,08
80	0,75	92,38	0,67	97,74	0,26	156,9	0,48	115,5	0,63	100,8
90	0,69	108,4	0,59	117,2	0,20	201,3	0,38	146,0	0,54	122,5
100	0,60	129,1	0,50	141,4	0,16	250,0	0,31	179,6	0,46	147,4
110	0,52	152,5	0,43	167,8			0,25	220,0	0,39	176,1
120	0,45	178,9	0,37	197,3			0,22	255,8	0,33	208,9
130	0,40	205,6	0,32	229,8			0,18	306,4	0,29	241,4
140	0,36	233,3	0,28	264,6			0,16	350,0	0,25	280,0
150	0,32	265,2	0,25	300,0			0,14	400,9	0,23	312,8
160	0,29	297,1	0,23	333,6			0,12	461,9	0,21	349,1
170	0,26	333,4	0,21	371,0			0,11	512,6	0,19	390,0
180	0,23	375,3	0,19	413,0			0,10	569,2	0,17	436,6
190	0,21	414,6	0,17	460,8			0,09	633,3	0,15	490,6
200	0,19	458,8	0,15	516,4			0,08	707,1	0,13	555,1
210	0,17	509,3	0,14	561,3						
220	0,16	550,0	0,13	610,2						

Uwzględniając współczynnik  $\varphi$ , warunek wytrzymałości przyjmuje postać:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot k$$

Warunek stabilności pozwala przeprowadzać dwa rodzaje obliczenia ściśniętych prętów – weryfikacyjny i projektowy, oprócz tego pozwala obliczyć dopuszczalne obciążenie pręta.

### Obliczenia weryfikacyjne ściśniętych prętów

Naprężenia w pręcie są obliczane według wzoru:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Na podstawie znanych wymiarów i kształtu przekroju poprzecznego określany jest najmniejszy osiowy moment bezwładności i obliczany jest minimalny promień bezwładności:

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

Smukłość pręta:  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$

Określamy wartość współczynnika  $\varphi$  redukcji naprężenia z tabeli 2.10. Obliczamy dopuszczalne naprężenie zapewniające stabilność:

$$k_{st} = \varphi \cdot k$$

Sprawdzamy warunek:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq k_{st} = \varphi \cdot k$$

### Projektowe obliczenie stabilności ściśniętych prętów z zastosowaniem współczynnika $\varphi$

W obliczeniach projektowych zadaniem jest wybór kształtu przekroju poprzecznego, powierzchni i materiału pręta w oparciu o znane obciążenie i długość pręta. Warunek ten zawiera dwie nieznanne wartości –  $\varphi$  i  $A$ . Dlatego pręty są obliczane metodą kolejnych przybliżeń.

1. Dla pierwszego przybliżenia wartość współczynnika  $\varphi$  przyjmujemy:

$$\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$$

2. Obliczamy pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta:

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot k}$$

Przyjmujemy kształt przekroju i obliczamy minimalny promień bezwładności przy znanej powierzchni:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

4. Obliczamy smukłość przy znanych sposobach mocowania jego końców:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$$

5. Znając smukłość obliczeniową  $\lambda$ , z tabeli 2.10 wybieramy dokładną wartość współczynnika  $\varphi'_1$ .

6. Obliczamy dopuszczalne naprężenia stabilności:

$$k_{st} = \varphi'_1 \cdot k$$

7. Porównujemy obliczeniowe naprężenia w pręcie  $\sigma_{ob} = \frac{F}{A}$  i dopuszczalne naprężenia stabilności  $k_{st}$ :

$$\frac{\sigma_{ob} - k_{st}}{k_{st}} \leq \eta = 0,05$$

gdzie  $\eta$  dokładność przeprowadzonych obliczeń (z reguły dokładność wynosi  $\eta = \pm 0,05$  albo  $\pm 5\%$ ).

8. Jeżeli warunek z p.7 jest spełniony, to zadanie projektowego obliczenia jest rozwiązane. W przypadku braku spełnienia warunku całe obliczenia powtarzamy dla nowej wartości  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$  aż do momentu spełnienia warunku z p.7. Zwykle trzeba przeprowadzić trzy-cztery obliczenia do momentu spełnienia warunku  $\eta = \pm 0,05$ .

## Przykłady obliczeń

**Przykład 2.15.** Sprawdzić stabilność pręta o długości  $l = 2,5$  m i średnicy zewnętrznej przekroju  $D = 76$  mm, wewnętrznej  $d = 64$  mm. Pręt z jednej strony jest oparty, z drugiej nieruchomo zamocowany. Wartość siły ściskającej  $F = 150$  kN, materiał stal chromowo-molibdenowa ( $k_r = 540$  MPa,  $E = 2,15 \cdot 10^5$  MPa), współczynnik zapasu stabilności  $k_{st} = 3,5$ .

### Rozwiązanie

Określamy graniczną smukłość podanego materiału:

$$\lambda_{gr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_m}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,15 \cdot 10^{11}}{540 \cdot 10^6}} = 63$$

Dla określenia smukłości pręta ( $\lambda$ ) obliczamy osiowy moment bezwładności jego przekroju:

$$J_{min} = J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3,14}{4} (76^4 - 64^4) = 81,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 81,4 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^4$$

Pole przekroju poprzecznego:

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (76^2 - 64^2) = 1319 \text{ mm}^2$$

Promień bezwładności przekroju:

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{81,4 \cdot 10^4}{1319}} = 24,8 \text{ mm}$$

Obliczamy smukłość pręta, przyjmując współczynnik  $\mu = 0,7$ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{24,8} = 70,7$$

Ponieważ smukłość pręta jest większa niż smukłość graniczna ( $\lambda > \lambda_{gr}$ ), to siłę krytyczną wyznaczamy ze wzoru Eulera:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,15 \cdot 10^{11} \cdot 81,4 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,5)^2} = 564 \cdot 10^3 \text{ N} = 564 \text{ kN}$$

Określamy współczynnik zapasu stabilności i porównujemy z zadaniem  $k_{st}$ :

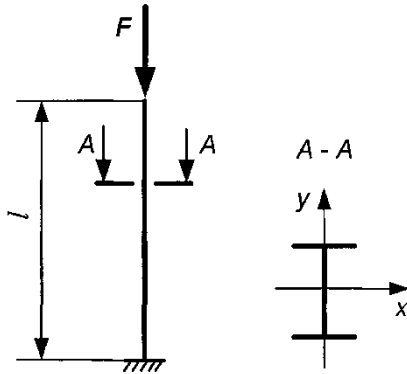
$$k_{st} = \frac{F_{st}}{F} = \frac{564}{150} = 3,76 > 3,5$$

*Wniosek:* stabilność pręta jest zapewniona.

**Przykład 2.16.** Sprawdzić stabilność kolumny stalowej obciążonej jak na rys. 2.29, o przekroju dwuteownika I20, o wysokości 1,5 m, zamocowanej z jednej strony, jeśli:  $F = 160$  kN,  $k_{st} = 1,5$ , materiał kolumny S215 z  $R_e = 240$  MPa,  $n = 1,045$ .



### Rozwiązanie



Rys. 2.29. Schemat kolumny do przykładu 1

Z tabeli D.59 dla dwuteownika I20 wypisujemy niezbędne do obliczeń geometryczne charakterystyki:

$$A = 26,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$
$$J_y = J_{min} = 115 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$
$$i_{min} = i_y = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Obliczamy smukłość pręta, przyjmujemy współczynnik  $\mu = 2$  (rys. 2.28).

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{2,07 \cdot 10^{-2}} = 145$$

Obliczamy wartości współczynnika  $\varphi$ , wykorzystując wzór interpolacji liniowej:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1)$$

Ze względu na to, że  $\lambda = 145$ , z tabeli 2.10 wybieramy (materiał kolumny – S215)

$$\lambda_1 = 140 \quad \varphi_1 = 0,36$$

$$\lambda_2 = 150 \quad \varphi_2 = 0,32$$

$$\varphi_{145} = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{150 - 140} (145 - 140) = 0,34$$

Obliczamy dopuszczalne naprężenia dla S215:

$$k = \frac{\sigma_{0,2}}{n} = \frac{210}{1,045} = 230 \text{ MPa}$$

W przypadku braku współczynnika bezpieczeństwa  $n$ , wartości  $k$  przyjmujemy z tabeli D.2.

Obliczamy dopuszczalne naprężenia:

$$k_{st} = \varphi \cdot k = 0,34 \cdot 230 = 78,2 \text{ MPa}$$

Obliczamy działające naprężenia w stali:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{160 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 59,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 59,7 \text{ MPa}$$

Ponieważ naprężenia w kolumnie są mniejsze od dopuszczalnych

$$59,7 \text{ MPa} < k = 78,2 \text{ MPa},$$

to stabilność kolumny jest zapewniona.

Obliczamy wartość siły krytycznej dla zadanej kolumny. Ponieważ smukłość kolumny  $\lambda = 145 > \lambda_{gr} = 100$ , to dla obliczenia  $\sigma_{kr}$  stosujemy wzór Eulera:

$$F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}}{145^2} 26,8 \cdot 10^{-4} = 2,64 \cdot 10^5 = 264 \text{ kN}$$

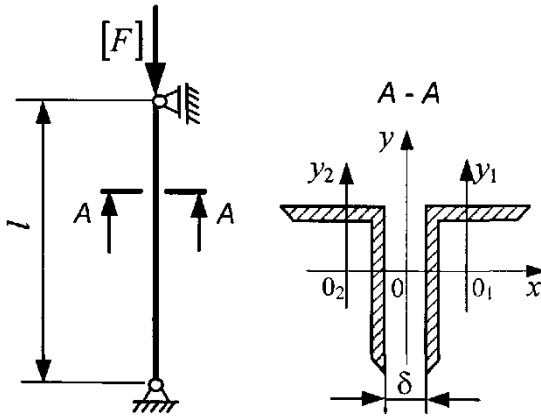
Współczynnik bezpieczeństwa kolumny:

$$k_{st} = \frac{F_{kr}}{F} = \frac{264}{160} = 1,65$$

Ponieważ  $k_{st} = 1,65 \geq 1,5$ , to stabilność kolumny jest zapewniona.

*Wniosek:* Stabilność kolumny jest zapewniona.

**Przykład 2.17.** Określić dopuszczalne obciążenie  $[F]$  na pręt (rys. 2.30) zbudowany dwóch kątowników ( $110 \times 70 \times 8$ ) przy:  $l = 3,4$  m;  $k = 190$  MPa;  $\delta = 12$  mm; materiał – stal S275.



*Rozwiązanie*

Przy zastosowaniu warunku stabilności dla wartości dopuszczalnej siły  $[F]$ , mamy:

$$[F] = \varphi \cdot k \cdot A$$

Dla obliczenia  $\varphi$  trzeba określić smukłość  $\lambda$ , co z kolei wymaga obliczenia minimalnego promienia bezwładności  $i_{min}$  dla danego przekroju poprzecznego pręta.

Rys. 2.30. Schemat pręta do przykładu 2.17

Wykorzystując dane z tabeli D.61 dla jednego kątownika  $10 \times 70 \times 8$  (mm):

$$J_{x_1} = 172 \text{ cm}^4; J_{y_1} = 54,6 \text{ cm}^4$$

$$A_1 = 13,9 \text{ cm}^2, x_0 = 1,64 \text{ cm}.$$

Względem głównych centralnych osi  $x_0y_0$  przekroju mamy:

$$J_x = 2J_{x_1} = 2 \cdot 172 = 344 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2 \cdot \left[ J_{y_1} + \left( x_0 + \frac{\delta}{2} \right) A_1 \right] = 2 \cdot [54,6 + (1,64 + 0,6) \cdot 2 \cdot 13,9] = 249 \text{ cm}^4$$

Ponieważ  $J_y < J_x$ , to minimalny promień bezwładności:

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{2A_1}} = \sqrt{\frac{249}{2 \cdot 13,9}} = 2,99 \text{ cm} = 2,99 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Smukłość pręta:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 3,4}{2,99 \cdot 10^{-2}} = 114$$

Biorąc pod uwagę to, że  $\lambda = 114$ , z tabeli 2.10 przypisujemy (materiał kolumny – stal S275)

$$\lambda_1 = 110; \varphi_1 = 0,43$$

$$\lambda_2 = 120; \varphi_2 = 0,37$$

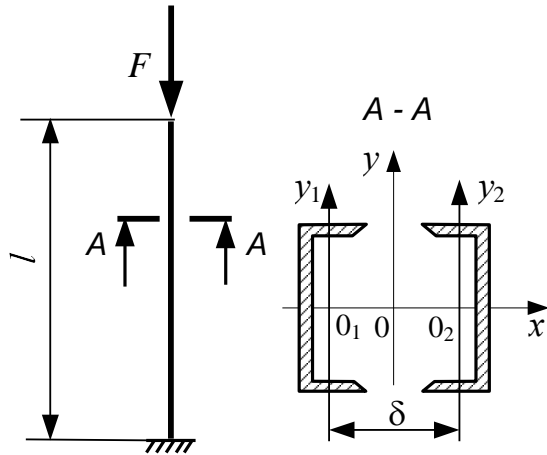
$$\varphi_{114} = 0,43 - \frac{0,43 - 0,37}{120 - 110} (114 - 110) = 0,406$$

Dopuszczalna wartość siły:

$$[F] = 0,406 \cdot 190 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 13,9 \cdot 10^{-4} = 2144,5 \cdot 10^2 \text{ N} = 214,45 \text{ kN}$$

**Przykład 2.18.** Dla kolumny zbudowanej z dwóch ceowników (rys. 2.31) dobrać ich wymiary i odległość  $\delta$ , korzystając z warunku stabilności kolumny względem głównych osi przekroju przy:

$F = 400 \text{ kN}$ ,  $l = 6,6 \text{ m}$ , dla materiału S235  $R_e = 260 \text{ MPa}$ ,  $n = 1,18$ .



Rys. 2.31. Schemat kolumny do przykładu 2.18

### Rozwiązanie

Osobliwością zaprojektowanej kolumny jest fakt, że w odniesieniu do głównej osi  $x$  moment bezwładności odcinka zależy tylko od wymiarów ceowników, a w odniesieniu do osi  $y$  moment bezwładności zależy zarówno od wymiarów ceowników, jak i wielkości  $\delta$  ich rozsuwu, tj.

$$J_x = 2J_{x_1}, \quad J_y = 2(J_{y_1} + a^2A),$$

gdzie  $A$  – pole przekroju po-

przecznego jednego ceownika;

$a = \delta/2$  – współrzędna środka ciężkości dla danej osi.

Wtedy z warunku stabilności kolumny w dwóch głównych płaszczyznach układamy równanie:  $J_x = J_y$  albo  $2J_{x_1} = 2(J_{y_1} + a^2A)$ , skąd

$$a = \sqrt{\frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{A}}$$

Określamy dopuszczalne naprężenie dla S235

$$k = \frac{R_e}{n} = \frac{210}{1,18} = 220 \text{ MPa}$$

Przy braku współczynnika bezpieczeństwa  $n$ , wartości  $[\sigma]$  przyjmujemy z tabeli D.2.

Wymiary ceowników dobieramy metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmujemy jako pierwsze przybliżenie  $\varphi_1 = 0,5$  i obliczamy pole przekroju poprzecznego kolumny, w oparciu o warunek stabilności w płaszczyźnie  $yOz$ , w której moment bezwładności zależy tylko od rodzaju ceownika:

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot k} \geq \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 220 \cdot 10^6} \geq 36,36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 36,36 \text{ cm}^2$$

Ponieważ kolumna składa się z dwóch ceowników, obliczeniowe pole powierzchni jednego ceownika powinno spełniać warunek:

$$A_1 \geq \frac{36,36}{2} \geq 18,18 \approx 18,2 \text{ cm}^2$$

Z tabeli D.58 dobieramy ceownik C16, dla którego spisujemy charakterystyki:

$$A = 18,1 \text{ cm}^2, i_{min} = 6,42 \text{ cm}$$

Dodatkowo uwzględniamy, że dla kolumny składającej się z dwóch ceowników promień bezwładności względem osi  $x$  będzie równy promieniowi bezwładności jednego ceownika, ponieważ:

$$i_x = \sqrt{\frac{2J_{x1}}{2A}} = \sqrt{\frac{J_{x1}}{A}} = 6,42 \text{ cm}$$

Obliczamy smukłość kolumny w płaszczyźnie  $y_0z$ :

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 6,6}{6,42 \cdot 10^{-2}} = 71,96 \approx 72$$

Z tabeli 2.10 znajdujemy skorygowaną wartość współczynnika  $\varphi'_1$  (materiał S235):

$$\begin{aligned} \lambda = 70, \varphi &= 0,81, \\ \lambda = 80, \varphi &= 0,75 \end{aligned}$$

Wtedy dla  $\lambda = 72$  mamy:

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} (72 - 70) = 0,798$$

Ponieważ  $\varphi_1$  i  $\varphi'_1$  istotnie się różnią, przeprowadzamy obliczenia w drugim przybliżeniu, przyjmując

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,798}{2} = 0,65$$

Obliczamy pole powierzchni kolumny i pole powierzchni jednego ceownika:

$$A \geq \frac{400 \cdot 10^3}{0,65 \cdot 220 \cdot 10^6} \geq 27,97 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 28 \text{ cm}^2, \quad A_1 \geq \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

Z tabeli D.58 wybieramy ceownik C14, dla którego wypisujemy charakterystyki:

$$A = 15,6 \text{ cm}^2, i_{min} = 5,6 \text{ cm}$$

Obliczamy smukłość kolumny:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 6,6}{5,6 \cdot 10^{-2}} = 82,5$$

Obliczamy skorygowane wartości współczynnika  $\varphi'_2$  (materiał S235):

$$\begin{aligned} \lambda = 80, \varphi &= 0,75, \\ \lambda = 90, \varphi &= 0,69 \end{aligned}$$

Wtedy dla  $\lambda = 82,5$  mamy:

$$\varphi'_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} (82,5 - 80) = 0,78$$

Ponieważ  $\varphi'_2 \gg \varphi_2$ , to przechodzimy do trzeciego przybliżenia:

$$\varphi_3 = \frac{0,6 + 0,78}{2} = 0,715$$

$$A \geq \frac{400 \cdot 10^3}{0,715 \cdot 220 \cdot 10^6} \geq 25,43 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 25,43 \text{cm}^2$$

$$A_1 \geq \frac{25,43}{2} = 12,7 \text{cm}^2$$

Z tabeli D.58 wybieramy ceownik C12, dla którego:

$$A = 13,3 \text{cm}^2, i_{min} = 4,78 \text{cm}$$

Obliczamy smukłość kolumny:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 6,6}{4,78 \cdot 10^{-2}} = 96,55$$

Obliczamy skorygowane wartości współczynnika  $\varphi'_3$  (materiał stal S235):

$$\lambda = 90, \varphi = 0,69$$

$$\lambda = 100, \varphi = 0,60$$

Wtedy dla  $\lambda = 96,55$  mamy:

$$\varphi'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} (96,55 - 90) = 0,68$$

Sprawdzamy spełnienie warunku wytrzymałości w trzecim przybliżeniu.

W tym celu obliczamy naprężenia w pręcie i naprężenia dopuszczalne:

$$k'''_{st} = \varphi'_3 \cdot k = 0,68 \cdot 220 = 149 \text{MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{400 \cdot 10^3}{2 \cdot 13,3 \cdot 10^{-4}} = 150,4 \cdot 10^6 = 150,4$$

Porównując  $k$  i  $k'''_{st}$  ustalamy, że nadmiar w kolumnie wynosi:

$$\eta = \frac{150,4 - 149,6}{149,6} \cdot 100\% = +0,53\% < [5\%]$$

Wynika z tego, że warunek wytrzymałości kolumny w płaszczyźnie  $y_0z$  będzie spełniony, jeżeli będzie ona składać się z dwóch ceowników C12.

Po określeniu rozmiarów ceowników w jednej płaszczyźnie, obliczamy wielkość rozsuwu  $\delta$  w płaszczyźnie  $x_0z$ . Z tabeli D.58 wybieramy niezbędne dodatkowe dane:

$$J_{x_1} = 304 \text{cm}^4;$$

$$J_{y_1} = 31,2 \text{cm}^4$$

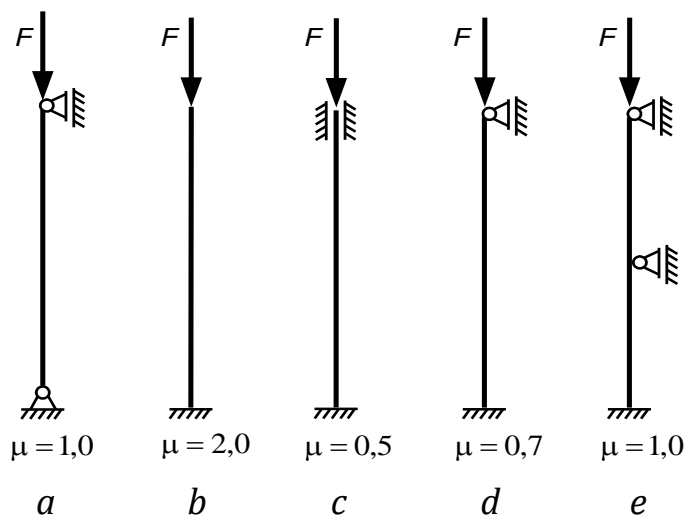
Obliczamy wielkość rozstawu  $\delta$  ceowników kolumny:

$$\delta = 2a = 2 \cdot \sqrt{\frac{J_{x_1} s - J_{y_1}}{A}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{304 - 31,2}{13,3}} = 9,06 \text{cm}$$

*Odpowiedź:* Z warunku równej wytrzymałości kolumny w dwóch płaszczyznach, kolumna powinna być wykonana z dwóch ceowników C12 rozsuniętych na odległość  $\delta = 9,06 \text{cm}$ .

## Zadania do samodzielnej pracy (obliczeniowe)

**Zadanie 2.10.** Dobrać wymiary przekroju ściśniętego stalowego pręta i odległość rozsuwu  $\delta$ , z warunku wytrzymałości, za pomocą obliczenia współczynnika  $\varphi$  (rys. 2.32, Tabela 2.11).



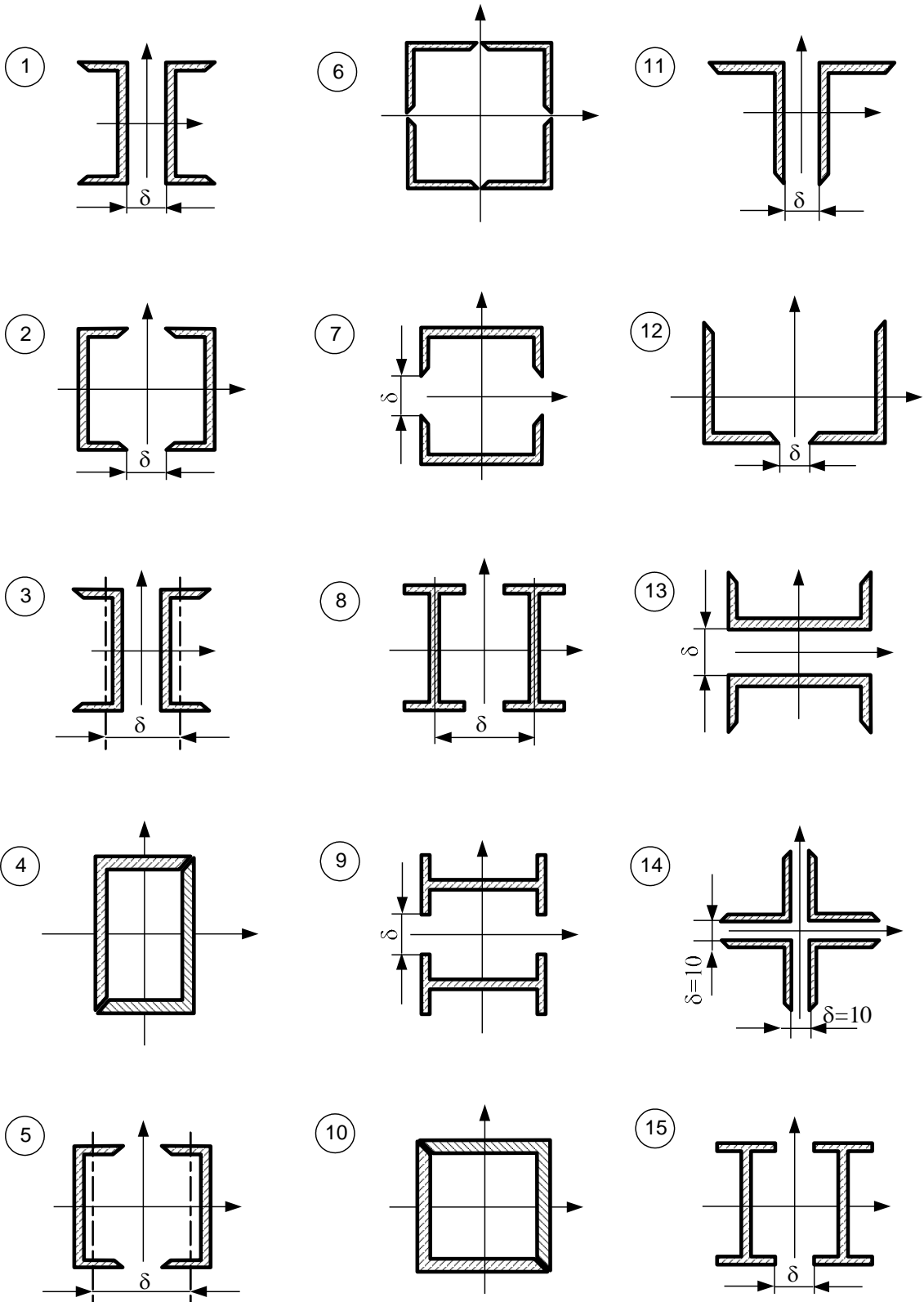
Rys. 2.32. Schematy prętów do zadania 2.10

Tabela 2.11. Dane wejściowe do zadania 2.10

Nr war.	Schemat obliczeniowy	Schemat mocowania $\mu$ (rys. 2.32)	Siła ściskająca $F$ , kN	Długość pręta $l$ , m	Materiał - stal
1	2	<i>a</i>	280	3,0	S215
2	8	<i>b</i>	300	4,8	S275
3	1	<i>c</i>	450	5,0	S215
4	3	<i>b</i>	350	5,5	S235
5	5	<i>c</i>	350	3,6	S235
6	9	<i>a</i>	400	5,0	S215
7	10	<i>d</i>	200	2,8	S275
8	4	<i>b</i>	350	3,0	S235
9	6	<i>c</i>	260	3,6	S215
10	11	<i>e</i>	400	6,5	S275
11	15	<i>b</i>	500	4,8	S215
12	7	<i>a</i>	360	2,8	S215
13	4	<i>c</i>	420	4,8	S275
14	15	<i>e</i>	280	3,0	S215

Nr war.	Schemat obliczeniowy	Schemat mocowania $\mu$ (rys. 2.32)	Siła ściskająca $F$ , kN	Długość pręta $l$ , m	Materiał - stal
15	6	$d$	340	2,8	S235
16	13	$a$	380	4,8	S235
17	12	$b$	280	2,5	S215
18	9	$c$	450	2,8	S275
19	7	$d$	380	5,8	S215
20	1	$e$	360	4,0	S275
21	5	$d$	300	3,0	S235
22	15	$c$	550	3,8	S215
23	2	$s$	380	3,5	S235
24	5	$e$	380	2,8	S275
25	10	$b$	280	2,6	S215
26	3	$d$	350	3,5	S235
27	8	$a$	400	4,0	S215
28	14	$e$	340	4,8	S275
29	9	$c$	420	3,0	S235
30	1	$b$	400	3,6	S215
31	13	$d$	370	5,0	S235
32	8	$b$	430	2,8	S275
33	7	$e$	340	2,8	S275
34	12	$c$	360	3,5	S235
35	14	$a$	300	3,6	S215
36	3	$b$	440	3,0	S275
37	4	$e$	650	6,0	S215
38	15	$d$	380	2,5	S275
39	9	$a$	420	5,0	S235
40	5	$c$	360	3,8	S275

### Schematy do obliczeń do zadania 2.10





## ROZDZIAŁ III CZĘŚCI MASZYN

### 3.1. Obliczanie konstrukcji spawanych

#### Wiadomości ogólne

Złącza spawane są połączeniami trwałymi.

**Spawanie** – proces uzyskania połączenia trwałego poprzez siły oddziaływania międzycząsteczkowego w wyniku ogólnego albo lokalnego nagrzewania.

Spośród wielu różnych rodzajów spawania spawanie łukiem elektrycznym, spawanie oporowe i spawanie gazowe są najczęściej stosowane w inżynierii mechanicznej.

#### Rodzaje połączeń spawanych

**Połączenia spawane** – połączenia utworzone w wyniku spawania.

Połączenia spawane są **mocne i szczelne**.

W zależności od konstrukcji (względnego położenia łączonych elementów) wyróżnia się m.in. połączenia **doczołowe, narożne, zakładkowe i nakładkowe**.

Podstawowe rodzaje połączeń spawanych wykonanych poprzez spawanie łukiem elektrycznym są znormalizowane. Połączenia spawane wykonane za pomocą ręcznego spawania łukiem elektrycznym są regulowane przez normę PN-EN ISO 15614. W połączeniach spawanych można stosować spoiny czołowe i pachwinowe.

#### Podstawowe wzory obliczeniowe

*Głównym kryterium jakości spoin jest jej wytrzymałość.* Obliczenie wytrzymałości opiera się na założeniu, że naprężenia w spoinie rozkładają się równomiernie zarówno wzdłuż długości, jak i przekroju. W postaci ogólnej warunek wytrzymałości dla spoin czołowych i pachwinowych można zapisać:

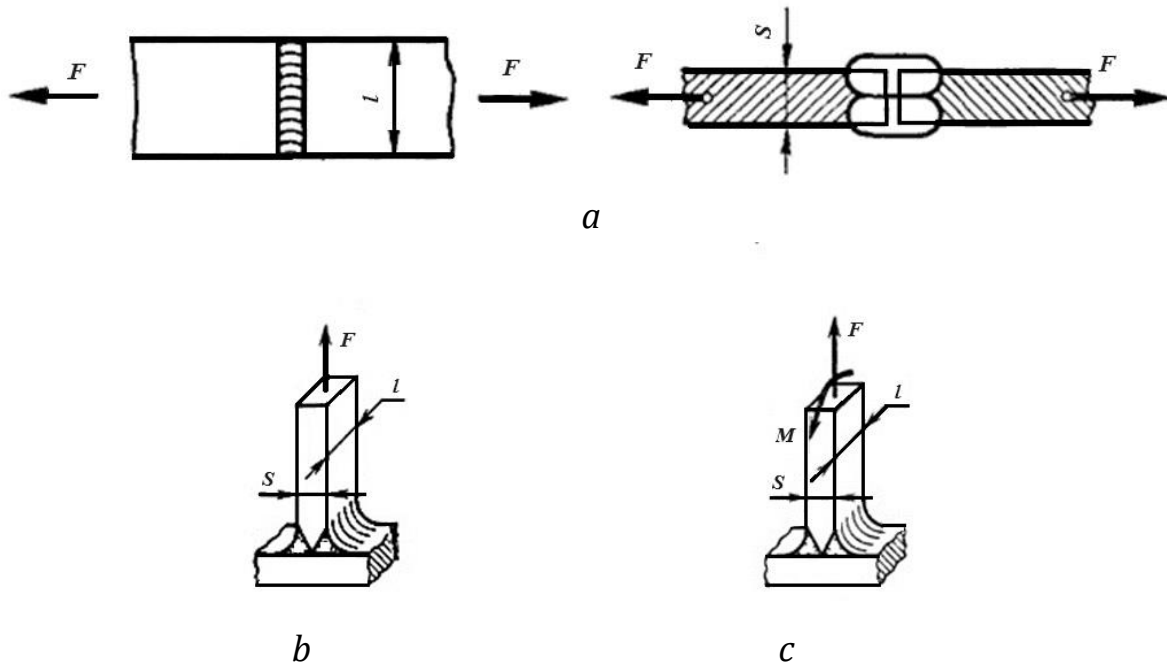
$$\sigma \leq k'_{r(c)}$$

$$\tau \leq k'_t$$

gdzie  $k'_{r(c)}$  – dopuszczalne naprężenia spoiny czołowej, na rozciąganie (ściskanie), MPa;

$k'_t$  – dopuszczalne naprężenia ścinające spoiny pachwinowej, MPa.

**Spoiny czołowe** (rys. 3.1, a) oblicza się w przekroju łączonych części bez uwzględnienia pogrubienia spoiny.



Rys. 3.1. Siły występujące w spoinach:  
 a – czołowych - rozciągające;  
 b – pachwinowych z obrobionymi krawędziami - rozciągające;  
 c – pachwinowych - rozciągające i moment zginający.

**Warunek wytrzymałości spoiwa na rozciąganie (ściskanie)** (rys. 3.1, a, b)

$$\sigma = \frac{F}{sl} \leq k'_{r(c)},$$

gdzie  $F$  – obciążenie, N;

$s$  – grubość łączonych elementów, mm;

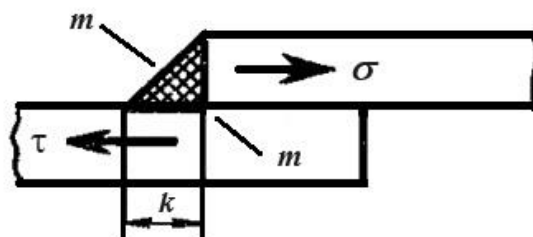
$l$  – długość spoiny, mm;

$k'_{r(c)}$  – dopuszczalne naprężenia dla spoiny czołowej przy rozciąganiu (ściskaniu), MPa.

**Warunek wytrzymałości spoiny obciążonej jednocześnie siłą rozciągającą i momentem zginającym** (rys. 3.1, c)

$$\sigma = \frac{F}{sl} + \frac{M_u}{W_s} = \frac{F}{sl} + \frac{6M_u}{sl^2} \leq k'_{r(c)}$$

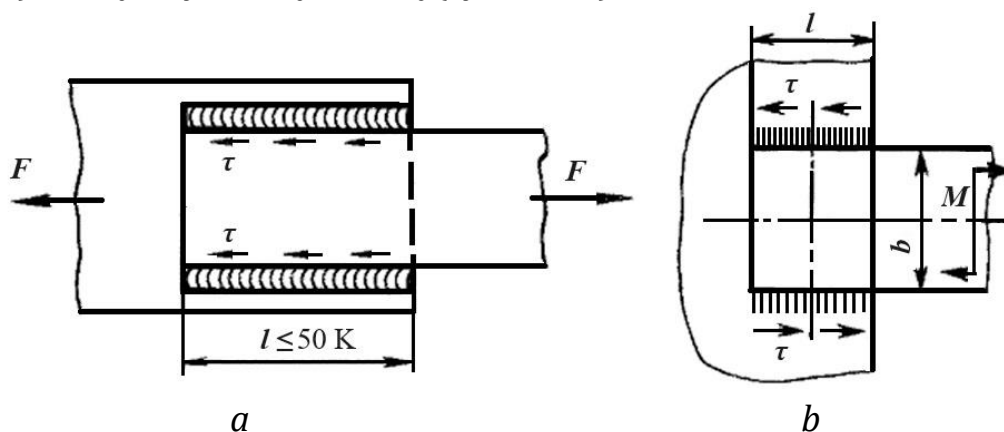
**Spoiny pachwinowe** oblicza się na ścinanie. Zniszczenie spoin pachwinowych odbywa się w najmniejszym przekroju poprzecznym, przechodzącym przez dwusieczną kąta prostego (rys. 3.2) albo blisko niej.



Rys. 3.2. Schemat spoiny pachwinowej i sił, występujących w niej

### Obliczenie spoin kołnierzowych

a) obciążonych siłą osiową (rys. 3.3, a)



Rys. 3.3. Siły występujące w spoinie kołnierzowej:

a – obciążonej siłą osiową; b – obciążonej siłą osiową i momentem zginającym

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{F}{2l\beta k} \leq k'_t$$

albo dopuszczalne obciążenie spoiny

$$F \leq 2l\beta k k'_t$$

gdzie  $\beta$  – współczynnik, charakteryzujący głębokość przetopienia;

$k$  – przyprostokątna spoiny, mm. Za przyprostokątną spoiny ( $k$ ) przyjmuje się mniejszą przyprostokątną trójkąta wpisanego w przekrój spoiny. Przy takiej samej grubości łączonych elementów przyprostokątna spoiny jest **równa grubości łączonych elementów**,  $k = \delta$ . Przy różnej grubości spawanych elementów przyprostokątna spoiny jest równa **najmniejszej grubości części**. Ze względów technologicznych **minimalna wartość przyprostokątnej – 3 mm, maksymalna – 20 mm**;

$l$  – długość spoiny, mm ( $l_k \leq 50 \div 60k$ );

$k'_t$  – dopuszczalne naprężenia styczne spoiny pachwinowej, MPa;

$\beta k l$  – przekrój obliczeniowego przekroju spoiny, mm<sup>2</sup>.

Do wielościegowego spawania automatycznego i półautomatycznego oraz spawania ręcznego  $\beta = 0,7$ ; dla dwu- i trzyściegowego spawania półautomatycznego  $\beta = 0,8$ ; dla spawania automatycznego o tych samych parametrach  $\beta = 0,9$ ; dla jednościegowego spawania automatycznego  $\beta = 1,1$ ;

b) obciążonych momentem zginającym (rys. 3.3, b)

Dla spoin, w których  $l < b$ , warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{M}{\beta k l b} \leq k'_t,$$

gdzie  $b$  – szerokość blachy, mm.

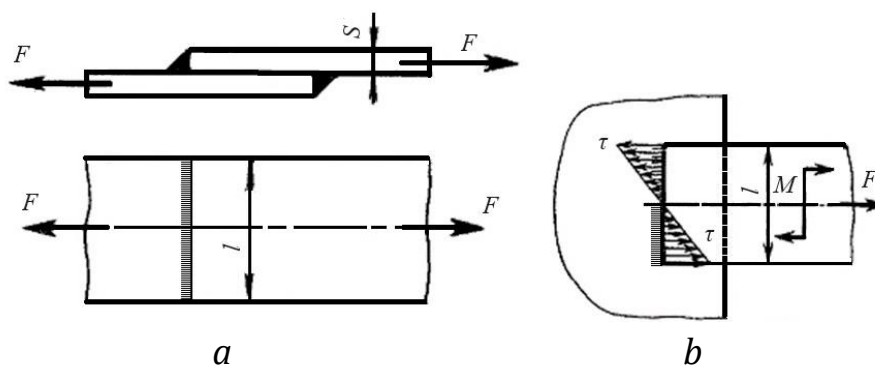
### Obliczenie spoin na zakładkę

a) obciążonych osiowo (rys. 3.4, a)

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{F}{\beta k l} \leq k'_t,$$

gdzie  $l$  – długość spoiny spawanej, mm, jeżeli spoina jest wykonana z jednej strony;  $2l$  – jeżeli spoinę wykonano z dwóch stron.



Rys. 3.4. Schemat sił i momentów występujących w spoinie na zakładkę: a – obciążonej siłą osiową; b – obciążonej momentem zginającym

b) obciążonych momentem zginającym (rys 3.4, b – bez  $F$ )

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{M}{W_s} = \frac{6M}{\beta k l^2} \leq k'_t,$$

gdzie  $W_{oc} = \frac{\beta k h^2}{6}$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju szwu.

c) obciążonych siłą osiową i momentem gnącym (rys. 3.4, b)

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{6M}{\beta k l^2} + \frac{F}{\beta k l} \leq k'_t$$

## Obliczenie spoin kombinowanych

*Spoiny kombinowane* stosowane są w przypadku, gdy prosta spoina kątowna (czołowa, pachwinowa, kołnierzowa) nie zapewnia wymaganej wytrzymałości spoiny.

Spoiny kombinowane oblicza się na podstawie zasady rozkładu obciążenia proporcjonalnie do nośności poszczególnych połączeń.

a) obliczenie spoiny kombinowanej obciążonej siłą osiową (rys. 3.5, a)

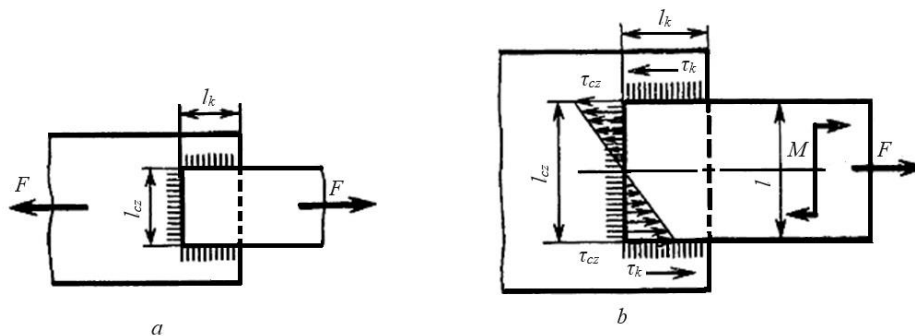
Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{F}{\beta k(2l_k + l_{cz})} \leq k'_t$$

b) obliczenie spoiny kombinowanej obciążonej momentem zginającym (rys. 3.5, b – bez  $F$ )

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \frac{M}{(\beta k l_k l_{cz} + \beta k l_k^2 / 6)} \leq k'_t$$



Rys. 3.5. Rozkład sił w spoinach kombinowanych:

a – obciążonych siłą osiową;

b – obciążonych momentem zginającym

c) obliczenie spoin kombinowanych obciążonych siłą osiową i momentem zginającym (rys. 3.5, b)

Warunek wytrzymałości

$$\tau = \tau_M + \tau_F \leq k'_t$$

$$\tau_M = \frac{M}{(\beta k l_k l_{cz} + \beta k l_k^2 / 6)}$$

$$\tau_F = \frac{F}{\beta k(2l_k + l_{cz})}$$

gdzie  $l_k, l_{cz}$  – długości spoin szczelinowej i czołowej, mm.

Przy obciążeniu *profilu niesymetrycznych*, na przykład kątownika (rys. 3.6), obciążenie przechodzi przez środek masy profilu. W przypadku

równomiernego obciążenia spoin ich długość jest odwrotnie proporcjonalna do odległości spoiny od linii występowania obciążenia.

Więc

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{a}{b}$$

Ponieważ całkowita długość spoin  $L = l_1 + l_2$ , to

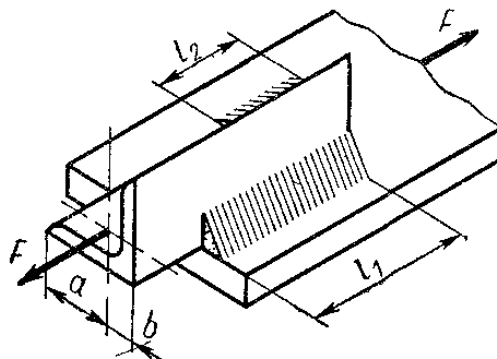
$$l_1 = l \frac{a}{a+b}; \quad l_2 = l \frac{b}{a+b}$$

z równania statyki wynika obciążenie przegubów:

$$F_1 = F \frac{a}{a+b}; \quad F_2 = F \frac{b}{a+b}$$

Dla równobocznego profilu kąтового można z grubsza założyć, że  $F_1 = 0,7F$  i  $F_2 = 0,3F$ , wtedy z warunku wytrzymałości długość spoin wynosi:

$$l_1 = \frac{F_1}{\beta \cdot k \cdot k'_t}; \quad l_2 = \frac{F_2}{\beta \cdot k \cdot k'_t}$$



Rys. 3.6. Spoiny kołnierzowe w połączeniach elementów asymetrycznych obciążonych siłą osiową

Przy obciążeniu spoiny pachwinowej momentem skręcającym (spawane koła zębate, pasowe, łańcuchowe, sprzęgła, bębny, wały itp. – rys. 3.7, a) warunek wytrzymałości przyjmie postać:

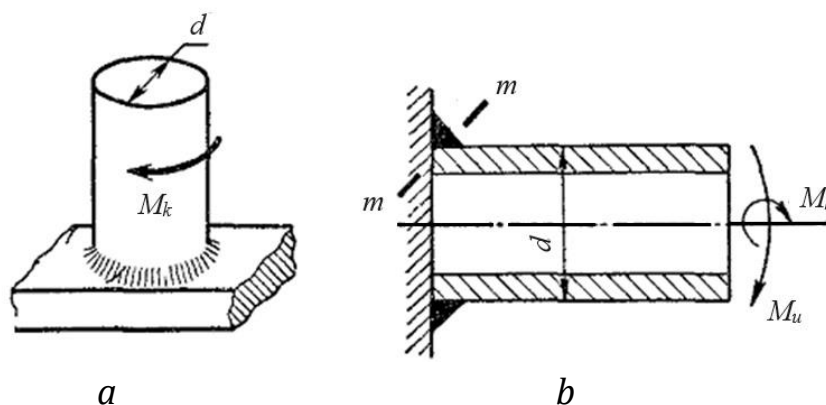
$$\tau = \frac{2T}{\beta k \pi d^2} \leq k'_t$$

Przy obciążeniu spoiny pachwinowej momentem skręcającym (rys. 3.7, b) i zginającym warunek wytrzymałości przyjmie postać:

$$\tau = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_g^2} \leq k'_t,$$

gdzie  $\tau_s = \frac{2T}{\beta k \pi d^2}$

$$\tau_g = \frac{M_u}{W_p} \approx \frac{4M_4}{\beta k \pi d^2}$$



Rys. 3.7. Schemat obliczeń spoiny kołnierzowej:  
 a – obciążonej momentem skręcającym;  
 b – obciążonej momentem skręcającym i zginającym

Warunek wytrzymałości połączeń spawanych wykonanych punktowo metodą spawania łukowego (rys. 3.8) przyjmie postać:

$$\tau = \frac{4F}{\pi d^2 z i} \leq k'_t$$

gdzie  $z$  – liczba punktów spawania;  $i$  – liczba płaszczyzn ścinania. Dla konstrukcji z rys. 3.8,  $a - z = 4, i = 1$ ; z rys. 3.8,  $b - z = 2, i = 2$ .

Średnica punktu spawanego:

$$d = 1,2s + 4 \text{ mm przy } s < 3 \text{ mm};$$

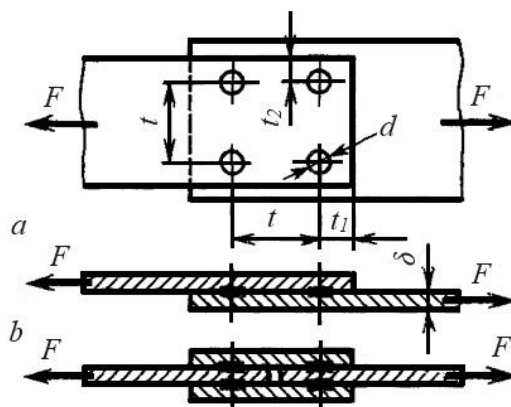
$$d = 1,5s + 5 \text{ mm przy } s > 3 \text{ mm}.$$

Odległości pomiędzy krawędziami  $t_1$  i  $t_2$  są znormalizowane z uwzględnieniem czynników technologicznych i energetycznych. Zwykle przyjmują

$$t = 3d; t_1 = 2d; t_2 = 1,5d$$

Połączenie punktowe charakteryzuje się wysoką koncentracją naprężeń, dlatego też niezbyt dobrze sprawdza się przy zmiennych obciążeniach. Koncentracje naprężeń powstają nie tylko w punktach spawania, ale także w samych częściach w strefie spawania.

Połączenia zgrzewane punktowo są często używane nie jako połączenia robocze, które przenoszą główne obciążenie, ale jako połączenia wiążące.

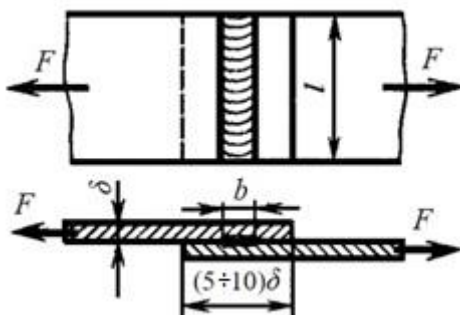


Rys. 3.8. Schemat obliczeń spawania punktowego:  
*a* – na zakładkę;  
*b* – z przekładaniem

Dla *ciągłego spawania kontaktowego* (rys. 3.9) warunek wytrzymałości przyjmie postać:

$$\tau = \frac{F}{bl} \leq k'_t$$

gdzie *b* – szerokość spoiny spawanej, mm.



Rys. 3.9. Schemat obliczeń spawania kontaktowego

Wartości dopuszczalnych naprężeń zależą od: rodzaju spawania, typu elektrody, rodzaju spoiny, materiału elementów, charakteru obciążenia. Dopuszczalne naprężenia przy statycznym obciążeniu dobiera się z tabeli D.3.



## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.1.** Sprawdzić wytrzymałość spoiny czołowej (rys. 3.1, a) wykonanej elektrodą typu E34, E42, E42A, z oddziałującą na nią ciągłą siłą rozciągającą  $F = 65$  kN, szerokość pasm  $b = 100$  mm, grubość  $s = 5$ , materiał pasm stal S215 z  $k_r = 160$  MPa.

*Dane:*

Typ elektrody

E34, E42, E42A

$F = 65$  kN

$b = 100$  mm

$s = 5$  mm

materiał – stal S215

obciążenie ciągłe

*Szukane:*

$\sigma - ?$

### *Rozwiązanie*

1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla spoiny, uwzględniając to, że oddziałujące na połączenie obciążenie wywołuje w spoinie naprężenia rozciągające, z tabeli D.3 dla S215 i podanych typów elektrod wypisujemy:

$$E34: k_r' = 0,75k_r = 0,75 \cdot 160 = 120 \text{ MPa};$$

$$E42: k_r' = 0,9k_r = 0,9 \cdot 160 = 144 \text{ MPa};$$

$$E42A: k_r' = k_r = 160 \text{ MPa}.$$

2. Sprawdzamy warunek wytrzymałości

Przyjmujemy  $b = l = 100$  mm.

$$\sigma = \frac{F}{s \cdot l} = \frac{65 \cdot 10^3}{5 \cdot 100} = 130 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 130 \text{ MPa}$$

Obliczone wartości porównujemy z dopuszczalnym:

E34:  $130 \text{ MPa} > k_r' = 120 \text{ MPa}$  – warunek nie jest spełniony;

E42:  $130 \text{ MPa} < k_r' = 144 \text{ MPa}$  – warunek jest spełniony;

E42A:  $130 \text{ MPa} < k_r' = 160 \text{ MPa}$  – warunek jest spełniony.

*Wniosek:* Warunek wytrzymałości jest spełniony dla połączeń powstałych za pośrednictwem elektrod typów E42 i E42A.

**Przykład 3.2.** Sprawdzić wytrzymałość spoiny czołowej zakładkowej (rys. 3.10), wykonanej spawaniem łukowym ręcznym elektrodą E50. Siła osiowa  $F = 40$  kN, spoina została wykonana po jednej stronie, grubość płyt  $s_1 = 5$  mm;  $s_2 = 10$  mm; materiał płyt stal S215 z  $k_r = 160$  MPa; szerokość płyt  $b_1 = 100$  mm;  $b_2 = 400$  mm.

*Dane:*

Typ elektrody E50

$F = 40 \text{ kN}$

$b_1 = 100 \text{ mm}$

$b_2 = 400 \text{ mm}$

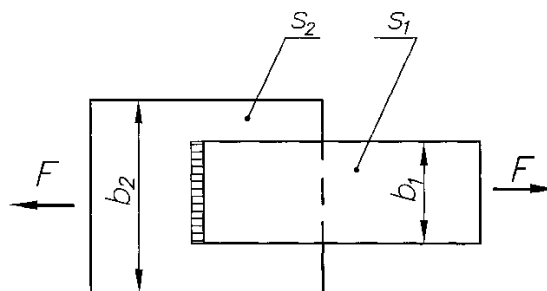
$s_1 = 5 \text{ mm}$

$s_2 = 10 \text{ mm}$

materiał – stal S215

$k_r = 160 \text{ MPa}$

obciążenie ciągłe



*Szukane:*

$\tau - ?$

Rys. 3.10. Schemat do obliczeń spoiny czołowej do przykładu 3.2

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla spoiny.

Uwzględniając to, że oddziałujące w spoinie obciążenie wywołuje naprężenia rozciągające, z tab. D.2 dla S215 wypisujemy

$$k'_t = 0,6k_c = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ MPa}$$

2. Sprawdzamy warunek wytrzymałości spoiny

Przyjmujemy przyprostokątną spoiny równą najmniejszej grubości płyty  $k = s_1 = 5 \text{ mm}$ ; długość spoiny przyjmujemy  $l = b_1 = 100 \text{ mm}$ ; dla ręcznego spawania lukowego współczynnik przetopienia  $\beta = 0,7$ .

$$\tau = \frac{F}{\beta kl} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 5 \cdot 100} = 114 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 114 \text{ MPa} > k'_t = 96 \text{ MPa}$$

Warunek nie jest spełniony.

*Wniosek:* Spoina nie zapewni wytrzymałości połączenia spawanego.

**Przykład 3.3.** Sprawdź wytrzymałość spoiny czołowej (rys. 3.7, b), wykonanej bez obróbki krawędzi, ręcznym spawaniem lukowym elektrodami E42. Złącze obciążone jest momentem obrotowym  $T = 1500 \text{ Nm}$ , obciążenie jest stałe, średnica rury  $d = 273 \text{ mm}$ , grubość ścianki  $s = 7 \text{ mm}$ , materiał rury stal C10.

*Dane:*

Typ elektrody E42

$T = 1500 \text{ Nm}$

$d = 273 \text{ mm}$

$s = 7 \text{ mm}$

materiał – stal C10

$R_e = 220 \text{ MPa}$

obciążenie ciągłe

*Szukane:*

$\tau - ?$

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenie dla spoiny.

W przypadku spoiny czołowej wykonanej bez obróbki krawędzi, pod wpływem momentu obrotowego występują naprężenia ścinające.

Dla stali C10, zgodnie z tabelą D.2, przyjmujemy  $R_m = 210$  MPa i określamy dopuszczalne naprężenie. Przyjmujemy  $n = 1,5$  (patrz uwaga w tabeli D.3), obliczamy

$$k_r = \frac{R_m}{n} = \frac{210}{1,5} = 140 \text{ MPa}$$

Z tabeli D.3  $k'_t = 0,6R_m = 0,6 \cdot 140 = 84$  MPa.

2. Sprawdzamy wytrzymałość spoiny.

Przyjmujemy długość po przekątnej spoiny równą grubości ścianki rury

$$k = s = 7 \text{ mm}$$

dla spawania ręcznego łukowego współczynnik przetopienia  $\beta = 0,7$ ;

moment w N · m przekształcamy na Nmm

$$T = 1500 \text{ Nm} = 1500 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\tau = \frac{2T}{\beta k \pi d^2} = \frac{2 \cdot 1500 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 7 \cdot 3,14 \cdot 273^2} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2,6 \text{ MPa} < k'_t = 84 \text{ MPa}$$

Warunek jest spełniony.

*Wniosek:* Spoina zapewni wytrzymałość złącza spawanego.

**Przykład 3.4.** Określić dopuszczalne obciążenie, które może wytrzymać złącze na zakładkę (rys. 3.4, a), wykonane metodą spawania ręcznego łukowego elektrodą E42, materiał taśmy stalowej S215 o  $k_r = 160$  MPa, spoina wykonana z obu stron, szerokość płyty  $b = 100$  mm, grubość płyty  $s_1 = 6$  mm,  $s_2 = 8$  mm. Obciążenie ciągłe.

*Dane:*

Typ elektrody E42

$b = 100$  mm

grubość płyty

$s_1 = 6$  mm

$s_2 = 8$  mm

$k_r = 160$  MPa

materiał – stal S215

*Szukane:*

$[F] - ?$

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenie dla spoiny.

Biorąc pod uwagę, że działające obciążenie w spoinie powoduje naprężenia ścinające, korzystając z tabeli D.3 dla stali S215, określamy:

$$k'_t = 0,6k_r = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ MPa}$$

2. Określamy dopuszczalne naprężenia.

Z góry ustalamy długość przyprostokątnej spoiny równą mniejszej z dwóch grubości blachy:  $k = s_1 = 6 \text{ mm}$ ; długość spoiny jest określona przez  $l = 2b = 200 \text{ mm}$ ; dla ręcznego spawania łukowego elektrody współczynnik przetopienia to  $\beta = 0,7$ .

Z warunku wytrzymałości

$$\tau = \frac{F}{\beta kl} \leq k'_t$$

$$[F] \leq k'_t \beta kl = 0,7 \cdot 96 \cdot 6 \cdot 200 = 80640 \text{ N}$$

*Odpowiedź:*  $[F] \leq 80640 \text{ N}$ .

**Przykład 3.5.** Obliczyć długość spoiny kombinowanej (rys. 3.5, a) na zakładkę, wykonanej ręcznym spawaniem łukowym elektrodami E42, przy stałym obciążeniu  $F = 78 \text{ kN}$ , grubość płyt  $s_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $s_2 = 10 \text{ mm}$ , materiał taśmy stalowej S15 o  $k_r = 160 \text{ MPa}$ , szerokość płyt  $b_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $b_2 = 150 \text{ mm}$ .

*Dane:*

Typ elektrody E42

$F = 78 \text{ kN}$

$b_1 = 100 \text{ mm}$

$b_2 = 150 \text{ mm}$

$s_1 = 5 \text{ mm}$

$s_2 = 10 \text{ mm}$

materiał – stal S215

$k_r = 160 \text{ MPa}$

obciążenie stałe

$\beta = 0,7$

*Szukane:*

$l_{og} - ?$

*Rozwiązanie*

1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla spoiny.

Biorąc pod uwagę, że obciążenie działające w spoinie powoduje naprężenia ścinające, z tabeli D.3 dla S215

$$k'_t = 0,6k_r = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ MPa}$$

2. Z warunku wytrzymałości określamy długość spoiny.

Z góry ustalamy długość kątową spoiny równą mniejszej z dwóch grubości blachy, czyli  $k = s_1 = 5 \text{ mm}$ , a dla ręcznego spawania łukowego przyjmujemy współczynnik przetopienia

Z warunku wytrzymałości  $\tau = \frac{F}{\beta k l} \leq k'_t$ , mamy

$$l_{og} \geq \frac{F}{\beta k k'_t} = \frac{78 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 5 \cdot 96} = 232 \text{ mm}$$

Odpowiedź:  $l_{og} \geq 232 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.6.** Określić długość spoin łączących kątownik  $75 \times 75 \times 8$  (rys. 3.11). Obciążenie osiowe rozciągające zmienne  $F = 138 \text{ kN}$ , charakterystyka cyklu  $R = -1$ . Ręczne spawanie łukiem elektrycznym elektrodą E50A. Materiał kątownika i skosu stal S215 z  $k_r = 160 \text{ MPa}$ .

*Dane:*

kątownik  $74 \times 7 \times 5 \times 8$

typ elektrody E50A

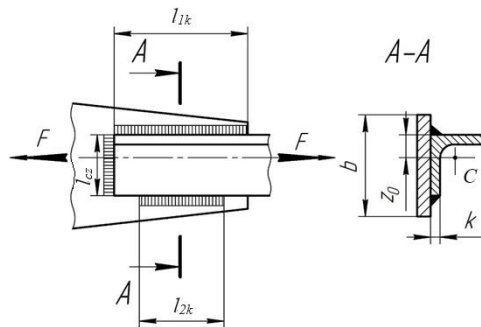
$F = 65 \text{ kN}$

$R = -1$

materiał – stal S215

$k_r = 160 \text{ MPa}$

obciążenie zmienne



*Szukane:*

$l_k - ?$   $l_{cz} - ?$

Rys. 3.11. Schemat obliczanych spoin do przykładu 3.6

### Rozwiązanie

1. Dla zmniejszenia długości zakładki między kątownikiem a skosem używamy połączonej spoiny narożnej z normalnym przekrojem.

Z tabeli D.60 wypisujemy dla kątownika odległość środka ciężkości do krawędzi  $z_0 = 21,5 \text{ mm}$ .

2. Określamy dopuszczalne naprężenia dla spoiny

Z tabeli D.3 dla spoin kątowych przy obciążeniu zmiennym (tabela D.3)

$$k'_t = \gamma 0,65 k_t$$

Współczynnik uwzględniający wpływ zmiennego obciążenia jest określany za pomocą wzoru:

$$\gamma = \frac{1}{(0,6K_{ef} + 0,2) - (0,6K_{ef} - 0,2)R}$$

Z tabeli D.4  $K_{ef} = 3,5$  (mniej korzystny wariant), wtedy

$$\gamma = \frac{1}{(0,6 \cdot 3,5 + 0,2) - (0,6 \cdot 3,5 - 0,2) \cdot (-1)} = 0,23$$

Więc

$$k'_t = \gamma 0,65 k_r = 0,23 \cdot 0,65 \cdot 160 = 24 \text{ MPa}$$

3. Z warunku wytrzymałości określamy obliczeniową długość wszystkich spoin.

Przyprostokątną spoiny przyjmujemy równą grubości boku kątownika

$$k = s = 8 \text{ mm}$$

Dla ręcznego spawania łukiem elektrycznym współczynnik przetopienia

$$\beta = 0,7$$

Z warunku wytrzymałości

$$\tau = \frac{F}{\beta k l} \leq k'_t \text{ mamy } l_{og} \geq \frac{F}{\beta k k'_t} = \frac{65 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 8 \cdot 24} = 484 \text{ mm}$$

4. Określamy wymiary spoin:

a) przyjmujemy długość spoiny czołowej równej szerokości kątownika

$$l_{cz} = b = 75 \text{ mm}$$

b) sumaryczna długość spoin bocznych

$$l_b = l_{og} - l_{cz} = 484 - 75 = 409 \text{ mm}$$

c) długość spoiny bocznej (wykorzystujemy zasadę dźwigni)

$$l_{k2} = l_{k1} \frac{z_0}{b} = 409 \cdot \frac{21,6}{75} = 117,25 \text{ mm}$$

wtedy

$$l_{b1} = l_b - l_{b2} = 409 - 117,25 = 291,75 \text{ mm}$$

Biorąc pod uwagę słabą jakość spoiny na końcu i początku, przypisujemy:

$$l_{b2} = 130 \text{ mm}; l_{b1} = 310 \text{ mm} < l_{bmax} = 50 \div 60 k = 400 \div 480 \text{ mm}$$

W rzeczywistości profil narożny jest często spawany całkowicie wzdłuż konturu dopasowania.

*Odpowiedź:*  $l_{cz} = 75 \text{ mm}; l_{k2} = 130 \text{ mm}; l_{k1} = 310 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.7.** Obliczyć wspornik i spoinę (patrz rys. 3.5, b)  $F = 10 \text{ kN}$ ,  $M = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , Obciążenie statyczne, grubość blachy  $s = 12 \text{ mm}$ . Materiał blachy – stal S215. Spawanie – ręczne elektrodą E42.

*Dane:*

typ elektrody E42

$F = 10 \text{ kN}$

$M = 8 \text{ kNm}$

materiał – S215

obciążenie statyczne

*Szukane:*

$b - ? l_b - ? l_{cz} - ?$

*Rozwiązanie*

1. Z tabeli D.2 przyjmujemy dla stali S215  $k_r = 160 \text{ MPa}$ .

2. Uwzględniając tylko podstawowe obciążenie (moment zginający), z warunku wytrzymałości określamy szerokość wspornika. Wartości momentu Nm przekształcamy w Nmm, stąd  $M = 8 \text{ kNm} = 8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$ .

Z warunku wytrzymałości  $\sigma = \frac{M}{W_{oc}} = \frac{6M}{sb^2} \leq k_r$  mamy

$$b \geq \sqrt{\frac{6M}{s \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 8 \cdot 10^6}{12 \cdot 160}} = 158 \text{ mm}$$

Z uwzględnieniem obciążenia  $F$  przyjmujemy  $b = 165 \text{ mm}$ .

3. Sprawdzamy wytrzymałość przy sumarycznym obciążeniu

$$\sigma = \frac{6M}{sb^2} + \frac{F}{sb} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10^6}{12 \cdot 165^2} + \frac{10^4}{12 \cdot 165} \approx 152 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 152 \text{ MPa} < k_r = 160 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałości jest spełniony.

4. Wyznaczamy dopuszczalne naprężenia dla spoiny

Z tabeli D.3

$$k'_t = 0,6k_r = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ MPa}$$

5. Określamy wymiary spoiny

Przyjmujemy  $l_{cz} = b = 165 \text{ mm}$ ,  $k = s = 12 \text{ mm}$ .

Na podstawie warunków wytrzymałościowych z góry określamy długość spoiny czołowej, tylko zgodnie z obciążeniem głównym

$$l_{cz} = \frac{6M - \beta k l_{cz}^2 k'_t}{6\beta k l_{cz} k'_t} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10^6 - 0,7 \cdot 12 \cdot 165^2 \cdot 96}{6 \cdot 0,7 \cdot 12 \cdot 165 \cdot 96} = 33 \text{ mm}$$

Biorąc pod uwagę słabą jakość spoiny na końcu i na początku, ostatecznie przyjmujemy długość spoiny bocznej  $l_b = 50 \text{ mm}$ .

6. Sprawdzamy wytrzymałość spoin po obciążeniu sumarycznym

$$\tau_F = \frac{F}{\beta k (2l_k + l_{cz})} = \frac{10^4}{0,7 \cdot 12 (2 \cdot 50 + 165)} = 4,5 \text{ N/mm}^2 = 4,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_M = \frac{M}{(\beta k l_b l_{cz} + \beta k l_{cz}^2 / 6)} = \frac{8 \cdot 10^6}{(0,7 \cdot 12 \cdot 50 \cdot 165 + 0,7 \cdot 12 \cdot 165^2 / 6)} \approx 75 \text{ N/mm}^2 = 75 \text{ MPa}$$

$$\tau = \tau_F + \tau_M = 4,5 + 75 = 80 \text{ MPa} < k'_{zer} = 96 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałości jest spełniony.

*Odpowiedź:*  $b = 165 \text{ mm}$ ;  $l_b = 50 \text{ mm}$ ;  $l_{cz} = 165 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.8.** Obliczyć połączenie spawane punktowo (rys. 3.8, a). Obciążenie zmienne ( $R = -0,5$ ),  $F = 3 \text{ kN}$ , grubość blachy  $s = 3 \text{ mm}$ , materiał – stal C10 ( $R_{-1} = 160 \text{ MPa}$ ).

*Dane:*

zgrzewanie oporowe punktowe

*Szukane:*

Połączenie – ?

$$F = 3 \text{ kN}$$

$$R = -0,5$$

materiał – stal C10

$$R_{-1} = 160 \text{ MPa}$$

obciążenie zmienne

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla blachy.

Przyjmujemy  $n = 1,5$  (tabela D.3) obliczamy

$$k_r = \frac{R_{-1}}{n} = \frac{160}{1,5} = 107 \text{ MPa}$$

2. Określamy współczynnik uwzględniający obciążenie zmienne.  
Z tabeli D.4  $K_{ef} = 7,5$ .

$$\gamma = \frac{1}{(0,6K_{ef} + 0,2) - (0,6K_{ef} - 0,2)R} = \frac{1}{(0,6 \cdot 7,5 + 0,2) - (0,6 \cdot 7,5 - 0,2)(-0,5)} = 0,146$$

3. Określamy dopuszczalne naprężenia dla blachy.

$$k = \gamma k_r = 0,146 \cdot 107 = 15,6 \text{ MPa}$$

4. Z warunku wytrzymałości na rozciąganie określamy szerokość blachy.

$$b = \frac{F}{s \cdot k} = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 15,6} = 64 \text{ mm}$$

przyjmujemy  $b = 65 \text{ mm}$ .

5. Określamy wymiary spoiny:

a) średnica punktu  $d = 1,2s + 4 = 1,2 \cdot 3 + 4 = 7,6 \text{ mm}$ . Przyjmujemy  $d = 8 \text{ mm}$ ;

b) krok  $t = 3d = 3 \cdot 8 \text{ mm}$ ; odległość pomiędzy krawędziami

$$t_1 = 2d = 2 \cdot 8 = 16 \text{ mm}; t_2 = 1,5d = 1,5 \cdot 8 = 12 \text{ mm};$$

c) liczba punktów z warunku wytrzymałości.

Z góry określamy dopuszczalne naprężenia dla punktów spawania z uwzględnieniem oddziaływania obciążenia zmiennego z tabeli D.3, mamy

$$k'_t = \gamma \cdot 0,6k_r = 0,146 \cdot 0,6 \cdot 107 = 9,4 \text{ MPa}$$

Liczba płaszczyzn tnących  $i = 1$

$$z = \frac{4F}{\pi d^2 k'_t \cdot i} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8^2 \cdot 9,4 \cdot 1} = 6,35$$

Przyjmujemy liczbę punktów w dwóch rzędach  $z = 8$ .

6. Ostatecznie określamy szerokość blachy

$$b = 3t + 2t_1 = 3 \cdot 24 + 2 \cdot 16 = 104 \text{ mm}$$

przyjmujemy  $b = 105 \text{ mm}$ .

**Odpowiedź:**  $b = 65 \text{ mm}$ ;  $t = 24 \text{ mm}$ ;  $t_1 = 16 \text{ mm}$ ;  $t_2 = 12 \text{ mm}$ ;  $z = 8$ .



## Zadania do samodzielnego wykonania (obliczeniowe)

**Zadanie 3.1.** Sprawdzić wytrzymałość spoiny (rys. 3.5, *a*), na którą oddziałuje siła rozciągająca, spoina została wykonana z jednej strony. Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Dane wejściowe do zadania 3.1

Nr war.	Obciążenie, kN	Długość spoiny, mm	Grubość blach, mm		Szerokość górnej blachy, mm	Elektroda	Stal
	$F$	$l$	$s_1$	$s_2$	$b$		
1	70	100	5	6	80	E50A	C10
2	60	120	6	8	100	E42	S215
3	50	115	6	6	120	E42A	09G2S
4	80	125	5	6	80	E50A	C10
5	90	135	8	6	85	E42	S215
6	113	155	8	8	125	E42A	09G2S
7	143	145	8	10	142	E50A	C10
8	135	165	6	8	150	E42	S215
9	132	185	8	6	130	E42A	09G2S
10	128	135	8	8	135	E50A	C10
11	151	140	8	10	160	E42	S215
12	154	125	6	8	155	E42A	09G2S
13	130	135	8	6	165	E50A	C10
14	140	100	8	8	180	E42	S215
15	150	120	8	10	170	E42A	09G2S
16	160	115	6	8	200	E50A	C10
17	135	125	8	6	185	E42	S215
18	125	135	8	8	125	E42A	09G2S
19	140	155	8	10	120	E50A	C10
20	165	145	10	8	185	E42	S215
21	155	165	8	8	210	E42A	09G2S
22	156	185	8	6	190	E50A	C10
23	174	135	8	8	145	E42	S215
24	185	140	8	10	135	E42A	09G2S
25	166	125	10	8	165	E50A	C10
26	138	135	8	8	155	E42	S215
27	144	100	8	6	145	E42A	09G2S
28	153	120	6	8	200	E50A	C10
29	164	115	8	6	160	E42	S215
30	136	125	6	8	180	E42A	09G2S

**Zadanie 3.2.** Określić długość spoin, które łączą teownik do podstawy (rys. 3.11). Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 2.3.

Tabela 3.2. Dane wejściowe do zadania 3.2

Nr war.	Obciążenie, kN	Rozmiar teownika, mm	Elektroda	Materiał	Charakter obciążenia
	$F$	$b \times b \times s$			
1	70	45 × 45 × 3	E50A	C10	Zmienne (R = -0,5)
2	60	50 × 50 × 4	E42	S215	Stałe
3	50	56 × 56 × 5	E42A	09G2S	Zmienne (R = -0,6)
4	80	63 × 63 × 6	E50A	C10	Stałe
5	90	56 × 36 × 3,5	E42	S215	Zmienne (R = -0,7)
6	113	63 × 63 × 6	E42A	09G2S	Stałe
7	143	70 × 70 × 5	E50A	C10	Zmienne (R = -0,55)
8	135	80 × 80 × 6	E42	S215	Stałe
9	132	75 × 75 × 7	E42A	09G2S	Zmienne (R = -0,58)
10	128	63 × 63 × 4	E50A	C10	Stałe
11	151	80 × 80 × 5,5	E42	S215	Zmienne (R = -0,85)
12	154	90 × 90 × 6	E42A	09G2S	Stałe
13	130	63 × 40 × 4	E50A	C10	Zmienne (R = -0,8)
14	140	70 × 45 × 4,5	E42	S215	Stałe
15	150	75 × 50 × 5	E42A	09G2S	Zmienne (R = -0,9)
16	160	90 × 56 × 6	E50A	C10	Stałe
17	135	50 × 50 × 4	E42	S215	Zmienne (R = -1)
18	125	56 × 56 × 5	E42A	09G2S	Stałe
19	140	63 × 63 × 6	E50A	C10	Zmienne (R = -0,95)
20	165	56 × 36 × 3,5	E42	S215	Stałe
21	155	63 × 63 × 6	E42A	09G2S	Zmienne (R = -0,78)
22	156	70 × 70 × 5	E50A	Stal C10	Stałe
23	174	50 × 50 × 4	E42	S215	Zmienne (R = -0,85)
24	185	56 × 56 × 5	E42A	09G2S	Stałe
25	166	63 × 63 × 6	E50A	C10	Zmienne (R = -0,75)
26	138	56 × 36 × 3,5	E42	S215	Stałe
27	144	63 × 63 × 6	E42A	09G2S	Zmienne (R = -0,6)
28	153	70 × 70 × 5	E50A	C10	Stałe
29	164	80 × 80 × 5,5	E42	S215	Zmienne (R = -0,7)
30	136	90 × 90 × 6	E42A	09G2S	Stałe

**Zadanie 3.3.** Obliczyć połączenie punktowe (rys. 3.8, a). Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3. Dane wejściowe do zadania 3.3

Nr war.	Obciążenie, kN	Grubość blachy, mm	Materiał blachy	Charakter obciążenia
	$F$	$s$		
1	7	3	C10	Stałe
2	6	4	S215	Zmienne ( $R = -0,5$ )
3	5	5	09G2S	Stałe
4	8	6	C10	Zmienne ( $R = -0,4$ )
5	9	3	S215	Stałe
6	6,3	4	09G2S	Zmienne ( $R = -0,3$ )
7	4,3	5	C10	Stałe
8	3,5	6	S215	Zmienne ( $R = -0,2$ )
9	3,2	3	09G2S	Stałe
10	2,8	4	C10	Zmienne ( $R = -0,6$ )
11	5,1	5	S215	Stałe
12	5,4	6	09G2S	Zmienne ( $R = -0,7$ )
13	3	3	C10	Stałe
14	4	4	S215	Zmienne ( $R = -0,8$ )
15	5	5	09G2S	Stałe
16	6	6	C10	Zmienne ( $R = -0,9$ )
17	3,5	3	S215	Stałe
18	2,5	4	09G2S	Zmienne ( $R = -1$ )
19	4	5	C10	Stałe
20	6	6	S215	Zmienne ( $R = -0,75$ )
21	5	3	09G2S	Stałe
22	6	4	C10	Zmienne ( $R = -0,85$ )
23	7	5	S215	Stałe
24	5	6	09G2S	Zmienne ( $R = -0,65$ )
25	6	3	C10	Stałe
26	3,8	4	S215	Zmienne ( $R = -0,55$ )
27	4	5	09G2S	Stałe
28	3	6	C10	Zmienne ( $R = -0,5$ )
29	4	3	S215	Stałe
30	6	4	09G2S	Zmienne ( $R = -0,95$ )

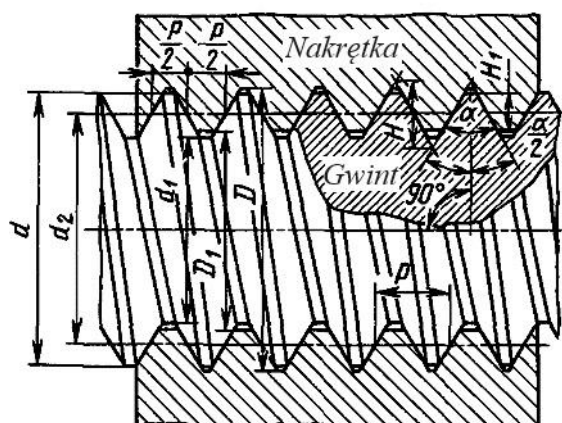
## 3.2. Obliczanie połączeń gwintowych

### Wiadomości ogólne

**Połączenia gwintowe** to rozłączne połączenia wykonane za pomocą gwintów bezpośrednio nałożonych na łączone części lub gwintowanych elementów złącznych, takich jak: śruby, wkręty, kołki, nakrętki.

### Podstawowe parametry gwintów

Podstawowymi parametrami gwintu (rys. 3.12) są:



Rys. 3.12. Podstawowe parametry gwintu

**Średnica gwintu** (śruby i nakrętki): **zewnętrzna** – nominalna średnica gwintu  $d, D$ ; **środkowa**  $d_2, D_2$ , tj. średnica wyobrazonego cylindra, podstawa którego przecina gwint w miejscu, gdzie szerokość występu jest równa szerokości bruzdy (jeżeli wartość nie jest podana w tabeli, można ją określić według wzoru:  $d_2 = \frac{(d+d_1)}{2}$ ); **wewnętrzna**  $d_1, D_1$ . Średnicę śruby, jako części zamkniętej, oznaczano przez litery małe, średnicę wkrętu, jako części zamkniętej – przez litery duże.

Najważniejszą cechą gwintu jest *skok gwintu*  $p (t, S)$  – odległość między dwoma sąsiednimi zwojami gwintu mierzona równoległe do osi śruby.

*Profil gwintu* to profil występu i bruzdy w płaszczyźnie jego przekroju środkowego.

*Kąt profilu*  $\alpha$  – kąt między sąsiednimi bokami gwintu w przekroju osiowym.

Profil gwintu charakteryzuje również:

a) *wysokość początkowego trójkąta gwintu  $H$* , czyli trapezu którego wierzchołki są utworzone przez punkty przecięcia przedłużonych profili gwintu;

b) *wysokość robocza profilu gwintu  $H_{1(h)}$*  – wzdłuż której stykają się boki gwintu śruby i nakrętki;

*Skok gwintu  $Ph(S_1)$*  – odległość między dwoma sąsiednimi zwojami gwintu mierzona równoległe do osi śruby; lub inaczej – przesunięcie osiowe po jednym obrocie śruby  $t$  (rys. 3.12):

dla pojedynczego gwintu  $S_1 = S$ ,

dla wieloprzebiegowego  $S_1 = zS$ , gdzie  $z$  – liczba zwojów gwintu.

*Kąt wzniosu linii śrubowej  $\varphi$*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{\pi d_2} \quad \text{albo} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{p}{\pi d_2},$$

gdzie  $\varphi$  – kąt wzniosu linii śrubowej w stopniach.

Parametry te można rozpatrywać w sposób ogólny, ponieważ wszystkie profile mają wspólne elementy i można je uzyskać poprzez zmianę kąta profilu, jego wysokości i promienia krzywizny. Na przykład, zmniejszając kąt profilu  $\alpha$ , można przejść od gwintu trójkątnego do trapezowego, a następnie do prostokątnego. Gwinty z powodu posiadania przerw nie mogą być używane jako elementy centrujące.

Wszystkie geometryczne parametry gwintów i ich tolerancje są znormalizowane.

### **Klasy wytrzymałości gwintowanych elementów łączących**

Stalowe śruby i wkręty, zgodnie z normą PN-EN ISO 898-2:2023-03, produkuje się w **12 klasach** wytrzymałości: 3.6, 4.6, 4.8, 5.6, 5.8, 6.6, 6.8, 6.9, 8.8, 10.9, 12.9, 14.9 (w kolejności zwiększenia wytrzymałości). Klasa wytrzymałości jest oznaczana jako dwie liczby rozdzielone kropką. Pierwsza liczba pomnożona przez 100 wskazuje minimalną wartość granicy wytrzymałości (MPa), pierwsza liczba pomnożona przez drugą i jeszcze pomnożona przez 10 oznacza granicę plastyczności (MPa). Klasę wytrzymałości śruby 5.6 odczytuje się w następujący sposób: materiał śruby ma granicę wytrzymałości  $5 \times 100 = 500$  MPa i granicę plastyczności  $5 \times 6 \times 10 = 300$  MPa. Każdej klasie wytrzymałości odpowiada konkretny gatunek stali, na przykład klasie wytrzymałości 3.6 odpowiadają stale S215, C10 itd.

Nakrętki, według normy PN-EN ISO 898-2:2023-03, produkuje się w 7 klasach wytrzymałości: 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14 (w kolejności zwiększenia wytrzymałości). Liczba pomnożona przez 100 wskazuje wartość maksymalnego obciążenia.

### Podstawowe wzory obliczeniowe

#### Wartość obwodowej siły napędowej (rys. 3.13)

$$F_t = Ftg(\varphi + \rho),$$

gdzie  $F$  – osiowa siła działająca na śrubę;

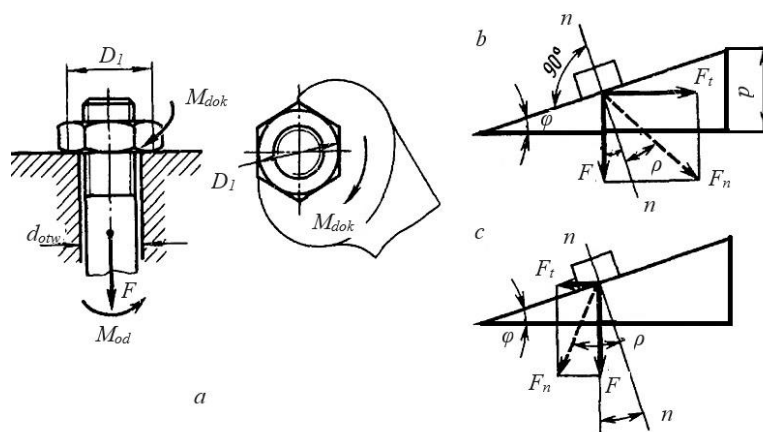
$\varphi = \arctg \frac{p}{\pi d_2}$  – kąt wzniosu linii śrubowej;

$\rho = \arctg \frac{f}{\cos \alpha/2}$  – kąt tarcia w gwincie;

$p$  – skok gwintu;  $\alpha$  – kąt profilu gwintu;

$f$  – współczynnik tarcia;

$d_2$  – środkowa średnica gwintu.



Rys. 3.13. Siły wzajemnego oddziaływania między śrubą a nakrętką

#### Moment dokręcenia śruby albo nakrętki (rys. 3.13, a, b)

$$M_{dok} = M_{Tg} + M_{Tn},$$

gdzie  $M_{Tg}$  – moment sił tarcia w gwincie, Nm:

$$M_{Tg} = F_t \frac{d_2}{2} = Ftg(\varphi + \rho) \frac{d_2}{2}$$

$M_{Tn}$  – moment sił tarcia na podpierającym końcu nakrętki albo śruby, Nm:

$$M_T = Ff \frac{D_{sr}}{2}$$

$D_{\dot{s}r} = (D_1 + d_{otw})/2$  albo  $- D_{\dot{s}r} = 1,4d$  – środkowa średnica powierzchni oporowej śruby (gwintu);  $d_{otw}$  – średnica otworu na śrubę.

Po podstawieniu wartości  $M_p$  i  $M_T$  otrzymujemy

$$M_{dok} = F \frac{d_2}{2} \left[ \frac{D_{\dot{s}r}}{d_2} f + tg(\varphi + \rho) \right]$$

Moment odkręcania śruby albo nakrętki (rys. 3.13, c)

$$M_{od} = F \frac{d_2}{2} \left[ \frac{D_{\dot{s}r}}{d_2} f + tg(\varphi - \rho) \right]$$

### Obliczenia gwintu

*Podstawowe rodzaje uszkodzenia gwintów:* mocujących – **ściananie gwintów**, ruchomych – **zużycie gwintów**. Ze względu na to głównymi kryteriami eksploatacyjnymi i obliczeń dla gwintów mocujących jest wytrzymałość związana z naprężeniami ścinającymi, a dla gwintów ruchomych – odporność na ścieranie związana z naprężeniami ściskającymi (rys. 3.14).

Warunki wytrzymałości dla gwintów ściskanych

$$\text{dla śrub } \tau_{sc} = \frac{F}{(\pi d_1 H K K_m)} \leq k_t;$$

$$\text{dla nakrętek } \tau_{sc} = \frac{F}{(\pi d H K K_m)} \leq k_t$$

gdzie  $F$  – siła;

$H$  – wysokość śruby albo głębokość wkręcenia śruby w element;

$K = ab/p$  albo  $K = ce/p$  – współczynnik kompletności gwintu; dla gwintu trójkątnego  $K = 0,87$ , dla prostokątnego  $K = 0,5$ , dla trapezowego  $K \approx 0,65$ ;  $K_m = 0,55 \div 0,75$  – współczynnik nierównomierności obciążenia wzdłuż zwojów gwintu (większa wartość dla dużych gwintów metrycznych i pod warunkiem, że materiał śruby jest mocniejszy od materiału nakrętki);  $a, b, c, e, p$  – współczynniki korygujące;

$k_t$  – dopuszczalne naprężenia ścinające  $k_t = 0,4R_e$  – obciążenie stałe;

$k_t = (0,2 \div 0,3)R_m$  – obciążenie zmienne.

Dla śrub i nakrętek wykonanych z tego samego materiału naprężenia ścinające są obliczane tylko dla gwintu śruby.

Warunek odporności na zużycie gwintu bieżnego przy naprężeniach ściskających:

$$\sigma_c = \frac{F}{(\pi d_2 h z)} \leq k_c,$$

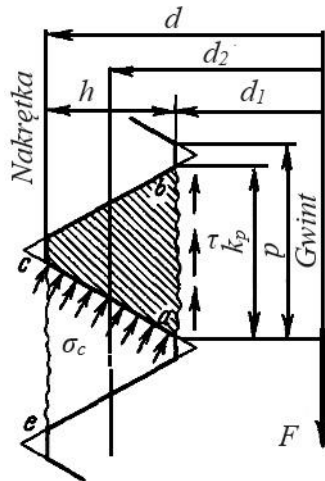
gdzie  $d_2$  – środkowa średnica gwintu, mm;

$h$  – robocza wysokość profilu gwintu, mm;

$z = \frac{H}{p}$  – liczba roboczych zwojów śruby albo nakrętki;

$k_c$  – dopuszczalne naprężenia ściskające dla mniej wytrzymałej części pary gwintowej. Przyjmuje się  $k_c = (0,3 \div 0,4)R_m$ .

Wzór ten jest taki sam dla śruby i dla nakrętki. Współczynnik  $K_T$  przyjęto równy jedności z uwzględnieniem docierania gwintu.



Rys. 3.14. Schemat sił do obliczenia wytrzymałości i odporności na zużycie gwintu

Wydajność połączenia gwintowego bez uwzględnienia sił tarcia na końcu nakrętki lub śruby

$$\eta_{p.g} = \frac{A_{\Pi}}{A_3} = \frac{tg\varphi}{tg(\varphi + \rho)}$$

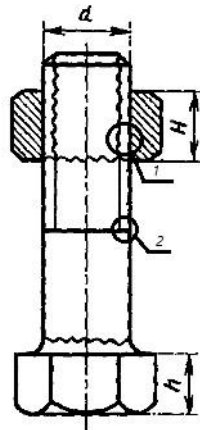
Wydajność śruby z uwzględnieniem tarcia na końcu nakrętki albo gwintu

$$\eta_{p.g} = \frac{A_{\Pi}}{A_3} = \frac{tg\varphi}{tg(\varphi + \rho) + f \frac{\acute{s}r}{d_2}}$$

### Obliczenie wytrzymałości połączeń gwintowych przy różnych rodzajach obciążenia

Głównym kryterium jakości połączeń gwintowych jest wytrzymałość. Wszystkie standardowe śruby, wkręty i śruby dwustronne są wykonywane w taki sposób, aby miały one równą wytrzymałość na rozciąganie pręta po gwincie, na ścinanie gwintu i oderwania łba (rys. 3.15), dlatego obliczenia wytrzymałości połączenia gwintowego zwykle przeprowadza się tylko względem jednego kryterium wydajności – wytrzymałości nagwintowanej części pręta, przy czym uwzględniana jest wewnętrzna średnica gwintu  $d_1$ .





Rys. 3.15. Obszary możliwego zniszczenia połączeń mocujących

Długość śruby, kołka albo wysokość nakrętki przyjmuje się w zależności od grubości łączonych elementów. Pozostałe wymiary elementów połączenia gwintowego (nakrętki, podkładki itp.) są przyjmowane w zależności od średnicy gwintu zgodnie z normą.

#### Wytrzymałość łba na ścinanie (rys. 3.15)

$$\tau_{sc} = \frac{F}{\pi dh} \leq k_t,$$

gdzie  $h$  – wysokość łba śruby, mm.

#### Obliczanie śruby obciążonej osiową siłą rozciągającą $F$ . Nakrętka jest przykręcona, ale nie dokręcona. Śruba nie jest dokręcana.

Przypadek ten jest rzadki. Przykładem jest połączenie śrubowe wspornika, bloku, sekcja końcowa haka mechanizmów dźwigowych (rys. 3.16). Obliczenia prowadzą się do określenia wewnętrznej średnicy gwintu  $d_1$  z warunku wytrzymałości na rozciąganie

$$\sigma_r = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq k_r,$$

wtedy

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot k_r}},$$

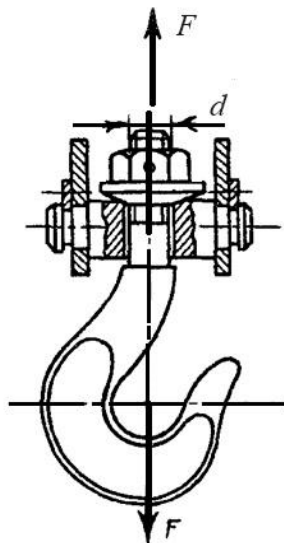
gdzie  $F$  – siły działające, N;

$d_1$  – wewnętrzna średnica gwintu, mm;

$k_r$  – dopuszczalne naprężenia rozciągające, MPa;

$k_r = 0,6R_m$  bez dokręcania śrub.

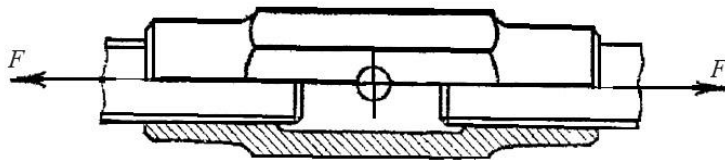
Uzyskana wartość średnicy wewnętrznej  $d_1$  jest zaokrąglana do największej wartości znormalizowanej, do której jest dobierana wartość średnicy zewnętrznej.



Rys. 3.16. Schemat sił występujących w gwincie obciążonego siłą osiową

### Obliczenie gwintu obciążonego osiowo i momentem obrotowym.

Przykładem jest opaska gwintowana podczas dokręcania (rys. 3.17)



Rys. 3.17. Siły występujące w połączeniu gwintowym

w tym przypadku warunek wytrzymałości przyjmuje postać

$$\sigma_{red} = \frac{1,3 \cdot 4F}{\pi d_1^2} \leq k_r$$

wtedy

$$d_1 = \sqrt{\frac{5,2F}{\pi \cdot k_r}}$$

gdzie 1,3 – współczynnik uwzględniający naprężenia skręcające w gwincie, wynikające z tarcia w gwincie;

$k_r = \frac{R_m}{[n]}$  – dopuszczalne naprężenia rozciągające, MPa;

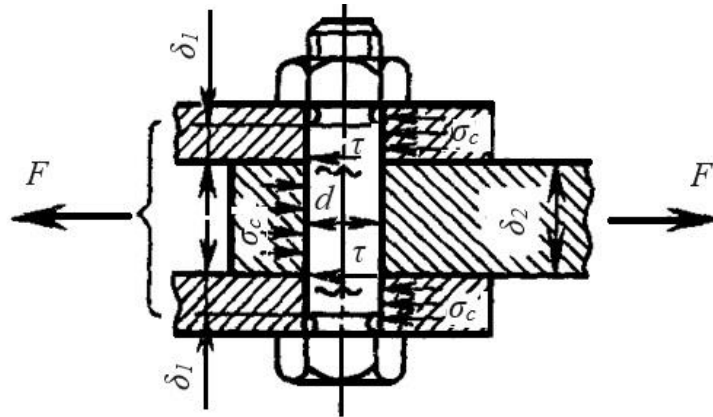
[n] – współczynnik bezpieczeństwa.

## Obliczenie połączenia obciążonego krytycznymi naprężeniami ścinającymi

Warunkiem niezawodności połączenia jest brak możliwości przesuwania się elementów w miejscu ich połączenia. Można rozważyć dwa przypadki:

Śruba dokręcona bez luzu (rys. 3.18). W tym przypadku śruba jest wbijana w kalibrowany rozwiertakiem otwór, a rdzeń śruby jest wykonywany z tolerancją pozwalającą na pasowanie bez szczeliny

Poprawność (unieruchomienie łączonych elementów) połączenia jest zapewniona przez rdzeń śruby. Obliczenia należy przeprowadzić na ścinanie i zgniatanie rdzenia. Przy obliczeniach siły tarcia nie są uwzględniane. W ogólnym przypadku śrubę można zamienić na sworzeń. Z dwóch rodzajów naprężeń najbardziej niebezpieczne są naprężenia ścinające, dlatego najczęściej przeprowadzane są tylko obliczenia tych naprężeń.



Rys. 3.18. Schemat obliczenia śrub umieszczonych w otworze bez szczeliny

Warunek wytrzymałości naprężeń ścinających

$$\tau_{sc} = \frac{4F}{\pi d^2 z i} \leq k_t$$

wtedy

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi k_t z i}}$$

gdzie  $i$  – liczba płaszczyzn ścinających;  $i = n - 1$ , gdzie  $n$  – liczba łączonych elementów;

$z$  – liczba śrub w połączeniu;

$k_t$  – dopuszczalne naprężenia ścinające, MPa.

Uzyskana wartość jest zaokrąglana do większej wartości znormalizowanej.

Warunek wytrzymałości na ściskanie

wzór ogólny

$$\sigma_c = \frac{F}{d \cdot z \cdot \delta_{\min} k_c}$$

skąd  $d = \frac{F}{k_g \delta_{\min}}$

dla elementu środkowego (rys. 3.18)

$$\sigma_{zg} = \frac{F}{(d \cdot \delta_2) z} \leq k_c$$

skąd  $d = \frac{F}{k_c \delta_2 z}$

dla elementu skrajnego

$$\sigma_c = \frac{F}{(2d \delta_1 z)} \leq k_c,$$

skąd  $d = \frac{F}{2 \cdot k_c \delta_1 z'}$

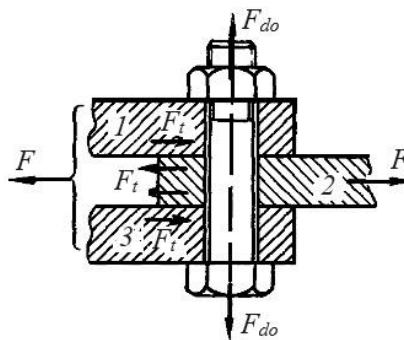
gdzie  $k_c$  – dopuszczalne naprężenia ściskające materiału o niższej wytrzymałości, MPa;

$\delta_{\min}$  – minimalna grubość łączonych elementów, mm;

$\delta_1, \delta_2$  – grubość łączonych elementów, mm.

Wadą takich połączeń jest ich wysoki koszt ze względu na złożoność technologii produkcji (precyzyjne znakowanie, rozmieszczenie i dokładność produkcji śrub).

*Śruba dokręcona z luzem* (rys. 3.19). W połączeniu tym poprawność jest zapewniona przez siły tarcia wynikające z dokręcania śruby, jednak nie powinna być ona poddana obciążeniu zewnętrznemu. Jeżeli w tym połączeniu śruba jest poddawana obciążeniu zewnętrznemu, świadczy to o naruszeniu poprawności i takie połączenie nie jest prawidłowe.



Rys. 3.19. Schemat do obliczeń śrub w otworach z luzem

Przy połączeniu ze szczeliną obciążenia zewnętrzne nie oddziałują na śrubę. Dlatego śruba jest obliczana na statyczną wytrzymałość jedynie względem siły dokręcania, nawet przy zmiennym obciążeniu zewnętrznym. Wpływ obciążenia zmiennego oblicza się poprzez dobór zwiększonych wartości współczynnika bezpieczeństwa.

Warunek braku przemieszczenia można zapisać:

$$F \leq i \cdot F_t = i \cdot F_{do} \cdot f$$

gdzie  $i$  – liczba płaszczyzn ścinania (na rys. 3.19  $i = 2$ , przy łączeniu dwóch elementów  $i = 1$ );

$F_t$  – siła tarcia pomiędzy łączonymi elementami wynikająca z dokręcania, N;

$f$  – współczynnik tarcia w miejscu złączenia ( $f \approx 0,15 \div 0,20$  dla suchych stalowych i żeliwnych powierzchni);

$F_{do}$  – siła dokręcenia śruby, N;

$$F_{do} = \frac{KF}{zif},$$

gdzie  $K$  – współczynnik zapasu przyczepności ( $K = 1,3 \div 1,5$  przy obciążeniu statycznym,  $K = 1,8 \div 2$  przy obciążeniu zmiennym);

$z$  – liczba śrub w połączeniu.

Warunek wytrzymałości dla  $i=4$  przyjmie postać

$$\sigma_{red} = \frac{1,3 \cdot 4F_{do}}{\pi d_1^2} \leq k_r$$

skąd

$$d_1 = \sqrt{\frac{5,2F_{do}}{\pi k_r}}$$

Porównując przypadki umieszczenia śrub ze szczeliną i bez, warto podkreślić, że pierwszy przypadek jest tańszy, ponieważ nie wymaga dokładności wymiarów śruby i otworu. Jednak warunki pracy śruby umieszczonej ze szczeliną są gorsze niż bez. Obliczeniowe obciążenie śruby ze szczeliną jest  $5 \div 7,5$  większe od naprężenia zewnętrznego. Oprócz tego, w wyniku niestabilności współczynnika tarcia i skomplikowanej kontroli dokręcania, praca takich połączeń przy przesunięciach jest niewystarczająco stabilna.

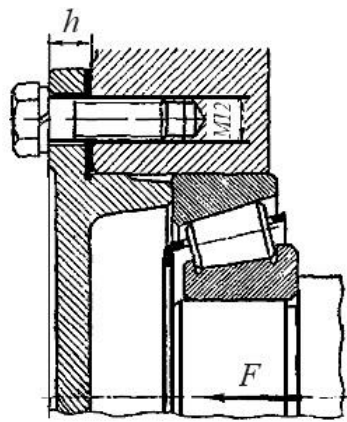
### Obliczanie połączeń wstępnie dokręconych przy montażu i obciążonych zewnętrzną siłą rozciągającą

Przypadek ten często jest spotykany w budowie maszyn do mocowania osłon przekładni, zbiorników, cylindrów, łożysk (rys 3.20) itp. Tutaj również rozpatrywane są dwa przypadki.

*Warunek nie jest spełniony, dodatkowe dokręcanie śruby nie występuje, dlatego obliczeniowe obciążenie wynosi*

$$F_{ob} = [1,3K(1 - \chi) + \chi]F,$$

gdzie  $\chi$  – współczynnik zewnętrznego obciążenia, charakteryzujący podatność elementów połączenia ( $\chi = 0,2 \div 0,3$  bez uszczeltek;  $\chi = 0,4 \div 0,5$  z uszczelkami).



Rys. 3.20. Rozkład sił dokręconego połączenia

*Możliwym jest dodatkowe dokręcenie śruby przy oddziaływaniu pełnego obciążenia zewnętrznego, wtedy obciążenie obliczeniowe*

$$F_{ob} = 1,3F[K(1 - \chi) + \chi],$$

Warunek wytrzymałości dla naprężeń zredukowanych

$$\sigma_{red} = \frac{4F_{ob}}{\pi d_1^2 z} \leq k_r,$$

wtedy

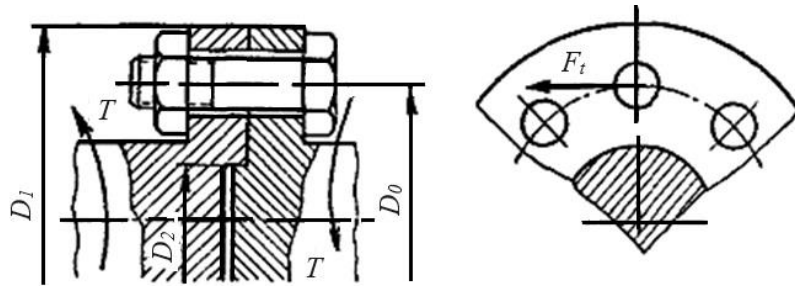
$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_{ob}}{\pi k_r z}}$$

gdzie  $z$  – liczba śrub w połączeniu.

### Obliczenie połączenia obciążonego momentem obrotowym (sprzęgła, przekładnie złożone itp.)

Przypadek ten jest podobny do przypadku obciążenia siłą poprzeczną, połączone elementy są przemieszczane siłą obwodową. (rys. 3.21). Tutaj

również rozpatrywane są dwa przypadki (śruby umieszczone bez szczeliny i ze szczeliną).



Rys. 3.21. Schemat połączenia gwintowego obciążonego momentem skręcającym

Siła obwodowa wynosi

$$F_t = \frac{2T}{D_0},$$

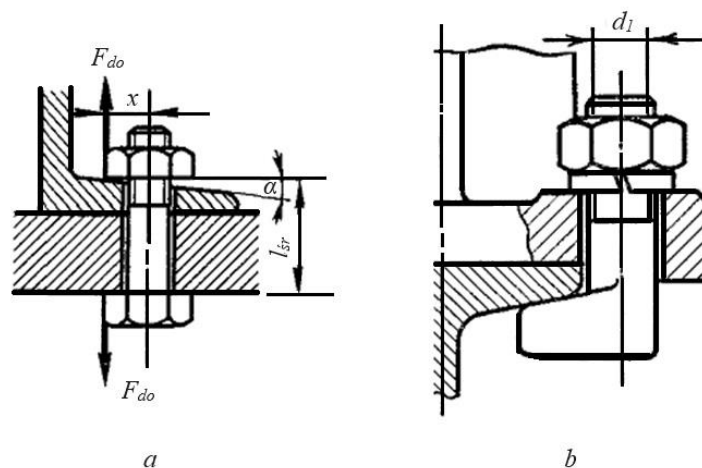
gdzie  $T$  – moment skręcający, Nm;

$D_0$  – średnica osi śrub, m.

Siła obwodowa  $F_t$  jest zastępowana przez  $F$  we wzorach obliczeniowych dla połączeń obciążonych siłą poprzeczną.

### Obliczenie połączenia obciążonego siłą odśrodkową

Mimośrodowe obciążenie śruby występuje z powodu nierównoległości powierzchni nośnych powierzchni łączonych elementów i nakrętki albo łba wkrętu, na przykład z powodu nachylenia półki ceownika (rys. 3.22, *a*), błędów w trakcie produkcji śrub, nakrętek, stosowania wkrętów z łbem sześciokątnym (rys. 3.22, *b*) itp. We wszystkich przypadkach oprócz naprężeń rozciągających w rdzeniu śruby występują naprężenia zginające.



Rys. 3.22. Obciążenie złącza siłą odśrodkową

Warunek wytrzymałości przyjmie postać

$$\sigma_{red} = \sigma_r + \tau_s = \frac{4F_{ob}}{\pi d_1} + \frac{32F_{ob}x}{\pi d_1^3} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \left(1 + \frac{8x}{d_1}\right) \leq k_r$$

gdzie  $x$  – wartość mimośrod, mm.

*Wartość obliczonego obciążenia  $F_{ob}$  jest określana według wzorów dla połączeń wstępnie dokręconych przy montażu przed przyłożeniem obciążenia zewnętrznego.*

Jeżeli  $x = 0,5 d$ , to średnicę gwintu można określić

$$d_1 = 2,24 \sqrt{\frac{4F_{ob}}{\pi \cdot k_r \cdot z}},$$

gdzie  $z$  – liczba śrub w połączeniu.

Obciążenie mimośrodowe wymaga zwiększenia średnicy śruby i zmniejszenia wytrzymałości połączenia. Przy projektowaniu i produkcji konstrukcji połączenia konieczne jest unikanie obciążeń mimośrodowych lub podejmowanie działań zmniejszających te obciążenia (planowanie powierzchni nośnych nakrętek i łbów wkrętów, śrub oraz stosowanie standardowych podkładek skośnych).

Zalecane wartości dopuszczalnych naprężeń, współczynników bezpieczeństwa i wymiary gwintów metrycznych podano w tabelach D.7 ÷ D.9 załącznika.



## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.9.** Określić średnicę ciętej części końcowego odcinka haka (rys. 2.5), jeżeli: działające obciążenie zmienne pulsujące  $F = 10 \text{ T}$ ; materiał haka stal C35; nakrętka jest zakręcona, ale nie zaciągnięta.

*Dane:*

$F = 10 \text{ T}$

materiał – stal C35

obciążenie zmienne pulsujące

*Szukane:*

$d$ -?

### Rozwiązanie

1. Określamy dopuszczalne naprężenia.

Z tabel D.2 i D.7 dla stali C35 z uwzględnieniem działania pulsującego obciążenia  $k_r = 125 \text{ MPa}$ .

2. Z warunku wytrzymałości obliczamy wewnętrzną średnicę gwintu:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 125}} = 31,9 \text{ mm}$$

Wybieramy gwint metryczny, który jest w stanie wytrzymać duże obciążenia i ma wysokie tarcie. Zgodnie z tabelą D.8 przyjmujemy najbliższą większą wartość średnicy wewnętrznej  $d = 37,129 \text{ mm}$  z krokiem  $p = 4,5 \text{ mm}$ , średnica zewnętrzna gwintu  $d = \text{M42}$ .

*Odpowiedź:*  $d = \text{M42}$ .

**Przykład 3.10.** Z warunku wytrzymałości określić średnicę śrub w połączeniu gwintowym obciążonych zmienną siłą poprzeczną  $F = 20 \text{ kN}$ . Liczba śrub  $z = 2$ , liczba łączonych elementów  $n = 3$ , klasa wytrzymałości śrub 4.8, dokręcanie śrub jest niekontrolowane. W pierwszym przypadku śruby są umieszczone bez luzu (rys. 3.18), w drugim – z luzem (rys. 3.19).

*Dane:*

$F = 20 \text{ kN}$

klasa wytrzymałości 4.8

$z = 2$

$n = 3$

pokręcanie niekontrolowane

przypadek 1 – bez luzu

przypadek 2 – z luzem

*Szukane:*

$d$  – ?

### Rozwiązanie

*Przypadek 1* – śruby umieszczone bez luzu (rys. 3.18).

W połączeniu obciążonym siłą poprzeczną wytrzymałość zapewnia rdzeń śruby, w którym występuje ścinanie.

1. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Dla śrub o klasie wytrzymałości 4.8 granica plastyczności wynosi

$R_e = 4 \cdot 8 \cdot 10 = 320$  MPa, więc z tabeli D.7 dopuszczalne naprężenie ścinające określimy ze wzoru:

$$k_t = (0,2 \div 0,3)R_e = (0,2 \div 0,3) \cdot 320 = 64 \div 96 \text{ MPa}$$

Przyjmujemy  $k_t = 64$  MPa.

2. Z warunku wytrzymałości określamy średnicę śruby.

Liczba płaszczyzn ścinania  $i = n - 1 = 3 - 1 = 2$ .

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi k_t z i}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 64 \cdot 2 \cdot 2}} \approx 10 \text{ mm}$$

Z tabeli D.53 przyjmujemy śrubę o zwiększonej dokładności do montażu spod rozwiertaka  $d_1 = 11$  mm, na końcu której rozmieszczono gwint  $d = \text{M10}$ .

*Przypadek 2* – śruby umieszczone z luzem (rys. 3.19).

W przypadku umieszczenia śruby ze szczeliną nieruchomość połączenia jest uwarunkowana przez siły tarcia powstające podczas dokręcenia śrub. Na śruby oddziałują obciążenia złożone (rozciąganie i skręcanie), dlatego obliczenia są oparte o wyznaczenie naprężeń równoważnych.

3. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Przy uwzględnieniu naprężenia zmiennego i niekontrolowanego dokręcania oraz przyjmując, że średnica śruby będzie z przedziału M16 ÷ M30, przyjmujemy  $[n] = 6,5$  (tabela D.58).

$$k_r = \frac{R_e}{[n]} = \frac{320}{6,5} = 49 \text{ MPa}$$

4. Określamy siłę dokręcania śruby.

Współczynnik tarcia stal–stal  $f \approx 0,17$ ; współczynnik zapasu przyczepności przy obciążeniu zmiennym  $K = 1,8$ .

$$F_{do} = \frac{KF}{zif} = \frac{1,8 \cdot 20 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 0,17} = 52941 \text{ N}$$

5. Z warunku wytrzymałości określamy wewnętrzną średnicę gwintu:

$$d_1 = \sqrt{\frac{5,2F_{do}}{\pi k_r}} = \sqrt{\frac{5,2 \cdot 52941}{3,14 \cdot 49}} = 42,29 \text{ mm}$$

Z tabeli D.8 przyjmujemy najbliższą większą wartość  $d_1 = 42,587$  mm, dla której  $d = M48$ .

*Odpowiedź:* przypadek 1:  $d_1 = 11$  mm; przypadek 2:  $d = M48$ .

**Przykład 3.11.** Określić średnicę śrub sprzęgła kołnierzonego (rys. 3.21). Obciążenie zmienne, moment skręcający  $T = 1$  kNm, śruby o klasie wytrzymałości 5.6, dokręcenie niekontrolowane, liczba śrub  $z = 4$ , średnica rdzenia osi śrub  $D_0 = 200$  mm. W pierwszym przypadku śruby są ustawione bez luzu, w drugim – z luzem.

*Dane:*

$T = 1$  kNm

klasa wytrzymałości 5.6

$z = 4$

$D_0 = 200$  mm

dokręcanie niekontrolowane

przypadek 1 – bez luzu

przypadek 2 – z luzem

*Szukane:*

$d - ?$

### *Rozwiązanie*

*Przypadek 1* – śruby umieszczone bez luzu

1. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Dla śrub o klasie wytrzymałości 5.6 granica plastyczności wynosi

$R_e = 5 \cdot 6 \cdot 10 = 3000$  MPa, więc z tabeli D.7 dopuszczalne naprężenie ścinające określimy ze stosunku

$$k_t = (0,2 \div 0,3)R_e = (0,2 \div 0,3) \cdot 3000 = 600 \div 900 \text{ MPa}$$

Przyjmujemy  $k_t = 600$  MPa.

2. Określamy siłę obwodową działającą na połączenie:

$1000 \text{ Nm} = 10^6 \text{ Nmm}$ ,

$$F_t = \frac{2T}{D_0} = \frac{2 \cdot 10^6}{200} = 10000 \text{ N}$$

3. Z warunku wytrzymałości określamy średnicę śruby.

Liczba płaszczyzn ścinania  $i = n - 1 = 2 - 1 = 1$ .

$$d = \sqrt{\frac{4F_t}{\pi k_t z i}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^4}{3,14 \cdot 600 \cdot 4 \cdot 1}} \approx 7,3 \text{ mm}$$

Z tabeli D.53 przyjmujemy śrubę o zwiększonej dokładności do montażu spod rozwiertaka  $d_1 = 9$  mm, na końcu której rozmieszczono gwint  $d = M8$ .

*Przypadek 2* – śruby umieszczone z luzem (rys. 3.21)

1. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Przy uwzględnieniu naprężenia zmiennego i niekontrolowanego dokręcania oraz przyjmując, że średnica śruby będzie z przedziału M16 ÷ M30, przyjmujemy  $[n] = 6,5$  (tabela D.58).

$$k_r = \frac{R_e}{[n]} = \frac{300}{6,5} = 46 \text{ MPa}$$

2. Określamy siłę dokręcania śruby.

Współczynnik tarcia stal–stal  $f \approx 0,17$ ; współczynnik zapasu przyczepności przy obciążeniu zmiennym  $K = 1,8$ .

$$F_{do} = \frac{KF_t}{zif} = \frac{1,8 \cdot 10^4}{4 \cdot 1 \cdot 0,17} = 26471 \text{ N}$$

3. Z warunku wytrzymałości określamy wewnętrzną średnicę gwintu:

$$d_1 = \sqrt{\frac{5,2F_{do}}{\pi k_r}} = \sqrt{\frac{5,2 \cdot 26471}{3,14 \cdot 46}} = 30,87 \text{ mm}$$

Z tabeli D.8 przyjmujemy najbliższą większą wartość  $d_1 = 31,670 \text{ mm}$ , dla której  $d = \text{M36}$ .

Przypadek ten pokazuje celowość montażu śrub w sprzęgłach docelowych bez szczeliny.

*Odpowiedź:* przypadek 1:  $d_1 = 9 \text{ mm}$ ; przypadek 2:  $d_1 = \text{M36}$ .

**Przykład 3.12.** Określić liczbę śrub w połączeniu obciążonym stałym naprężeniem poprzecznym  $F = 50 \text{ kN}$ . Śruby są zmontowane ze szczeliną (rys. 3.19), liczba łączonych elementów  $n = 3$ , średnica śruby  $d = \text{M24}$ , dokręcanie niekontrolowane, materiał śruby stal C10.

*Dane:*

$$F = 50 \text{ kN}$$

$$d = \text{M24}$$

$$n = 3$$

obciążenie stałe

dokręcenie niekontrolowane

*Szukane:*

$$z - ?$$

### *Rozwiązanie*

1. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Z tabeli D.1 dla stali C10  $R_e = 210 \text{ MPa}$ .

Z tabeli D.6, z uwzględnieniem stałego obciążenia i niekontrolowanego dokręcania dla stali węglowych w przedziale rozmiarów M16 ÷ M30, przyjmujemy  $[n] = 3$ , wtedy naprężenia dopuszczalne

$$k_r = \frac{R_e}{[n]} = \frac{210}{3} = 70 \text{ MPa}$$

2. W warunku wytrzymałości określamy liczbę śrub.

Współczynnik tarcia stal-stal  $f \approx 0,17$ ; współczynnik przyczepności przy obciążeniu stałym  $K = 1,3$ ; liczba płaszczyzn ścinania  $i = n - 1 = 3 - 1 = 2$ . Z tabeli D.9 dla śruby M24  $d_1 = 20,752 \text{ mm}$ .

$$z = \frac{5,2KF}{if\pi d_1^2 k_r} = \frac{5,2 \cdot 1,3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,17 \cdot 3,14 \cdot 20,752^2 \cdot 70} = 10,5$$

Przyjmujemy liczbę śrub przy połączeniu  $z = 12$ .

*Odpowiedź:*  $z = 12$ .

**Przykład 3.13.** Jakie maksymalne obciążenie może wytrzymać połączenie śrubowe obciążone stałą siłą poprzeczną, w którym śruby są zamontowane bez luzu (rys. 3.18)? Liczba śrub  $z = 4$ , średnica śrub  $d = 17 \text{ mm}$ , materiał śrub – stal C35 ( $R_e = 320 \text{ MPa}$ ), liczba łączonych elementów  $n = 2$ .

*Dane:*

$d = 17 \text{ mm}$

$z = 4$

materiał – stal C35

$R_e = 320 \text{ MPa}$

$n = 2$

obciążenie stałe

*Szukane:*

$F - ?$

*Rozwiązanie*

1. Obliczamy dopuszczalne naprężenia.

Przy statycznym obciążeniu z tabeli D.7

$$k_t = 0,4R_e = 0,4 \cdot 320 = 128 \text{ MPa}$$

2. Z warunku wytrzymałości określamy dopuszczalne obciążenie

$$F \leq \frac{k_t \pi d_1^2 z i}{4} = \frac{128 \cdot 3,14 \cdot 17^2 \cdot 4 \cdot 1}{4} = 116155 \text{ N}$$

*Odpowiedź:*  $F = 116155 \text{ N}$ .

**Przykład 3.14.** Określić średnicę śrub osłony zespołu łożyskowego (rys. 3.20), poddanych stałemu obciążeniu osiowemu  $F = 12,5 \text{ kN}$ . Liczba śrub  $z = 6$ , materiał śrub stal C35 ( $R_e = 320 \text{ MPa}$ ), śruby zamontowano ze szczeliną i dokręcono przed przyłożeniem obciążenia. Rozpatrzeć dwa przypadki: przypadek 1 – bez dokręcania śrub przy obciążeniu; przypadek 2 – z dokręcaniem śrub przy obciążeniu.

*Dane:*

$$F = 12,5 \text{ kN}$$

$$z = 6$$

Materiał – stal C35

$$R_e = 320 \text{ MPa}$$

Obciążenie stałe

*Szukane:*

$$d - ?$$

### *Rozwiązanie*

1. Określamy naprężenia dopuszczalne

Z tabeli D.6, z uwzględnieniem stałego obciążenia i niekontrolowanego dokręcenia dla stali węglowych w przedziale rozmiarów M6 ÷ M16, przyjmujemy  $[n] = 4$ , wtedy naprężenia dopuszczalne

$$k_r = \frac{R_e}{[n]} = \frac{320}{4} = 80 \text{ MPa}$$

2. Określamy obliczeniową siłę dla przypadku 1 – bez dokręcania śrub przy obciążeniu.

Uwzględniamy miękką uszczelkę i przyjmujemy  $\chi = 0,4$ , współczynnik zapasu przyczepności przy obciążeniu stałym przyjmujemy  $K = 1,3$ .

$$F_{ob} = [1,3K(1 - \chi) + \chi]F = [1,3 \cdot 1,3(1 - 0,4) + 0,4] \cdot 12,5 \cdot 10^3 = 17675 \text{ N}$$

3. Z warunku wytrzymałości określamy wewnętrzną średnicę gwintu śruby:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_{ob}}{\pi k_{r,z}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 17675}{3,14 \cdot 80 \cdot 6}} = 6,85 \text{ mm}$$

Z tabeli D.8 przyjmujemy najbliższą większą wartość  $d_1 = 8,376 \text{ mm}$ , co odpowiada średnicy zewnętrznej gwintu M10.

4. Określamy siłę obliczeniową dla przypadku 2 – z dokręcaniem śrub przy obciążeniu

$$F_{ob} = 1,3F[K(1 - \chi) + \chi] = 1,3 \cdot 12,5 \cdot 10^3 [1,3(1 - 0,4) + 0,4] = 19175 \text{ N}$$

5. Z warunku wytrzymałości określamy wewnętrzną średnicę gwintu śruby:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_{ob}}{\pi k_{r,z}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 19175}{3,14 \cdot 80 \cdot 6}} = 7,13 \text{ mm}$$

Z tabeli D.8 przyjmujemy najbliższą większą wartość  $d_1 = 8,376 \text{ mm}$ , co odpowiada średnicy zewnętrznej gwintu M10. Średnica śruby jest w granicach M6 ÷ M16, dla których określono współczynnik bezpieczeństwa.

*Odpowiedź:* dla przypadków 1 i 2  $d = \text{M10}$ .

**Przykład 3.15.** Określić siłę, jaką trzeba przyłożyć do płaskiego klucza przy zakręcaniu nakrętki (rys. 3.13), żeby w pręcie śruby naprężenia osiągnęły wartość granicy plastyczności  $R_e = 210$  MPa (stal C10). Obliczenia przeprowadzić dla śruby M24. Długość rączki płaskiego klucza przyjmując  $l = 15d$ , współczynnik tarcia w gwincie na końcu nakrętki  $f = 0,15$ .

*Dane:*

$d = M24$

materiał – stal C10

$R_e = 210$  MPa

$f = 0,15$

$l = 15d$

*Szukane:*

$F_k - ?$

### Rozwiązanie

1. Z tabeli D.8 wypisujemy niezbędne do obliczeń wymiary:  $d = 24$  mm;  $d_1 = 20,752$  mm;  $d_2 = 22,051$  mm;  $p = 3$  mm, kąt wzniesienia gwintu określamy według wzoru

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{p}{\pi d_2} = \operatorname{arctg} \frac{3}{3,14 \cdot 22,051} = 2^\circ 30'$$

2. Z warunku wytrzymałości określamy siłę dokręcania dla śruby, przy której w rdzeniu występują naprężenia równe granicy plastyczności

$$F_{do} = \frac{\pi d_1^2 R_e}{5,2} = \frac{3,14 \cdot 20,752^2 \cdot 210}{5,2} = 54625 \text{ N}$$

3. Określamy moment zakręcania przyłożony do nakrętki.

Przed tym określamy kąt tarcia

$$\rho = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{0,15}{\cos 60^\circ / 2} = 9^\circ 50'$$

$$M_{zak} = F_{do} \frac{d_2}{2} \left[ \frac{D_{\dot{s}r}}{d_2} f + \operatorname{tg}(\varphi + \rho) \right] =$$

$$= 54625 \frac{22,051}{2} \left[ \frac{33,6}{22,051} \cdot 0,15 + \operatorname{tg}(2^\circ 30' + 9^\circ 50') \right] = 258975 \text{ N} \cdot \text{mm} \approx 259 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4. Określamy siłę, jaką trzeba przyłożyć.

$$F_k = \frac{M_{zak}}{l} = 258975 / 15 \cdot 24 = 719,4 \text{ N} \approx 72 \text{ kg}$$

Uzysk w sile

$$\frac{F_{do}}{F_k} = \frac{54625}{719,4} \approx 76 \text{ razy}$$

**Odpowiedź:**  $F_k = 719,4$  N.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania (Obliczeniowe)

**Zadanie 3.4.** Określić siłę, jaką należy przyłożyć do płaskiego klucza przy zakręcaniu nakrętki (rys. 3.13), żeby w przecie śruby naprężenia osiągnęły wartość granicy plastyczności. Długość rączki klucza płaskiego przyjąć  $l = 15d$ , Współczynnik tarcia na końcu w gwincie nakrętki  $f = 0,15$ . Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.4.

Tabela 3.4. Dane wejściowe do zadania 3.4

Nr war.	Średnica mm	Typ gwintu	$R_e$ , MPa
1	M8	metryczny	210
2	M10	metryczny	230
3	M12	metryczny	240
4	M16	metryczny	260
5	M20	metryczny	280
6	M22	metryczny	320
7	M30	metryczny	340
8	M32	metryczny	360
9	M36	metryczny	380
10	M42	metryczny	220
11	M16	metryczny	180
12	M20	metryczny	210
13	M22	metryczny	360
14	M30	metryczny	400
15	M10	metryczny	420
16	M10	metryczny	460
17	M12	metryczny	480
18	M16	metryczny	500
19	M20	metryczny	315
20	M22	metryczny	215
21	M30	metryczny	415
22	M32	metryczny	435
23	M36	metryczny	265
24	M42	metryczny	245
25	M16	metryczny	325
26	M8	metryczny	235
27	M10	metryczny	225
28	M12	metryczny	185
29	M16	metryczny	210
30	M20	metryczny	200



**Zadanie 3.5.** Określić średnicę śrub sprzęgła kołnierzewego (rys. 3.21). Dokręcanie niekontrolowane. W pierwszym przypadku śruby są ustawione bez luzu, w drugim – z luzem. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.5.

Tabela 3.5. Dane wejściowe do zadania 3.5

Nr war.	Obciążenie kNm	Liczba śrub	$D_0$	Klasa wytrzymałości śruby	Charakter obciążenia
	$T$	$z$			
1	0,5	4	220	3.6	Stałe
2	0,6	6	230	4.6	Zmienne
3	0,7	8	240	4.8	Stałe
4	0,8	4	250	5.6	Zmienne
5	0,9	6	260	5.8	Stałe
6	1	8	280	6.6	Zmienne
7	1,2	4	290	6.8	Stałe
8	1,3	6	300	6.9	Zmienne
9	1,4	8	310	8.8	Stałe
10	1,5	4	315	10.9	Zmienne
11	1,6	6	320	3.6	Stałe
12	0,3	8	325	4.6	Zmienne
13	0,6	4	330	4.8	Stałe
14	0,8	6	340	5.6	Zmienne
15	0,5	8	350	5.8	Stałe
16	0,6	4	345	6.6	Zmienne
17	0,7	6	360	6.8	Stałe
18	0,8	8	200	6.9	Zmienne
19	0,9	4	210	8.8	Stałe
20	1	6	220	10.9	Zmienne
21	1,2	8	230	3.6	Stałe
22	1,3	4	240	4.6	Zmienne
23	1,4	6	250	4.8	Stałe
24	1,5	8	260	5.6	Zmienne
25	1,6	4	280	5.8	Stałe
26	0,3	6	290	6.6	Zmienne
27	0,6	8	300	6.8	Stałe
28	0,8	4	310	6.9	Zmienne
29	0,5	6	315	8.8	Stałe
30	0,6	8	320	10.9	Zmienne

**Zadanie 3.6.** Określić średnicę śrub osłony zespołu łożyskowego (rys. 3.20) i sprawdzić wytrzymałość gwintu i łba wkrętu. Śruby ustawiono ze szczeliną i dokręcono przed przyłożeniem obciążenia. Głębokość zakręcenia śruby przyjmując  $H = 1,2d$ . Rozpatrzyć dwa przypadki: przypadek 1 – bez dokręcenia przy obciążeniu; przypadek 2 – z dokręceniem śrub przy obciążeniu. Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Dane wejściowe do zadania 3.6

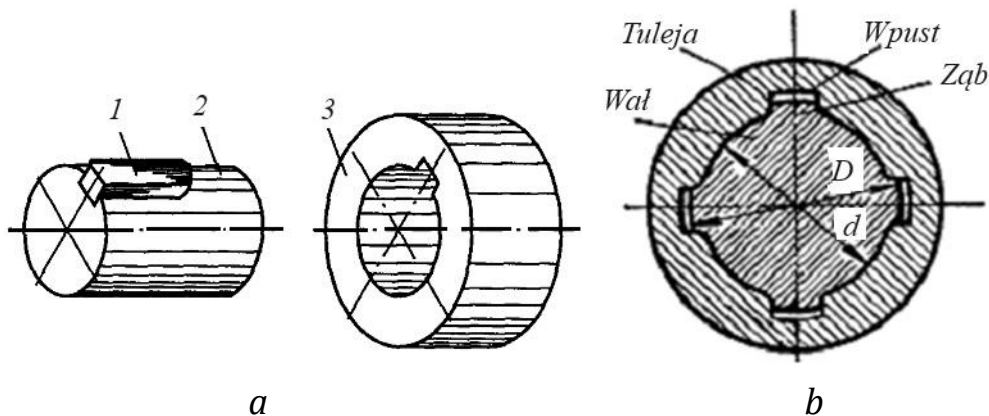
Nr war.	Obciążenia kN	Liczba śrub	Klasa wytrzymałości śruby	Charakter obciążenia
	$F_a$	$z$		
1	10	4	5.6	Zmienne
2	11	6	5.8	Stałe
3	12	8	6.6	Zmienne
4	12,5	10	6.8	Stałe
5	14	4	6.9	Zmienne
6	14,5	6	8.8	Stałe
7	15	8	10.9	Zmienne
8	16	10	3.6	Stałe
9	10,5	4	4.6	Zmienne
10	11	6	4.8	Stałe
11	8	8	5.6	Zmienne
12	10	10	5.8	Stałe
13	9	4	6.6	Zmienne
14	10	6	6.8	Stałe
15	11	8	3.6	Zmienne
16	12	10	4.6	Stałe
17	12,5	4	4.8	Zmienne
18	14	6	5.6	Stałe
19	14,5	8	5.8	Zmienne
20	15	10	6.6	Stałe
21	16	4	6.8	Zmienne
22	10,5	6	6.9	Stałe
23	11	8	8.8	Zmienne
24	8	10	10.9	Stałe
25	10	4	3.6	Zmienne
26	9	6	4.6	Stałe
27	10	8	4.8	Zmienne
28	11	10	5.6	Stałe
29	12	4	5.8	Zmienne
30	12,5	6	6.6	Stałe

### 3.3. Obliczanie połączeń wpustowych i wielowypustowych

#### Wiadomości ogólne

Połączenia wpustowe i wielowypustowe są używane do łączenia wałów i osi obracających się (kół zębatach, kół pasowych, kół łańcuchowych i innych elementów), do przekazania momentu obrotowego od wału na piastę zamontowanego elementu i odwrotnie oraz do przesuwania detali wzdłuż wałów po osi.

**Połączenia wpustowe** (rys. 3.23, *a*) zawierają wał (2), wpust (1) i piastę (3) (koła, koło pasowe albo inny element). Wpust jest stalowym klinem, który jest wkładany w rowki wału i piasty.



Rys. 3.23. Połączenia: *a* – wpustowe; *b* – wielowypustowe

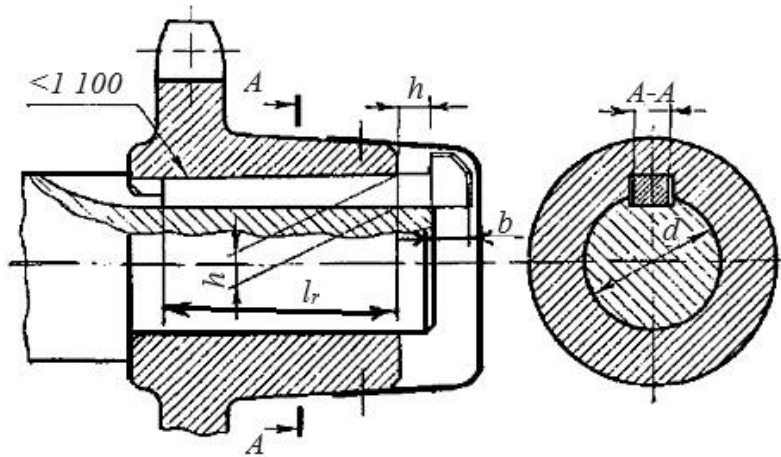
**Połączenia wielowypustowe** (zębate) (rys. 3.23, *b*) są tworzone przez określony kształt występów (zębów) na wale i odpowiadające im wgłębienia (wielowypusty) w piaście. Powierzchniami roboczymi są boki zębów. Połączenia te można uznać za wielowypustowe, jeżeli wpusty są wykonane jako całość z wałem.

#### Podstawowe wzory obliczeniowe

##### Połączenia wpustowe

Podstawowym kryterium wydajności połączeń wpustowych jest **wytrzymałość**. Z warunku wytrzymałości można przeprowadzić obliczenia sprawdzające, polegające na określeniu naprężeń obliczeniowych i porównaniu ich z dopuszczalnym albo określenie dopuszczalnego momentu, oraz obliczenia projektowe, polegające na określeniu wymiarów geometrycznych połączeń (zwykle określana jest długość wpustu).

**Połączenie wpustem pryzmatycznym** (rys. 3.24) jest obliczane z warunku wytrzymałości klina na ściskanie.



Rys. 3.24. Połączenie wpustem pryzmatycznym

Warunek wytrzymałości

$$\sigma_c = \frac{12T \cdot 10^3}{(b + 6fd)b \cdot l_r} \leq k_c,$$

gdzie  $T$  – moment obrotowy, Nm;

$d$  – średnica wału, mm;

$b$  – szerokość klina, mm;

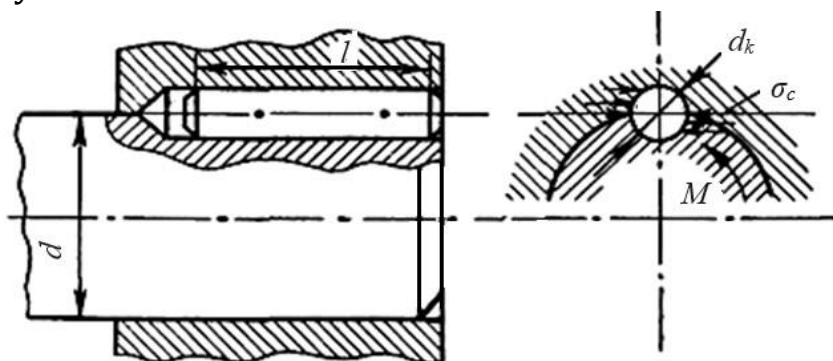
$l_r$  – długość roboczej części klina, mm;

$f$  – współczynnik tarcia; dla stali  $f = 0,15$ , dla żeliwa  $f = 0,2$ ;

$k_c$  – dopuszczalne naprężenia ściskające, MPa (tabela D.9).

Złożoność wykonania klinów i rowków, występowanie naprężeń montażowych, przemieszczenie promieniowe i przekrzywienie wyrobów ogranicza ich zastosowanie.

**Połączenie wpustami czopowymi** (rys. 3.25) jest obliczane z warunku wytrzymałości klina na ściskanie.



Rys. 3.25. Połączenie wpustem czopowym

Warunek wytrzymałości:

$$\sigma_c = \frac{4T \cdot 10^3}{dd_k l_k} \leq k_c,$$

gdzie  $d$  – średnica wału, mm;

$d_k$  – średnica klina, mm;

$l_k$  – długość wpustu, mm.

Wymiary geometryczne wpustu określa się z warunku wytrzymałości albo przyjmuje z zależności:

Średnica wpustu

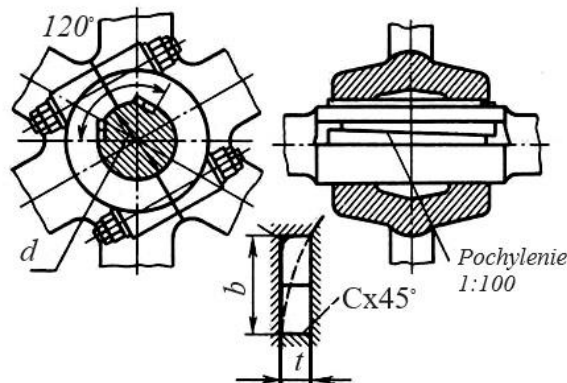
$$d_k = (0,13 \div 0,16)d_w,$$

gdzie  $d_w$  – średnica wału, mm.

Długość klina przyjmujemy  $l = (3 \div 4) d_k$  albo określamy z długości piasty.

Kliny czopowe są wykonywane zgodnie z PN-EN ISO 2338:2003, PN-EN ISO 8735:2003. Przy dużych obciążeniach stosuje się dwa wpusty pod kątem  $180^\circ$  albo trzy pod kątem  $120^\circ$ . Warto pamiętać, że to znacznie osłabia przekrój wału, szczególnie przy uderzeniowych i zmiennych obciążeniach.

**Połączenie wpustem stycznym** (rys. 3.26) również jest obliczane z warunku wytrzymałości na ściskanie.



Rys. 3.26. Połączenie wpustem stycznym

Warunek wytrzymałości przy połączeniu wpustem stycznym:

$$\sigma_c = \frac{T \cdot 10^3}{\left(0,45 + \frac{2}{\pi} f\right) dl_r (t - c)} \leq k_c$$

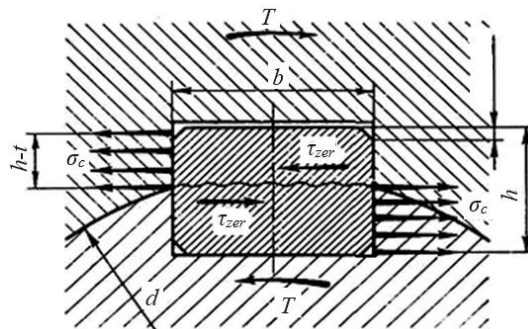
gdzie  $t$  – szerokość roboczej krawędzi klina, jest ona równa głębokości rowka na wale, mm;

$c$  – fazowanie klina, mm.

W takich połączeniach na wpust oddziałują naprężenia ściskające, czyli pracują one w korzystniejszych warunkach niż inne kliny. Wymiary klinów i rowków dobiera się zgodnie z ISO 3117:1977. Naprężenie jest przykładane przez względne osiowe przemieszczenie klinów. Kliny zwykłe są umieszczone pod kątem  $120 \div 135^\circ$ .

### Połączenia wpustami pryzmatycznymi (rys. 3.27)

Przy przekazywaniu momentu obrotowego na powierzchniach bocznych klinów i rowków występują naprężenia ściskające  $\sigma_c$ , a w przekroju poprzecznym klina naprężenia ścinające  $\tau_{zer}$ . Ponieważ wymiary wpustów i rowków w normie są dobrane zgodnie z warunkiem wytrzymałości na ściskanie, podstawowym obliczeniem jest obliczenie na ściskanie. Obliczenia na ścinanie w większości przypadków nie są przeprowadzane.



Rys. 3.27. Schemat obliczeniowy połączenia wpustem pryzmatycznym

Przy dokładnych obliczeniach warunek wytrzymałości wygląda następująco:

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{d(0,95h - t)l_r} \leq k_c,$$

gdzie  $T$  – moment skręcający, Nm;

$d$  – średnica wału, mm;

$h$  – wysokość wpustu, mm;

$t$  – głębokość rowka na wale, mm ( $h, i t$  z tabeli D.11);

$l_r$  – robocza długość klina, mm:

– dla klinów z okrągłymi krawędziami  $l_r = l - b$  (rys. 3.28, c);

– dla klinów z płaskimi krawędziami  $l_r = l$  (rys. 3.28, a);

– dla klinów z jednym płaskim końcem i jednym zaokrąglonym

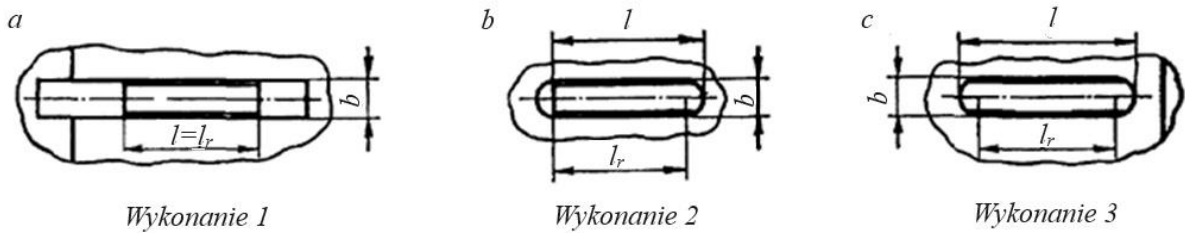
$l_r = l - \frac{b}{2}$  (rys. 3.28, b),

gdzie  $l$  – całkowita długość klina (tabela D.12), mm;

$b$  – szerokość wpustu, mm;  
 0,95 – współczynnik uwzględniający zmniejszenie wysokości roboczej klina na wysokość fazowania,  $f \approx 0,05h$ .

Przy średniej dokładności obliczeń warunek wytrzymałości wygląda następująco:

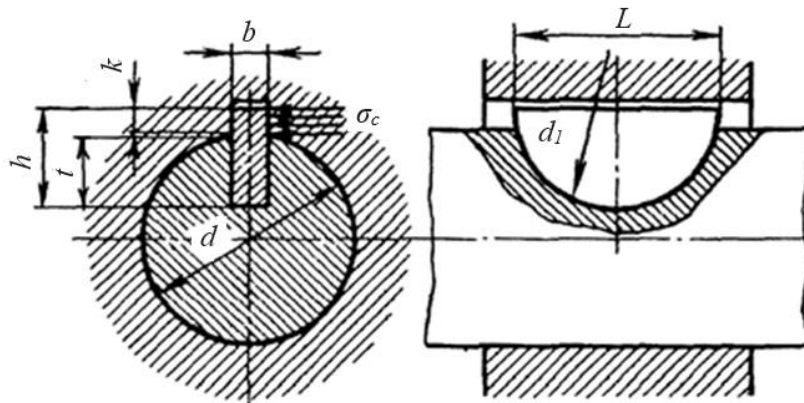
$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{d(h-t)l_r} \leq k_c$$



Rys. 3.28. Podstawowe typy wpustów pryzmatycznych

### Połączenie wpustem czółenkowym (rys. 3.29)

Takie połączenie jest sprawdzane na wytrzymałość na ściskanie i ścinanie, ponieważ taki klin jest wąski (wysokość jest istotnie większa od szerokości klina) i występuje niebezpieczeństwo ścinania.



Rys. 3.29. Schemat obliczeniowy połączenia wpustem czółenkowym

Warunek wytrzymałości na ściskanie:

$$\sigma_c = \frac{2T10^3}{d(h-t)l} \leq k_c,$$

gdzie  $h$  – wysokość wpustu, mm;  
 $t$  – głębokość rowka na wale, mm;  
 $l$  – długość klina, mm.

Warunek wytrzymałości na ścinanie może być również zastosowany do klinów pryzmatycznych:

$$\tau_{sc} = \frac{2T10^3}{dbl} \leq k_t,$$

gdzie  $b$  – szerokość klina, mm;

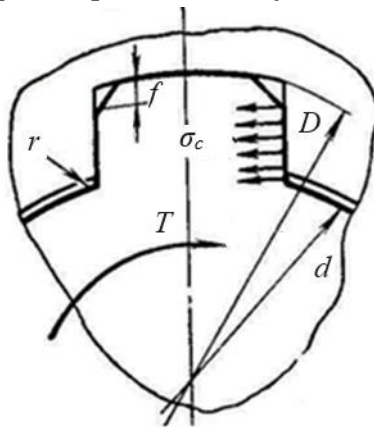
$k_t$  – dopuszczalne naprężenia ścinające, MPa (tabela D.9);

dla klinów pryzmatycznych zamiast  $l$  używana jest  $l_r$  – długość robocza klina, mm.

Rozmiary wpustów (w tym również długość) i rowków dobiera się w zależności od średnicy wału PN 85008 (tabela D.13). Krawędzie klina są krawędziami roboczymi.

### Połączenia wielowypustowe

Podstawowym kryterium wydajności połączeń wielowypustowych (rys. 3.30) jest **wytrzymałość**. Połączenia wielowypustowe ulegają awarii z powodu uszkodzenia powierzchni roboczych wypustów: zużycia, zgniatania, zatarcia i złamania wałów wielowypustowych i zębów. Podstawowe wymiary połączenia dobiera się z tabel znormalizowanych, w zależności od średnicy wału, a następnie sprawdza się obliczeniowo.



Rys. 3.30. Schemat obliczeniowy połączeń wielowypustowych

Wymiary zębów w normach są przyjęte z warunku wytrzymałości na ściskanie, dlatego podstawowym obliczeniem sprawdzającym połączenia wielowypustowe jest obliczenie ich na ściskanie. Nie sprawdza się połączeń wielowypustowych na ścinanie. Przy obliczeniach na wytrzymałość zakłada



się, że w bocznych powierzchniach klinów obciążenia są rozłożone równomiernie, ale ze względu na niedokładności produkcji, w pracy bierze udział 0,75 ogólnej liczby klinów.

Warunek wytrzymałości połączenia wielowypustowego na ściskanie:

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{0,75z d_{sr} h l} \leq k_c,$$

gdzie  $T$  – moment skręcający, Nm;

0,75 – współczynnik uwzględniający nierównomierne obciążenie między wielowypustami;

$z$  – liczba wpustów;

$d_{sr}$  – średnia średnica połączenia, mm:

– dla profilu prostokątnego  $d_{sr} = \frac{D+d}{2}$ ;

– dla profilu ewolwentowego  $d_{sr} = m \cdot z$ ;

$D$  – zewnętrzna średnica klinów, mm;

$h$  – wysokość powierzchni kontaktu wpustów, mm:

– dla profilu prostokątnego  $h = \frac{D-d}{2} - 2 \cdot f$ ;

– dla profilu ewolwentowego  $f = m$ ;

$f$  – fazowanie klina;

$l$  – długość powierzchni kontaktu zębów, która jest równa długości piasty, mm;

$k_c$  – dopuszczalne naprężenia ściskające materiału klina, MPa (tabela D.10).

Wymiary  $D, d, z, m, f$  dobierane są z tabel D.14 i D.15.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.16.** Sprawdzić warunek wytrzymałości w połączeniach utworzonych:

1. klinem czopowym (rys. 3.25);
  2. klinem pryzmatycznym z zaokrąglonymi krawędziami (rys. 3.27 i rys. 3.28, c);
  3. klinem czółenkowym (rys. 3.29);
  4. wielowypustami o profilu prostokątnym (tabela D.14);
  5. wielowypustami o profilu ewolwentowym (tabela D.15),
- jeżeli: moment skręcający  $T = 1,2$  kNm; średnica wału  $d = 40$  mm; szerokość piasty  $B = 60$  mm; materiał piasty – stal. Połączenia nieruchome, obciążenie zmienne; rowki przejściowe; powierzchnie bez obróbki cieplnej.

*Dane:*

$$T = 1,2 \text{ kNm}$$

$$d = 40 \text{ mm}$$

$$B = 60 \text{ mm}$$

materiał – stal

rowki przejściowe

obciążenie zmienne

połączenie nieruchome

*Szukane:*

$$\sigma_c - ?$$

$$\tau_{sc} - ?$$

### Rozwiązanie

1. Zapisujemy warunki wytrzymałości w zależności od rodzaju połączenia:

a) wpust czopowy

$$\sigma_c = \frac{4T \cdot 10^3}{dd_k l_k} \leq k_c$$

b) wpust pryzmatyczny

$$\sigma_c = \frac{2T10^3}{d(h-t)l_r} \leq k_c$$

c) wpust czółenkowy

$$\sigma_c = \frac{2T10^3}{d(h-t)l} \leq k_c$$

$$\tau_{sc} = \frac{2T10^3}{dbl} \leq k_c$$

d) połączenia wielowypustowe

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{0,75zd_{\xi_r}hl} \leq k_c$$

2. Określamy nieznane wartości niezbędne do obliczenia warunku wytrzymałości

2.1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla klinów:

- z uwzględnieniem charakteru połączeń, obciążenia i materiału piasty z tabeli D.9:  $k_c = 100$  MPa;  $k_t = 70$  MPa.

2.2. Określamy naprężenia dopuszczalne dla połączeń wypustowych:

- z uwzględnieniem charakteru połączenia, obciążenia, materiału piasty oraz stanu powierzchni z tabeli D.10:  $k_c = 60$  MPa;

2.3. Określamy parametry geometryczne wpustów:

a) *czopowego*

- średnicę wpustu określamy z zależności:

$$D_k = (0,13 \div 0,16)d_w = (0,13 \div 0,16) \cdot 40 = 5,0 \div 6,4 \text{ mm}$$

Biorąc pod uwagę duże obciążenie dla takiej średnicy wału, dla zmniejszenia osłabienia przekroju wału przyjmujemy średnicę wpustu

$$d_k = 10 \text{ mm}$$

- długość wpustu przyjmujemy równą szerokości piasty elementu

$$l_k = B = 60 \text{ mm}$$

b) *pryzmatycznego z zaokrąglonymi krawędziami*

- dla średnicy wału  $d = 40$  mm z tabeli D.11 wypisujemy  $b = 12$  mm;  $h = 8$  mm;  $t = 5$  mm.

- długość wpustu przyjmujemy z uwzględnieniem szerokości piasty elementu dla standardowego szeregu długości z tabeli D.12:  $l = 56$  mm.

Biorąc pod uwagę to, że klin ma zaokrąglone krawędzie, długość robocza będzie wynosić  $l_r = l - b = 56 - 12 = 44$  mm.

c) *czótenkowego*

- dla średnicy wału  $d = 40$  mm z tabeli D.13 wypisujemy:  $b = 12$  mm;  $h = 19$  mm,  $l = 59,1$  mm;  $t = 16$  mm.

2.4. Określamy parametry geometryczne połączenia wielowypustowego:

a) *o profilu prostoliniowym*

Biorąc pod uwagę duże obciążenie dla takiej średnicy wału, przyjmujemy ciężką serię. Dla średnicy wału  $D = 40$  mm (zewnątrzną średnicę połączenia wielowypustowego oznacza się  $D$ ) z tabeli D.14 wypisujemy

$$z \times d \times D = 10 \times 32 \times 42 \text{ mm}; f = 0,4 \text{ mm.}$$

- długość wpustów przyjmujemy równą szerokości piasty  $l = B = 60$  mm.

– średnia średnica połączenia:

$$d_{sr} = \frac{D + d}{2} = \frac{40 + 32}{2} = 36 \text{ mm}$$

– wysokość powierzchni kontaktu klinów:

$$h = \frac{D - d}{2} - 2 \cdot f = \frac{40 - 32}{2} - 2 \cdot 0,4 = 3,2 \text{ mm}$$

*b) o profilu ewolwentowym*

Dla średnicy wału  $d = 40 \text{ mm}$  z tabeli D.15 wypisujemy  $z = 18$ ;  $m = 2 \text{ mm}$  (z uwzględnieniem dużego obciążenia). Długość klinów przyjmujemy równą szerokości piasty  $l = B = 60 \text{ mm}$ .

– średnia średnica połączenia:

$$d_{sr} = m \cdot z = 2 \cdot 18 = 36 \text{ mm}$$

– wysokość powierzchni kontaktu wpustów:

$$h \approx m = 2 \text{ mm}$$

3. Określamy obliczeniowe naprężenia i porównujemy je z dopuszczalnymi:

*a) wpust czopowy*

$$\sigma_c = \frac{4T \cdot 10^3}{dd_k l_k} = \frac{4 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{40 \cdot 10 \cdot 60} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 200 \text{ MPa} > k_c = 100 \text{ MPa}$$

warunek nie jest spełniony

*b) wpust pryzmatyczny*

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{d(h-t)l_r} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{40 \cdot (8-5) \cdot 44} = 455 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 455 \text{ MPa} > k_c = 100 \text{ MPa}$$

warunek nie jest spełniony

*c) wpust czółenkowy*

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{d(h-t)l} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{40 \cdot (19-16) \cdot 59,1} = 339 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 339 \text{ MPa} > k_c = 100 \text{ MPa}$$

warunek nie jest spełniony

$$\tau_{sc} = \frac{2T \cdot 10^3}{dbl} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{40 \cdot 12 \cdot 59,1} = 85 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 85 \text{ MPa} > k_t = 70 \text{ MPa}$$

warunek nie jest spełniony

*d) połączenia wielowypustowe*

– o profilu prostoliniowym

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{0,75 \cdot 10 \cdot 36 \cdot 3,2 \cdot 60} = 46 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 46 \text{ MPa} < k_c = 60 \text{ MPa}$$

warunek wytrzymałości jest spełniony

– o profilu ewolwentowym

$$\sigma_c = \frac{2T \cdot 10^3}{0,75z d_{sr} h l} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{0,75 \cdot 18 \cdot 36 \cdot 2 \cdot 60} = 41 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 41 \text{ MPa} < k_c = 60 \text{ MPa}$$

warunek wytrzymałości jest spełniony

*Wniosek:* Dla założonego obciążenia i trybu pracy można zastosować tylko połączenia wielowypustowe.

**Przykład 3.17.** Określić moment skręcający, który może przekazać połączenie wpustem czółenkowym (rys. 3.29) przy średnicy wału  $d = 25$  mm. Materiał piasty – stal, obciążenie stałe.

*Dane:*

$$d = 25 \text{ mm}$$

piasta – stal

obciążenie stałe

*Szukane:*

$$[T] - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Określamy parametry geometryczne połączenia.

Z tabeli D.13 dla średnicy wału  $d = 25$  mm przyjmujemy  $b = 8$ ;  $h = 11$  mm;  $l = 27,3$  mm;  $t = 8$  mm.

2. Określamy dopuszczalny moment skręcający:

a) z warunku wytrzymałości na ściskanie:

Z tabeli D.9 przyjmujemy  $k_c = 150$  MPa;  $k_t = 100$  MPa;

$$[T] \leq \frac{d(h-t)lk_c}{2} = \frac{25 \cdot (11-8) \cdot 27,3 \cdot 150}{2} = 153,5 \cdot 10^3 = 153 \text{ Nm}$$

b) z warunku wytrzymałości na ścinanie:

$$[T] \leq \frac{dblk_t}{2} = \frac{25 \cdot 8 \cdot 27,3 \cdot 100}{2} = 273 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 273 \text{ Nm}$$

*Odpowiedź:* Największy moment, jaki może przenieść połączenie wpustowe czółenkowe  $[T] \leq 153,5$  Nm (przyjmujemy mniejszy).

**Przykład 3.18.** Z warunku wytrzymałości określić długość pryzmatycznego wpustu z zaokrąglonymi krawędziami (rys. 3.28, a). Moment skręcający  $T = 290$  Nm, średnica wału  $d = 40$  mm, materiał piasty – żeliwo, obciążenie zmienne.

*Dane:*

$$T = 290 \text{ Nm}$$

$$d = 40 \text{ mm}$$

materiał – żeliwo

obciążenie zmienne

*Szukane:*

$$l - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Określamy parametry geometryczne połączenia.

Z tabeli D.12 dla średnicy wału  $d = 40$  mm przyjmujemy

$$b = 12; h = 11 \text{ mm}; t = 7 \text{ mm}.$$

2. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Z tabeli D.9 przyjmujemy  $k_c = 60 \text{ MPa}$ .

3. Z warunku wytrzymałości na ściskanie określamy szerokość wpustu

$$l_r \geq \frac{2T \cdot 10^3}{d(h-t)k_c} = \frac{2 \cdot 290 \cdot 10^3}{40 \cdot (11 - 7) \cdot 60} = 60,4 \text{ mm}$$

Wartość ostateczną przyjmujemy z uwzględnieniem standardowego szeregu długości, zgodnie z formą krawędzi klina, wtedy

$$l = l_k + b = 60,4 + 12 = 72,4 \text{ mm}$$

Biorąc pod uwagę standardowe wartości długości klinów, przyjmujemy

$$l = 80 \text{ mm}.$$

*Odpowiedź:*  $l = 80 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.19.** Sprawdzić wytrzymałość połączenia wpustowego z klinem z płaskimi krawędziami (rys. 3.24). Średnica wału  $d = 80 \text{ mm}$ , moment skręcający  $T = 2000 \text{ Nm}$ , długość piasty  $l = 50 \text{ mm}$ , materiał piasty – żeliwo, obciążenie stałe.

*Dane:*

$$T = 2000 \text{ Nm}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

$$l = 50 \text{ mm}$$

materiał – żeliwo

obciążenie stałe

*Szukane:*

$$R_c - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Określamy geometryczne parametry połączenia.

Zgodnie z ISO/R 774:1996-80 dla średnicy wału  $d = 80 \text{ mm}$  przyjmujemy  $b = 22 \text{ mm}$ ;  $h = 14 \text{ mm}$ ; długość roboczą przyjmujemy mniejszą o 5 mm od długości piasty  $l_r = 45 \text{ mm}$ .

2. Określamy naprężenia dopuszczalne.

Z tabeli D.9 przyjmujemy  $k_c = 90 \text{ MPa}$ .

3. Określamy obliczeniowe naprężenia i porównujemy je z dopuszczalnymi (współczynnik tarcia stali o żeliwo  $f = 0,18$ ):

$$\sigma_c = \frac{12T \cdot 10^3}{(b + 6fd)b \cdot l_r} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 10^6}{(22 + 6 \cdot 0,18 \cdot 80)22 \cdot 45} = 224 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 224 \text{ MPa} > k_c = 90 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałości nie jest spełniony.

*Wniosek:* Dane połączenie nie będzie pracować w tych warunkach.

**Zadania do samodzielnego rozwiązywania**  
(obliczeniowe)

**Zadanie 3.7.** Sprawdzić wytrzymałość połączenia wpustowego. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.7.

Tabela 3.7. Dane wejściowe do zadania 3.7

Nr war.	Średnica wału $d$ , mm	Moment skręcający $T$ , Nm	Typ wpustu	Materiał piasty	Długość piasty $l$ , mm	Charakter obciążenia
1	45	100	Pryzmatyczny z zaokrąglonymi krawędziami	Stal	60	Stałe
2	55	128			70	
3	75	205			70	
4	60	145			50	
5	85	230			75	
6	30	95	Okrągły	Żeliwo	-	Zmienne
7	50	125			-	
8	70	260			-	
9	60	300			-	
10	80	450			-	
11	15	75	Czołenkowy	Stal	40	Stałe
12	20	80			50	
13	25	60			60	
14	32	110			40	
15	42	220			60	
16	115	400	Pryzmatyczny z płaskimi krawędziami	Żeliwo	80	Zmienne
17	52	163			60	
18	62	95			75	
19	20	80			40	
20	28	90			100	
21	18	65	Czołenkowy	Stal	40	Stałe
22	44	85			50	
23	30	50			42	
24	35	145			38	
25	12	65			60	
26	165	620	Pryzmatyczny z płaskimi krawędziami po jednej stronie i zaokrąglonym końcem po drugiej	Żeliwo	75	Zmienne
27	100	530			110	
28	125	480			115	
29	90	280			130	
30	145	800			95	

**Zadanie 3.8.** Z warunku wytrzymałości określić największy moment, który może przekazać zadane połączenie. Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.8.

Tabela 3.8. Dane wejściowe do zadania 3.8

Nr war	Średnica wału $d$ , mm	Typ klina	Materiał piasty	Długość piasty $l$ , mm	Charakter obciążenia	Charakter połączenia
1	30	Pryzmatyczny z płaskimi krawędziami z jednej strony i zaokrąglonym końcem z drugiej	Żeliwo	80	Zmienne	Nieruchome
2	50			60		
3	70			75		
4	60			40		
5	80			100		
6	18	Czółenkowy	Stal	40	Stałe	Nieruchome
7	35			50		
8	44			60		
9	30			40		
10	12			60		
11	75	Okrągły	Żeliwo	75	Stałe	Nieruchome
12	60			110		
13	85			115		
14	30			130		
15	50			95		
16	65	Pryzmatyczny z płaskimi krawędziami	Żeliwo	75	Stałe	Nieruchome
17	70			40		
18	85			100		
19	125			40		
20	115			50		
21	22	Czółenkowy	Stal	-	Stałe	Nieruchome
22	32			-		
23	42			-		
24	16			-		
25	20			-		
26	45	Pryzmatyczny z zaokrąglonymi krawędziami	Stal	40	Zmienne	Ruchome
27	35			55		
28	95			65		
29	100			90		
30	125			85		



**Zadanie 3.9.** Sprawdzić wytrzymałość połączenia wielowypustowego. Warunki eksploatacji są dobre. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.9.

Tabela 3.9. Dane wejściowe do zadania 3.9

Nr war.	Średnica wału $d$ , mm	Moment skręcający $T$ , Nm	Profil wypustu	Powierzchnia zębów	Długość piasty $l$ , mm	Charakter obciążenia	Charakter połączenia
1	11	70	Prostoliniowy	Bez obróbki cieplnej	60	Stałe	Nieruchome
2	82	110			70		
3	62	120			70		
4	32	130			50		
5	112	180			75		
6	120	190	Ewolwencyjny	Z obróbką cieplną	75	Zmienne	Ruchome z obciążeniem
7	200	800			110		
8	15	65			115		
9	70	230			130		
10	30	195			95		
11	21	300	Prostoliniowy	Bez obróbki cieplnej	40	Wibracje o wysokiej częstotliwości	Nieruchome
12	16	135			50		
13	56	420			60		
14	92	220			40		
15	46	175			60		
16	170	330	Ewolwencyjny	Z obróbką cieplną	40	Stałe	Nieruchome
17	22	115			50		
18	65	135			60		
19	12	85			40		
20	140	210			60		
21	13	100	Prostoliniowy	Bez obróbki cieplnej	60	Stałe	Nieruchome
22	16	110			70		
23	23	120			70		
24	72	145			50		
25	102	185			75		
26	45	165	Ewolwencyjny	Z obróbką cieplną	40	Zmienne	Ruchome z obciążeniem
27	50	140			50		
28	95	400			42		
29	130	620			60		
30	13	160			38		

### 3.4. Obliczanie kinematycznych i siłowych parametrów przekładni

#### Wiadomości ogólne

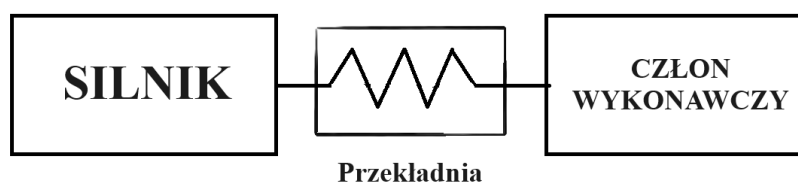
**Przekładnie** to mechanizmy, które służą do przenoszenia energii na odległość, zwykle z transformacją parametrów i rodzaju ruchu.

W zależności od sposobu przekazania energii wyróżnia się przekładnie *mechaniczne, elektryczne, pneumatyczne, hydrauliczne i kombinowane*.

W niniejszym skrypcie omawiane są tylko przekładnie mechaniczne.

**Przekładnia mechaniczna** to mechanizm, który przekształca parametry ruchu silnika i przenosi ruch do roboczych części maszyny.

**Mówiąc prościej, przekładnia mechaniczna** to ogniwo pośrednie między silnikiem a częścią wykonawczą maszyny (rys. 3.31).



Rys. 3.31. Miejsce przekładni w maszynie

#### Podstawowe wzory obliczeniowe

Każda przekładnia mechaniczna charakteryzuje się parametrami *geometrycznymi, siłowymi i kinematycznymi*.

**Parametry geometryczne** przekładni obejmują wymiary jej elementów (m, mm): średnice ( $d$ ); długości ( $l$ ); szerokości – ( $b$ ); odległości międzyosiowe ( $a$ ) i inne.

**Parametry siłowe** przekładni obejmują: siły ( $F, N$ ); momenty ( $T(M), N \cdot m$ ); moce ( $N(P), W$ ).

**Parametry kinematyczne** przekładni obejmują: prędkość liniową [m/s], prędkość obwodowa [m/s]; prędkość kątową ( $\omega, \text{rad/s}$  albo  $\text{s}^{-1}$ ); prędkość obrotową ( $n, \text{ob./min}$  albo  $\text{min}^{-1}$ ).

Pochodne parametrów podstawowych to:

*Sprawność* –  $\eta$ :

pokazuje wysokość strat w przekładni i charakteryzuje jej wydajność.

$$\eta = \frac{A_u}{A_z} = \frac{N_2}{N_1} < 1$$

gdzie  $A_u$  – praca użyteczna – praca przekazywana z maszyny do otoczenia;

$A_z$  – praca zużyta – praca zużyta do wykonania określonej pracy (z uwzględnieniem pracy użytecznej i pracy na pokonanie oporu, np. oporu tarcia, powietrza itd.);  
 $N_1$  – moc na wejściu do przekładni, W;  
 $N_2$  – moc na wyjściu z przekładni, W.

Sprawność przekładni wielostopniowych albo napędów składających się z kilku szeregowo połączonych elementów przekładni albo przekładni, jest określana według wzoru:

$$\eta_{og} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \eta_n,$$

gdzie  $\eta_1, \eta_2, \eta_n$  – sprawność oddzielnej pary kinematycznej (para kół zębatych, kół łańcuchowych, kół pasowych itp.) albo przekładni (pasowej, zębatej i in.) i innych elementów kinematycznych (łożysk, sprzęgieł).

*Przełożenie ( $i$ )* to stosunek prędkości kątowej elementu napędzającego do prędkości kątowej elementu napędzanego. Przełożenie może być większe, mniejsze albo równe jedności.

*Stosunek ( $u$ )* przekładni to stosunek większej prędkości kątowej do mniejszej. Przełożenie przekładni nie może być mniejsze od jedynki. Przekładnie, w których  $i > 1$  i  $n_1 > n_2$  nazywane są **redukcyjnymi**, a te w których  $i < 1$  i  $n_1 < n_2$  nazywane są **multiplikatorami (akceleratorami)**.

Najbardziej rozpowszechnione są przekładnie redukcyjne, ponieważ prędkość obrotowa elementów ruchomych maszyn w większości przypadków jest mniejsza od prędkości obrotowej wału silnika. W niniejszym skrypcie omawiane są przekładnie redukcyjne.

W przekładniach redukcyjnych *prędkość i moc przy przekazaniu ruchu od silnika do części wykonawczej maszyny zmniejsza się, a moment się zwiększa. Moc zmniejsza się o wielkość strat, charakteryzujących sprawność. Prędkość się zmniejsza, a moment się zwiększa o wartość przełożenia.*

W przekładniach redukcyjnych *wymiary elementów napędowych są mniejsze od elementów napędzanych.*

Przełożenie i stosunek dla różnych przekładni redukcyjnych można obliczać pojedynczo albo według zależności:

$$i(u) = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_1} \cdot \frac{T_2}{\eta T_1},$$

gdzie  $d_1, d_2$  – średnice napędowego i napędzanego elementów przekładni, mm (wały, koła pasowe, koła zębate itp.);

\* – stosunek liczby zębów napędzanego i napędzającego łańcucha przekładni łańcuchowej. Dla przekładni zębatych dla pary kół liczba ta nazywana jest przełożeniem i oznacza się ją przez literę  $u$ ;

$T_1, T_2$  – moment obrotowy odpowiednio napędzającego i napędzanego elementu przekładni, Nm;

$\eta$  – sprawność kinematyczna

Przełożenie przekładni albo napędów składających się z kilku szeregowo połączonych elementów przekładni określa wzór:

$$i_{og} = i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_n \text{ albo } u_{og} = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

### **Podstawowe wzory obliczeniowe i zależności dla przekładni mechanicznych**

Zależność prędkości kątowej od prędkości obrotowej

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \text{ skąd } n = \frac{30\omega}{\pi} \approx 9,55\omega,$$

gdzie 9,55 to przybliżony wynik dzielenia 30 przez  $\pi$ .

Zależność prędkości obrotowej od prędkości kątowej

$$v = \omega \frac{d}{2 \cdot 1000}, \text{ gdzie } \omega = \frac{2 \cdot 1000 \cdot n}{d},$$

gdzie  $d$  – średnica elementu przekładni, mm (wał, koło pasowe, koło zębate itp.); 1000 – współczynnik konwersji milimetrów na metry.

Zależność prędkości obwodowej od częstotliwości obrotów

$$v = \frac{\pi n d}{60 \cdot 1000}, \text{ m/s skąd } n = \frac{60 \cdot 1000 \cdot v}{\pi d}, \text{ min}^{-1}$$

Wyrażenie mocy przez siłę obrotową albo liniową i prędkość obrotową i liniową

$$N = Fv, \text{ skąd } F = \frac{N}{v},$$

gdzie  $F$  – siła, N;

$v$  – obrotowa albo liniowa prędkość, m/s.

Wyrażenie mocy przez moment obrotowy i prędkość kątową

$$N = T\omega, \text{ W skąd } T = \frac{N}{\omega}, \text{ Nm},$$

gdzie  $T$  – moment obrotowy, Nm.

Wyrażenie mocy przez moment obrotowy i prędkość obrotową

$$N = \frac{Tn}{9,55}, \text{ skąd } T = \frac{9,55N}{n}$$

Moc silnika przy ruchu postępowym i obrotowym

$$N_{sil} = \frac{Fv}{\eta_{og}} = \frac{T\omega}{\eta_{og}},$$

gdzie  $\eta_{og}$  – ogólna sprawność przekładni.

Zależność mocy na elemencie napędzającym do mocy na elemencie napędzanym przy przekazaniu ruchu od silnika do członu wykonawczego maszyny:

$$N_2 = N_1 \cdot \eta,$$

gdzie  $\eta$  – sprawność kinematycznej pary przekładni.

Zależność momentu na elemencie napędzającym od momentu na elemencie napędzanym w kierunku przepływu mocy od silnika do członu wykonawczego maszyny

$$T_2 = T_1 \cdot u \cdot \eta, \text{ skąd } T_1 = \frac{T_2}{u \cdot \eta}$$

Zależność siły obwodowej i momentu obrotowego

$$F_t = \frac{2T}{d} \text{ skąd } T = \frac{F_t d}{2}$$

tutaj  $d$  w [m],  $T$  – [Nm].

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.20.** Określić kątową i obrotową prędkość wału o średnicy  $d = 80$  mm, który obraca się z prędkością  $n = 600$  min<sup>-1</sup>.

*Dane:*

$$d = 80 \text{ mm}$$

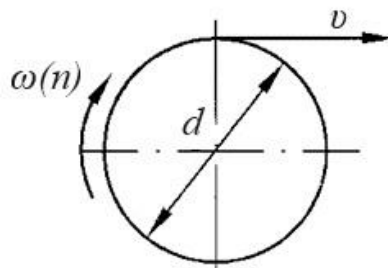
$$n = 600 \text{ min}^{-1}$$

*Szukane:*

$$v - ?, \omega ?$$

*Rozwiązanie*

Sporządzamy schemat obliczeniowy (rys. 3.32)



Rys. 3.32. Schemat do obliczeń wału z przykładu 3.20

Określamy prędkość obrotową i kątową:

$$v = \frac{\pi n d}{60 \cdot 1000} = \frac{3,14 \cdot 600 \cdot 80}{60 \cdot 1000} = 2,5, \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 63, \text{ s}^{-1}$$

*Odpowiedź:*  $v = 2,5$  m/s;  $\omega = 63$  s<sup>-1</sup>.

**Przykład 3.21.** Obliczyć prędkość kątową i obrotową kół pasowych przekładni, jeżeli: średnice kół pasowych  $D_1 = 100$  mm i  $D_2 = 400$  mm, prędkość obrotowa napędowego koła pasowego  $n_1 = 100$  min<sup>-1</sup>.

*Dane:*

$$D_1 = 100 \text{ mm}$$

$$D_2 = 400 \text{ mm}$$

$$n_1 = 100 \text{ min}^{-1}$$

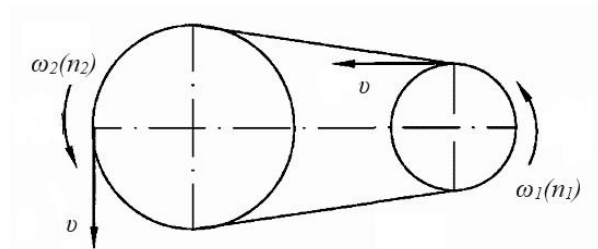
*Szukane:*

$$v_1 - ?, v_2 - ?$$

$$\omega_1 - ?, \omega_2 - ?$$

*Rozwiązanie*

Sporządzamy schemat obliczeniowy (rys. 3.33).



Rys. 3.33. Schemat obliczeniowej przekładni pasowej

1. Określamy obrotową i kątową prędkość na kole napędowym:

$$v_1 = \frac{\pi n_1 D_1}{60 \cdot 1000} = \frac{3,14 \cdot 100 \cdot 100}{60 \cdot 1000} = 0,52 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,5 \text{ s}^{-1}$$

2. Określamy przełożenie przekładni:

$$u = \frac{D_2}{D_1} = \frac{400}{100} = 4$$

3. Określamy obrotową i kątową prędkość na kole napędzanym:

$$v_2 = v_1 = 0,52 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u} = \frac{10,5}{4} = 2,63 \text{ s}^{-1}$$

Odpowiedź:  $v_1 = v_2 = 0,52 \text{ m/s}$ ;  $\omega_1 = 10,5 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 2,63 \text{ s}^{-1}$ .

**Przykład 3.22.** Określić moment obrotowy i moc na roboczym wale maszyny jeśli: moc silnika  $N_{\text{sil}} = 7,5 \text{ kW}$ ; moment obrotowy silnika  $T_{\text{sil}} = 200 \text{ Nm}$ ; przełożenie przekładni: przekładni pasowej  $u_{p,p} = 2$ ; przekładni zębatej  $u_{p,z} = 15$ ; sprawność: przekładni pasowej  $\eta_{p,p} = 0,96$ ; przekładni zębatej -  $\eta_{p,z} = 0,95$ ; sprzęgła  $\eta_s = 0,98$ .

*Dane:*

$$N_{\text{sil}} = 7,5 \text{ kW}$$

$$T_{\text{sil}} = 200 \text{ Nm}$$

$$u_{p,p} = 2$$

$$u_{p,z} = 15$$

$$\eta_{p,p} = 0,96$$

$$\eta_{p,z} = 0,95$$

$$\eta_s = 0,98$$

*Szukane:*

$$N_p - ? \quad T_p - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Określamy moc na wale wyjściowym .

- określamy ogólną sprawność:

$$\eta_{og} = \eta_{p.p} \cdot \eta_{p.z} \cdot \eta_s = 0,96 \cdot 0,95 \cdot 0,98 = 0,89,$$

- moc na wale roboczym maszyny

$$N_p = N_{sil} \cdot \eta_{og} = 7,5 \cdot 0,89 = 6,7 \text{ kW},$$

co świadczy o tym, że moc od silnika do wału roboczego zmniejsza się o wielkość strat charakteryzujących sprawność.

2. Określamy moment obrotowy na wale roboczym maszyny:

- określamy ogólne wartości:

$$u_{og} = u_{p.p} \cdot u_{p.z} = 2 \cdot 15 = 30,$$

- stąd moment na roboczym wale maszyny

$$T_p = T_{sil} \cdot u_{og} \cdot \eta_{og} = 200 \cdot 30 \cdot 0,89 = 5340 \text{ Nm},$$

co świadczy o tym, że moment obrotowy zwiększa się o wartość przełożenia przekładni ogólnej i zmniejsza się o ogólną sprawność.

*Odpowiedź:*  $N_p = 6,7 \text{ kW}$ ;  $T_p = 5340 \text{ Nm}$ .

**Przykład 3.23.** Określić moc silnika, jeśli: siła obrotowa  $F_t = 10 \text{ kN}$ ;  $d = 300 \text{ mm}$ ; prędkość obrotowa  $n = 750 \text{ min}^{-1}$ ; sprawność ogólna  $\eta_{og} = 0,9$ .

*Dane:*

$$F_t = 10 \text{ kN}$$

$$d = 300 \text{ mm}$$

$$n = 750 \text{ min}^{-1}$$

$$\eta_{og} = 0,9$$

*Szukane:*

$$N_{sil} - ?$$

### *Rozwiązanie*

1. Wzór na określenie mocy silnika w ruchu obrotowym:

$$N_{sil} = \frac{T\omega}{\eta_{og}}$$

2. Określamy niewiadome we wzorze:

a) określamy moment obrotowy:

$$T = 0,5F_t \cdot d = 0,5 \cdot 10000 \cdot 300 = 15 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 1,5 \text{ kNm},$$

b) określamy prędkość kątową:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5 \text{ min}^{-1}$$

3. Określamy moc obliczeniową w silniku:

$$N_{sil} = \frac{1,5 \cdot 78,5}{0,9} = 131$$

Określone wartości zaokrąglamy do najbliższej największej wartości znormalizowanej. Przyjmujemy  $N_{sil} = 150 \text{ kW}$ .

*Odpowiedź:*  $N_{sil} = 150 \text{ kW}$ .



**Przykład 3.24.** Określić siłę obrotową i liczbę obrotów na minutę, jeśli moc  $N = 15$  kW; średnica  $d = 80$  mm; prędkość obrotowa  $v = 8$  m/s.

*Dane:*

$$N = 15 \text{ kW}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

$$v = 8 \text{ m/s}$$

*Szukane:*

$$F_t - ? \quad n - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Określamy prędkość kątową:

$$\omega = \frac{2 \cdot 1000v}{d} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 8}{80} = 200 \text{ min}^{-1}$$

2. Określamy liczbę obrotów na minutę:

$$n = \frac{30\omega}{\pi} \approx 9,55\omega = 9,55 \cdot 200 = 1910 \text{ min}^{-1}$$

3. Ze wzoru na moc określamy moment obrotowy:

$$T = \frac{N}{\omega} = \frac{15000}{200} = 75 \text{ Nm}$$

4. Określamy siłę kołową:

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2 \cdot 75}{0,08} = 1875 \text{ N} \text{ albo } F_t = \frac{N}{v} = \frac{15000}{8} = 1875 \text{ N}$$

*Odpowiedź:*  $F_t = 1875 \text{ N}$ ;  $n = 1910 \text{ min}^{-1}$ .

**Przykład 3.25.** Dobrać silnik elektryczny. Przeprowadzić kinematyczne i siłowe obliczenia napędu przekładni przenośnika łańcuchowego (rys. 3.34), który składa się z: silnika elektrycznego; przekładni pasowej; cylindrycznej przekładni jednostopniowej; sprzęgła; zębatki napędowej, której wał jest podparty na łożyskach ślizgowych. Siła ciągnąca łańcuch  $F_t = 20$  kN, prędkość liniowa łańcucha  $v = 1,2$  m/s, średnica koła napędowego  $D_3 = 500$  mm, średnice kół pasowych odpowiednio  $D_1 = 100$  mm i  $D_2 = 400$  mm.

*Dane:*

$$F_t = 20 \text{ kN}$$

$$D_1 = 100 \text{ mm}$$

$$D_2 = 400 \text{ mm}$$

$$D_3 = 500 \text{ mm}$$

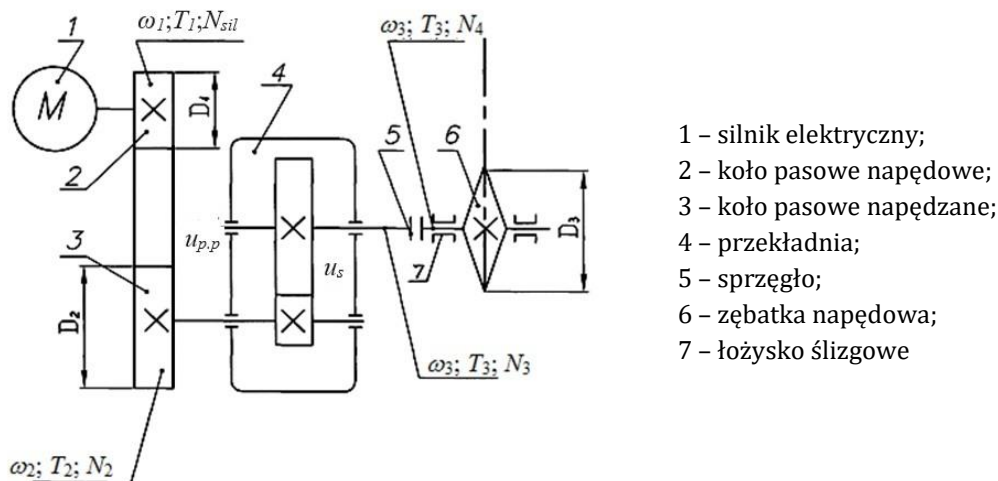
$$v = 1,2 \text{ m/s}$$

*Szukane:*

$$N_{sil} - ? \quad u - ? \quad T_i - ? \quad N_i - ?$$

*Rozwiązanie*

Sporządzamy schemat kinematyczny napędu przenośnika łańcuchowego.



Rys. 3.34. Schemat kinematyczny napędu przenośnika łańcuchowego

1. Określamy moc silnika napędu przenośnika łańcuchowego.

- w oparciu o schemat napędu określamy ogólną sprawność (rys. 3.34)

$$\eta_{og} = \eta_{p,p} \cdot \eta_p \cdot \eta_s \cdot \eta_{s,p}^2$$

Z tabeli D.17 przyjmujemy  $\eta_{p,p} = 0,96$ ;  $\eta_p = 0,97$ ;  $\eta_s = 0,98$ ;  $\eta_{s,p} = 0,98$ , wtedy

$$\eta_{og} = \eta_{p,p} \cdot \eta_p \cdot \eta_s \cdot \eta_{s,p}^2 = 0,96 \cdot 0,97 \cdot 0,98 \cdot 0,98^2 = 0,87$$

$$N_{sil} = \frac{F_t v}{\eta_{og}} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{0,87} = 27586 \text{ W} \approx 28 \text{ kW}$$

2. Dobieramy silnik.

Przy doborze silnika elektrycznego należy pamiętać, że im niższa prędkość obrotowa wału silnika, tym większe są jego wymiary, masa i koszt. Z kolei silniki wysokoobrotowe mają mniejsze wymiary, masę i koszt w porównaniu do silników niskoobrotowych o tej samej mocy. Jednak wraz ze wzrostem prędkości obrotowej silnika wzrasta ogólne przełożenie przekładni, a tym samym jej koszt. Dlatego zwykle zaleca się stosowanie silników o  $n_s = 1500 \text{ ob./min}$  w napędach bez obrotu rewersyjnego wału i  $n_s = 1000 \text{ ob./min}$  z obrotem rewersyjnym, gdzie  $n_s$  – synchroniczna prędkość silnika, ob./min. Przy doborze silnika elektrycznego o niskiej prędkości obrotowej może się zdarzyć, że jego moc znamionowa będzie się różnić od wymaganej. W takim przypadku należy wziąć pod uwagę dwie okoliczności: duży zapas mocy silnika doprowadza do zmniejszenia strat energii elektrycznej (zalecane niedociążenie nie większe niż 10 %), a przeciążenie prowadzi do przegrzania się silnika (dopuszczalne przeciążenie nie większe niż 5 %).

Warunek doboru silnika

$$N_{ob.sil} \leq N_{nom}$$

gdzie  $N_{ob.sil}$  – obliczeniowa moc silnika, kW;

$N_{nom}$  – znormalizowana moc wybranego silnika, kW.

W celu zmniejszenia wymiarów przekładni napędowych z tabeli D.18 przyjmujemy silnik typu 4A225M8U3, dla którego  $N_{sil} = 30$  kW, prędkość synchroniczna  $n_s = 750 \text{ min}^{-1}$ , poślizg  $s = 1,8\%$ . Dopuszczalne przeciążenie  $N_p = 31,5$  kW, dopuszczalne niedociążenie  $N_n = 27$  kW. W dalszych obliczeniach przyjmujemy moc obliczeniową.

Prędkość nominalna jest określana ze wzoru:

$$n = n_c \left(1 - \frac{s}{100}\right) = 750 \left(1 - \frac{1,8}{100}\right) = 736 \text{ min}^{-1}$$

3. Określamy parametry kinematyczne:

a) prędkość kątową na wale silnika elektrycznego (koło napędowe)

$$\omega_1 = \frac{\pi n_{sil}}{30} = \frac{3,14 \cdot 736}{30} = 77 \text{ s}^{-1}$$

b) prędkość kątową na szybkobieżnym wale przekładni (napędzane koło pasowe):

– określamy przełożenie przekładni pasowej

$$u_{p.p} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{400}{100} = 4$$
$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{p.p}} = \frac{77}{4} = 19,3 \text{ s}^{-1}$$

c) prędkość kątową wału koła napędowego (wał wyjściowy przekładni)

$$\omega_3 = \frac{2 \cdot 1000 \cdot v}{D_3} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1,2}{500} = 4,8 \text{ s}^{-1}$$

d) przełożenie przekładni

$$u_p = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{19,3}{4,8} = 4$$

e) ogólne przełożenie przekładni

$$u_{og} = u_{p.p} \cdot u_p = 4 \cdot 4 = 16$$

4. Określamy parametry siłowe

a) moment na wale silnika

$$T_1 = \frac{N_{sil} \eta_{og}}{\omega_1} = \frac{28000 \cdot 0,87}{77} = 316 \text{ Nm}$$

b) moment obrotowy na szybkim wale przekładni

$$T_2 = T_1 \cdot u_{p.p} = 316 \cdot 4 = 1264 \text{ Nm}$$

c) moment obrotowy na wale koła napędowego

$$T_3 = T_2 \cdot u_p = 1264 \cdot 4 = 5056 \text{ Nm}$$

albo  $T_3 = T_1 \cdot u_{og} = 316 \cdot 16 = 5056 \text{ Nm}$

*Odpowiedź:* silnik elektryczny 4A225M8U3:  $N_{sil} = 30 \text{ kW}$ ;  $n_s = 750 \text{ min}^{-1}$ ;  
 $n = 736 \text{ min}^{-1}$ ;  $N_{sil} = 28 \text{ kW}$ ;  $\omega_1 = 77 \text{ min}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 19,3 \text{ min}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 4,8 \text{ c}^{-1}$ ;  $u_{p,p}$   
 $= 4$ ;  $u_p = 4$ ;  $u_{og} = 16$ ;  $T_1 = 316 \text{ Nm}$ ;  $T_2 = 1264 \text{ Nm}$ ;  $T_3 = 5056 \text{ Nm}$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązywania (obliczeniowe)

**Zadanie 3.10.** Określić moc silnika. Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.10.

*Tabela 3.10. Dane wejściowe do zadania 3.10*

Nr war.	Obciążenie roboczego wału, kN	Średnica roboczego wału, mm	Prędkość obrotowa roboczego wału min <sup>-1</sup>	Sprawność ogólna
	$F_t$	$d$	$n$	$\eta_{og}$
1	7	40	300	0,9
2	6	45	315	0,93
3	5	50	425	0,88
4	8	55	520	0,95
5	9	60	635	0,96
6	10	65	552	0,97
7	11	70	722	0,91
8	12	75	433	0,75
9	14	80	638	0,78
10	16	85	551	0,82
11	17	90	665	0,93
12	13	95	530	0,94
13	3	35	815	0,76
14	4	55	918	0,80
15	5	60	1116	0,81
16	6	65	1114	0,85
17	3,5	50	1213	0,92
18	2,5	70	1344	0,93
19	14	75	1432	0,96
20	13	80	744	0,76
21	15	85	548	0,75
22	16	40	354	0,77
23	17	45	462	0,88
24	17,5	50	270	0,98
25	10,5	55	335	0,76
26	11,5	60	338	0,79
27	8,5	65	241	0,89
28	9,5	70	143	0,88
29	7,3	75	560	0,92
30	6,2	100	624	0,93

**Zadanie 3.11.** Dobrać silnik elektryczny. Przeprowadzić kinematyczne (określić  $u_i$ ,  $\omega_i$ ) i siłowe obliczenia napędu transportera taśmowego (określić  $T_i$ ,  $F_t$  kół pasowych), który składa się z: silnika elektrycznego, przekładni pasowej, dwustopniowego reduktora cylindrycznego, sprzęgła, bębna napędowego, wału opartego o łożyska ślizgowe. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.11.

Tabela 3.11. Dane wejściowe do zadania 3.11

Nr war.	Obciążenia na bębnie, kN	Średnica bębna, mm	Prędkość taśmy, m/s	Średnica koła pasowego, mm	Przekładnia koła pasowego
	$F_t$	$D_b$	$v_1$	$D_2$	$u_{p,p}$
1	7	400	0,315	250	1,4
2	6	450	0,4	273	1,2
3	5	500	0,5	285	1,3
4	8	550	0,63	300	1,6
5	9	600	0,8	410	1,8
6	10	650	1	315	1,9
7	11	700	1,25	320	2
8	12	750	1,6	340	2,3
9	14	800	2	360	2,4
10	16	850	2,5	400	2,6
11	17	900	3,15	450	2,8
12	13	950	4	550	2,1
13	3	650	5	480	3
14	4	550	6,3	430	2,8
15	5	600	0,63	365	2,6
16	6	650	0,8	390	2,2
17	3,5	500	1	410	3,1
18	2,5	700	1,25	420	2,5
19	14	750	1,6	430	2,9
20	13	800	0,4	440	2,4
21	15	850	0,5	460	1,8
22	16	600	0,63	315	2
23	17	750	0,8	340	2,5
24	17,5	500	2,1	350	2,7
25	10,5	550	2,8	360	2,9
26	11,5	600	0,85	380	3,1
27	8,5	650	0,65	400	3,3
28	9,5	700	0,75	410	3,4
29	7,3	750	2,8	420	3,6
30	6,2	1000	3	480	3,8

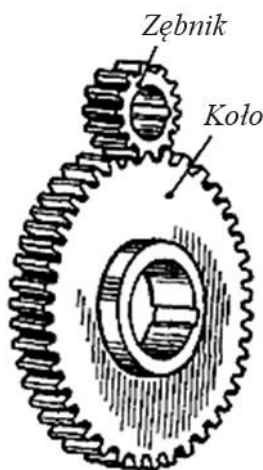
### 3.5. Obliczanie przekładni zębatych

#### Wiadomości ogólne

**Przekładnia zębata** to mechanizm, który przenosi lub przekształca ruch ze zmianą prędkości kątowej i momentu obrotowego.

Wszystkie pojęcia i definicje związane z geometrią i kinematyką przekładni zębatych są ustandaryzowane. Normy określają definicje, nazewnictwo i oznaczenia oraz metody obliczenia parametrów geometrycznych.

**Przekładnia zębata składa się** z dwóch kół (rys. 3.35) z zębami na powierzchni. Mniejsze z kół zębatych nazywane jest *zębnikiem*, większe – *kołem*. Definicja „koło zębate” jest ogólna. Parametrom zębnika przypisuje się indeks 1, parametrom koła – 2.



Rys. 3.35. Przekładnia zębata

Istnieją następujące rodzaje przekładni zębatych: *walcowe*, *stożkowe*, *ślimakowe*, *planetarne*, *szewronowe*, *faliste*, *faliste z zazębieniem Wildhabera-Nowikowa*. Walcowe przekładnie są najprostsze, najbardziej niezawodne i najczęściej stosowane. Inne przekładnie zębate są stosowane przy konieczności przenoszenia ruchu pod kątem lub przy wymogu kompaktowości napędu.

#### Dobór materiału i dopuszczalnych naprężeń

Wybór materiału kół zależy od wielkości, typu, charakteru obciążenia, warunków jego pracy, wymagań dotyczących wymiarów i masy, dostępności, ceny, sposobów uzyskania półfabrykatów i metody obróbki zębów.

Podstawowymi materiałami do produkcji kół zębatach są stale obrabiane cieplnie. Rzadziej są stosowane żeliwa i tworzywa sztuczne, a do przekładni ślimakowych mają zastosowanie są brązy i mosiądze.

W zależności od twardości powierzchni roboczych stalowe koła zębata można podzielić na dwie podstawowe grupy:

- a) o twardości  $HB \leq 350$  – normalizowane i ulepszone;
- b) o twardości  $HB \geq 350$  – hartowane, nawęglane, azotowane, azotonawęglane.

Mechaniczne własności wybranych materiałów przedstawiono w tabelach D.19 i D.20.

### **Przekładnie zębata walcowe i stożkowe**

**Dopuszczalne naprężenia kontaktowe** w zależności od twardości powierzchni zębów można określić na podstawie doświadczeń stosowania przekładni zębatach i badań.

Dla kół stalowych o twardości  $\leq 350HB$

$$k_k = 2,75 \cdot HB_{\min} K_{HL}$$

Do obliczeń przyjmuje się najmniejszą wartość  $k_k$

Dla kół stalowych o twardości  $\geq 350 HB$  (wtedy stosowana jest twardość HRC)

$$k_k = 24,1 \cdot HRC_{\min} K_{HL}$$

gdzie  $HB_{\min}$ ,  $HRC_{\min}$  – minimalna twardość materiału (tabela D.19 i D.20).

$K_{HL}$  – współczynnik trwałości, uwzględniający okres eksploatacji i tryb obciążenia przekładni.

Dla przekładni normalizowanych i ulepszanych  $1 \leq K_{HL} \leq 2,6$ .

Dla kół o twardości  $350HB$  i żeliwnych kół  $0,585 \leq K_{HL} \leq 1,8$ .

Dla kół skośnych o  $HB_1 - HB_2 > 50$

$$k_k = 0,45(k_{k1} + k_{k2})$$

Przy czym:

$k_k \leq 1,25k_{k2}$  – dla walcowych kół o zębach skośnych;

$k_k \leq 1,15k_{k2}$  – dla kół stożkowych o nieregularnych zębach.

Jeżeli  $k_k \leq 1,25k_{k2}$ , to  $k_k = 1,25k_{k2}$ , i jeżeli  $k_k \leq 1,15k_{k2}$ , to  $k_k = 1,15k_{k2}$ .

W pozostałych przypadkach  $k_k$  przyjmują mniejsze naprężenia dopuszczalne  $k_{k1}$  i  $k_{k2}$ .

**Określenie współczynnika trwałości** przy obliczeniach zębów na podstawie naprężeń kontaktowych



$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{10^7}{N}}$$

gdzie  $10^7$  – podstawowa liczba cykli przy określaniu wytrzymałości kontaktowej stali;

$N$  – liczba cykli zmiany naprężeń w całym okresie użytkowania (czas pracy), h.

Określenie czasu pracy dla całego okresu użytkowania przekładni przy użyciu wzorów:

$$\text{dla zębatki } N_1 = 573\omega_1 L_h;$$

$$\text{dla koła } N_2 = 573\omega_2 L_h,$$

gdzie  $\omega_1, \omega_2$  – prędkość kątowa wału napędowego i napędzającego,  $s^{-1}$ ;

$L_h$  – określona trwałość przekładni.

Jeżeli trwałość nie jest zadana, przyjmuje się, że czas pracy przekładni wynosi nie mniej niż 36000 h (zgodnie z PN-M-88561:1987 żywotność przekładni zębatej ogólnego przeznaczenia powinna wynosić nie mniej niż 36000 h i przyjmuje się współczynnik żywotności  $K_{HL} = 1$ ).

Jeżeli obliczona wartość  $K_{HL}$  jest większa albo mniejsza niż określona w przedziale, to przyjmuje się minimalną albo maksymalną wartość w określonym przedziale.

### **Określenie maksymalnych dopuszczalnych naprężeń kontaktowych**

W obliczeniach maksymalne dopuszczalne naprężenia kontaktowe określa się w celu zapobiegania odkształceniom plastycznym albo kruchemu pęknięciu powierzchni zębów.

Dla stali

przy  $HB \leq 350$

$$k_{k_{max}} = 2,5 \cdot k_k$$

przy  $HB \geq 350$

$$k_{k_{max}} = 2 \cdot k_k$$

Dla żeliwa

przy  $HB \leq 350$

$$k_{k_{max}} = 1,8 \cdot k_k$$

przy  $HB \geq 350$

$$k_{k_{max}} = 14 \cdot HRC$$

## Określenie dopuszczalnych naprężeń zginających

– jeżeli zęby pracują jednostronnie (od zerowego cyklu naprężeń, bez ruchu wstecznego)

$$k_g = \frac{(1,4 \div 1,6) \cdot k_{-1g}}{K_F \cdot [n]} \cdot K_{FL}$$

– jeżeli zęby pracują dwustronnie (symetryczny cykl naprężeń, ruch wsteczny)

$$k_{-1g} = \frac{\sigma_{-1}}{K_F \cdot [n]} \cdot K_{FL}$$

gdzie  $k_{0g}$  – dopuszczalne naprężenia zginające przy odzerowym cyklu, MPa;

$k_{-1g}$  – dopuszczalne naprężenia zginające przy symetrycznym cyklu, MPa;

$R_{-1}$  – granica wytrzymałości materiału przy symetrycznym cyklu, MPa;

dla stali węglowej

$$R_{-1} \approx 0,43R_m$$

dla stali stopowej

$$R_{-1} \approx 0,45R_m + (70 \div 120) \frac{N}{\text{mm}^2}$$

dla żeliwa

$$R_{-1} \approx 0,45R_m$$

$K_F$  – efektywny współczynnik koncentracji naprężeń u podstawy zęba.

*Przy obliczeniach projektowych* dla kół ze stali normalizowanych i ulepszonych cieplnie  $K_F = 1,8$ ; dla kół stalowych po hartowaniu powierzchniowym i kół żeliwnych  $K_F = 1,2$ ;

$[n]$  – dopuszczalny współczynnik bezpieczeństwa.

Dla kutyh normalizowanych i ulepszonych kół  $[n] = 1,5$ ; dla kutyh hartowanych kół  $[n] = 2,2$ ; dla odlewanych normalizowanych i ulepszonych kół  $[n] = 1,8$ ;

$K_{FL}$  – współczynnik trwałości przy obliczeniach zębów na zginanie;

przy  $HB \leq 350$   $1 \leq K_{FL} \leq 2$

przy  $HB \geq 350$   $1 \leq K_{FL} \leq 1,65$

## Określenie współczynnika trwałości przy obliczeniach zębów na zginanie

$$K_{FL} = \sqrt[9]{\frac{5 \cdot 10^6}{N}}$$

gdzie  $5 \cdot 10^6$  – liczba cykli zmian naprężeń dla wszystkich gatunków stali;

$N$  – liczba cykli zmian naprężeń w całym okresie użytkowania (czas pracy), h.

Przy ciągle pracującej przekładni (z czasem pracy  $\geq 36000$  h)  $K_{FL} = 1$ .

Jeżeli wartość obliczeniowa  $K_{FL}$  jest mniejsza lub większa niż określona w przedziale  $1 \div 2$  ( $1 \div 1,65$ ), to przyjmuje się minimalną albo maksymalną odpowiednio wartość w tym przedziale.

Do dalszych obliczeń przyjmuje się mniejszą wartość  $k_{og}$ .

### Określenie maksymalnych naprężeń zginających

Maksymalne naprężenia zginające określa się w celu zapobiegania kruchym pęknięciom lub odkształceniu plastycznemu zębów.

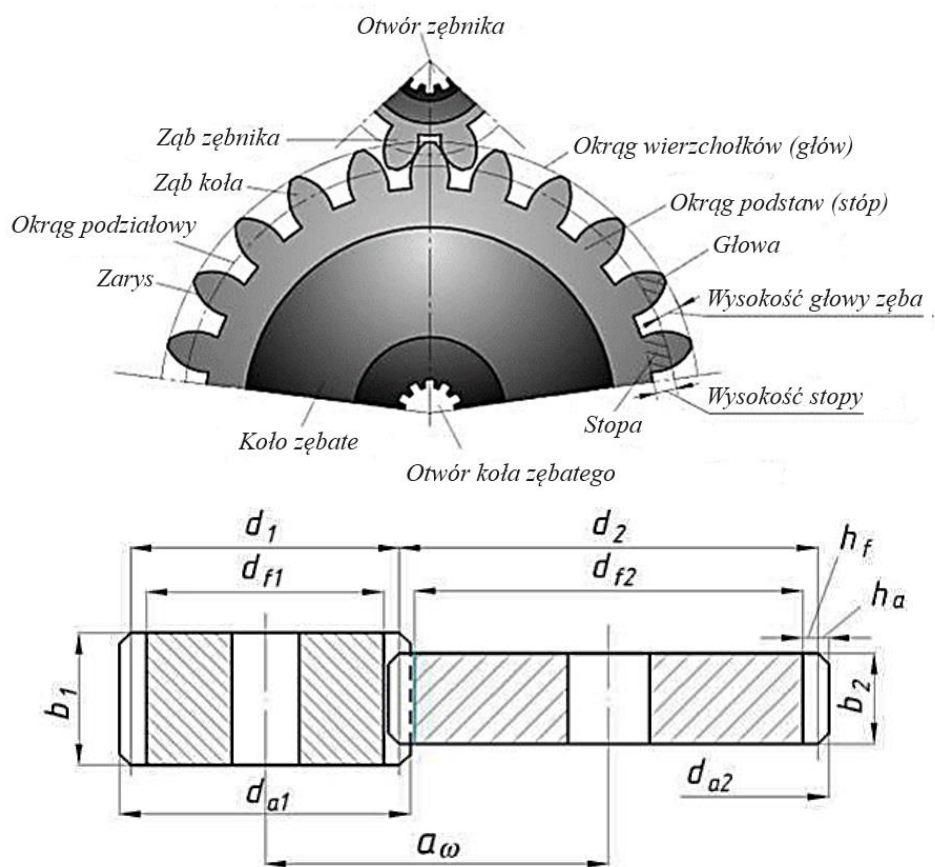
Dla stalowych kół  
 przy  $HB \leq 350$   
 przy  $HB \geq 350$

$$k_{g_{max}} = 0,8 \cdot R_{0,2}$$

$$k_{g_{max}} = 0,36 \cdot R_m / K_F /$$

### Podstawowe wzory obliczeniowe

Geometria walcowych przekładni zębatach (rys. 3.36).



Rys. 3.36. Geometria walcowej przekładni zębatach

## Przełożenie przekładni zębatych i stosunek przełożenia

Parametr  $u = \frac{z_2}{z_1}$  zgodnie z ISO/DIS 21771-2 nazywa się *przełożeniem* i określa stosunek większej liczby zębów do mniejszej.

Przekładnia jest rozpatrywana tylko w stosunku do pary kół, w innych przypadkach rozważany jest stosunek przełożenia, ale ze względu na częstsze jej użytkowanie stosunek przełożenia nazywa się przełożeniem i stosuje się oznaczenie  $u$ :

$$i(u) = \frac{d_2}{d_1}; \frac{n_1}{n_2}; \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

gdzie  $d_1, n_1, \omega_1$  – odpowiednio średnica zębniaka, prędkość obrotowa, prędkość kątowna zębniaka;

$d_2, n_2, \omega_2$  – odpowiednio średnica koła, prędkość obrotowa, prędkość kątowna koła.

Częściej stosowane są przekładnie redukujące, w których:

moduł zaczepienia:

zęba prostego,

$$m = \frac{d}{z} = \frac{p}{\pi};$$

skośnego zęba przekładni (rys. 3.37)

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta},$$

gdzie  $d$  – średnica zębniaka, mm;

$z$  – liczba zębów zębniaka;

$p$  – krok zaczepienia, mm;

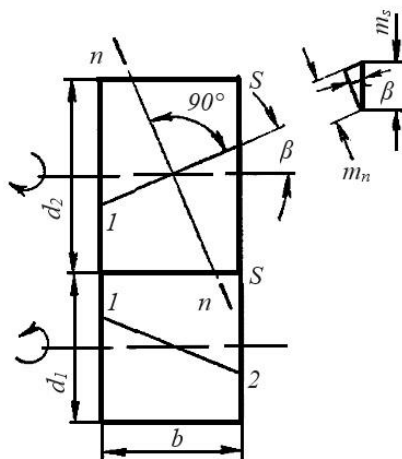
$m_t$  – moduł końcowy, mm;

$m_n$  – moduł normalny, mm.

Przekładnia z prostym zębem charakteryzuje się tym, że moduł końcowy jest równy modułowi normalnemu;

$\beta = 8 \div 16^\circ$  – kąt pochylenia zębów przekładni  $\beta = 25 \div 40^\circ$  – kąt nachylenia zębów w przekładniach szewronowych.

W parze powiązanych zębów ukośnych z zewnętrznym zaczepieniem kąty  $\beta$  są równe co do wartości, ale przeciwne co do kierunku. Jedno koło jest prawe, drugie – lewe.



Rys. 3.37. Schemat przekładni o zębach skośnych

W praktyce często moduł jest wyznaczany ze stosunku:

$$m_n = (0,01 \div 0,02)a_w,$$

gdzie  $a_w$  – odległość między osiami z warunku wytrzymałości kontaktowej, mm.

Opierając się na doświadczeniu stosowania przekładni zębatych zaleca się przyjęcie modułu  $m_{\min} \geq 1,5$  mm.

Moduły są znormalizowane przez PN-ISO 54:2001 w zakresie 0,05 ÷ 100 mm (tabela D.24).

Krok zaczeplenia:

zęb prosty

$$p_n = \pi \cdot m = \frac{\pi d}{z}$$

$p_n$  – krok normalny, mm;

zęb skośny (rys. 3.37)

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$$

$p_t$  – krok boczny, mm

W przekładni z prostym zębem kroki normalne są równe.

Dla pary zaczeplionych kół moduł powinien być taki sam.

Dla nekorygowanych kół zębatych:

	przekładnia o zębach prostych	przekładnia o zębach skośnych
Wysokość główki zęba, mm	$h_a = m$	$h_a = m_n$
Wysokość nóżki zęba, mm	$h_f = 1,25m$	$h_f = 1,25m_n$
Wysokość zęba, mm	$h = h_a + h_f = 2,25m$	$h = 2,25m_n$
Luz promieniowy, mm	$c = 0,25m$	$c = 0,25m_n$

Przy cięciu dłutem

$$c = 0,35m$$

$$c = 0,35m_n$$

Średnice kół niekorygowanych, mm:

	przekładnia o zębach prostych	przekładnia o zębach skośnych
a) kół rozdzielczych	$d = mz$	$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}$
b) wierzchołków	$d_a = d + 2m = d + 2h_a$	$d_a = d + 2m_n = d + 2h_a$
c) podstaw zębów	$d_f = d - 2,5m = d - 2h_f$	$d_f = d - 2,5m_n = d - 2h_f$
	$a_w = 0,5(d_2 + d_1) = 0,5m(z_2 + z_1)$	
Odległość międzyosiowa, mm	$a_w = 0,5(d_2 + d_1) = 0,5m_s(z_2 + z_1)$	
	$a_w = \frac{m_n(z_2 + z_1)}{2 \cos \beta}$	

Szerokość kół, mm:

koło	zębatka
$b_2 = \psi_a \cdot a_w$	$b_1 = b_2 + (5 \div 10) \text{ mm}$

gdzie  $\psi_a$  – współczynnik szerokości wieńca koła zębatki względem odległości międzyosiowej, określane z tabeli D.22.

Długość zęba, mm:

przekładnia z zębem prostym	przekładnia z zębem skośnym
$l = b$	$l = \frac{b}{\cos \beta}$

### Siły działające w zaczepleniu

Przekładnia o zębach prostych (rys. 3.38):

siła obwodowa zębatki i koła  $F_t = \frac{2T}{d}$ ;

siła promieniowa zębatki i koła  $F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w$

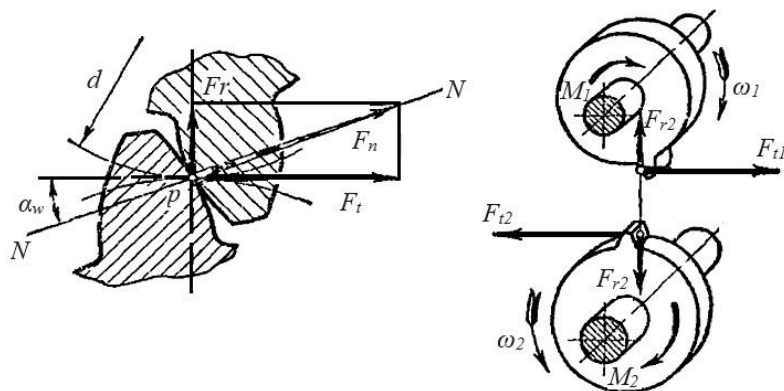
siła normalna  $F_n = F_t / (\cos \alpha_w \cdot \cos \beta)$

gdzie  $T$  – moment działający na wał, Nmm;

$d$  – średnica koła rozdzielczego, mm;

$\alpha_w = 20^\circ$  – kąt zaczeplenia niekorygowanej przekładni;

Na kole napędzanym kierunek siły obwodowej pokrywa się z kierunkiem obrotu, na napędzającym – jest przeciwny.



Rys. 3.38. Siły działające w zazębieniu przekładni walcowej prostej

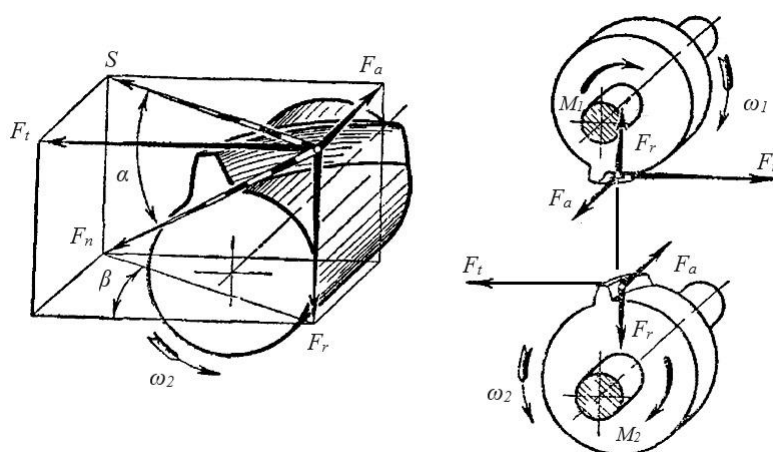
Przekładnia o zębach skośnych (rys. 3.39):

siła obwodowa  $F_t = \frac{2T}{d}$ ,

siła promieniowa  $F_r = F_t \frac{\operatorname{tg} \alpha_w}{\cos \beta}$ ,

siła osiowa  $F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta$ ,

siła normalna  $F_n = \frac{F_t}{(\cos \alpha_w \cdot \cos \beta)}$ .



Rys. 3.39. Siły działające w zazębieniu przekładni o zębach ukośnych

### Określenie prędkości obwodowej zaczeplenia

$$V = \frac{\omega d}{2 \cdot 1000} \text{ m/s}$$

gdzie  $\omega$  – prędkość obrotowa koła,  $s^{-1}$ ;

$d$  – średnica koła, mm.

### Wzory do obliczenia walcowych przekładni zębatych

Podstawowymi kryteriami wydajności walcowych przekładni zębatych są kontaktowa wytrzymałość zębów i wytrzymałość na zginanie zębów.

Dla walcowych przekładni zębatych przeprowadza się obliczenia na wytrzymałość kontaktową, wytrzymałość na zginanie, obliczenie maksymalnego obciążenia dla niedopuszczenia występowania odkształceń plastycznych albo pęknięcia kruchego w wyniku oddziaływania krótkotrwałych obciążeń szczytowych (na przykład podczas rozruchu silnika elektrycznego) oraz obliczenia cieplne dla mocno obciążonych przekładni wysokoprędkościowych.

Przy projektowaniu przekładni zębatych rozróżnia się obliczenia *projektowe* i *weryfikacyjne*.

Przy obliczeniach projektowych wymagane wymiary przekładni są określone na podstawie zadanego obciążenia i znanych dopuszczalnych naprężeń.

Przy obliczeniach weryfikacyjnych określa się rzeczywiste naprężenia w zębach, wykorzystując zadane obciążenie i wymiary oraz porównuje się je z dopuszczalnymi. Oprócz tego wykonywane są obliczenia przy maksymalnym obciążeniu i w miarę potrzeby obliczenia cieplne.

Obliczenia weryfikacyjne z reguły wykonuje się dla zębów mniej wytrzymałego koła. Przy wykorzystaniu materiałów z pierwszej grupy twardości  $< 350$  HB, często to są zęby koła. Dla materiałów drugiej grupy twardości  $\geq 350$  HB, obliczenia wykonuje się dla zębów zębatki i koła.

**Dla otwartych przekładni zębatych** podstawowym jest obliczenie zębów na zginanie ze względu na duże zużycie w tego typu przekładniach.

### **Przekładnia o zębach prostych**

*Do obliczeń projektowych:*

$$m = \sqrt[3]{\frac{2T_1 K_F Y_F}{k_g \psi_{bm} Z_1}}$$

*Do obliczeń weryfikacyjnych:*

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F}{bm} \leq k_g,$$

gdzie  $F_t$  – siła obwodowa, N;

$K_F$  – współczynnik obciążenia;

$$K_F = K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{Fv}$$

$K_{F\beta}$  – współczynnik nierównomiernego obciążenia po szerokości wieńca (tabela D.27);

$K_{F\alpha}$  – współczynnik nierównomiernego obciążenia między zębami (tabela D.27);

$K_{Fv}$  – współczynnik dynamiczności (tabela D.28);

$Y_F$  – współczynnik kształtu zęba (tabela D.29);

$b$  – szerokość koła, mm;



$m$  – moduł, mm;

$T_1$  – moment obracający na zębatce, Nm;

$z_1$  – liczba zębów na zębatce;

$\psi_{bm} = b/m$  – współczynnik szerokości obręczy koła;

$[F_\sigma]$  – dopuszczalne naprężenia zginające, MPa.

### **Przekładnia o zębach ukośnych i szewronowa**

*Do obliczeń projektowych:*

$$m = \sqrt[3]{\frac{2TK_F Y_F Y_\beta K_{F\alpha} \cos \beta}{k_k \psi_{bm} z}}$$

*Do obliczeń weryfikacyjnych:*

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F Y_\beta K_{F\alpha}}{b m_n} \leq k_g,$$

gdzie  $\beta$  – kąt pochylenia zębów;

$m_n$  – normalny moduł, mm;

$z$  – liczba zębów zębnika albo koła;

$T$  – moment skręcający na zębniku albo kole, Nm;

$Y_\beta = 1 - \frac{\beta^\circ}{140}$  – współczynnik pochylenia linii zęba.

**Dla zamkniętych przekładni zębatych** podstawowymi są obliczenia na wytrzymałość kontaktową zębów, a obliczenia na zginanie wykonuje się przy weryfikacji.

*Do obliczeń projektowych:*

$$a_w \geq K_a \cdot (u \pm 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2 \cdot 10^3 \cdot K_{H\beta}}{\Psi_a \cdot u^2 \cdot k_H^2}}$$

gdzie  $K_a$  – współczynnik wspomagający. Dla przekładni z zębami ukośnymi

$K_a = 43$ , o zębach prostych  $K_a = 49,5$ ;

$u$  – przełożenie;

znak „-” przy obliczeniach wewnętrznego zaczeplenia;

$T_2$  – moment obrotowy na wolnobieżnym wale przekładni, Nm;

$10^3$  – współczynnik konwersji m w mm;

$K_H$  – współczynnik nierównomiernego rozkładu obciążenia po długości zęba;

$\Psi_a$  – współczynnik szerokości wieńca zębatki względem odległości międzyosiowej;

$k_k$  – dopuszczalne albo średnie naprężenia kontaktowe, MPa.

Obliczona wartość odległości międzyosiowej jest zaokrąglana do najbliższego standaryzowanego.

*Do obliczeń weryfikacyjnych względem naprężeń kontaktowych:*  
przekładnia o zębach prostych

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \cdot \sqrt{\frac{T_2 \cdot K \cdot (u+1)^3}{b_2 \cdot u^2}} \leq k_k,$$

przekładnia o zębach skośnych

$$\sigma_H = \frac{270}{a_w} \cdot \sqrt{\frac{T_2 \cdot K_H \cdot (u+1)^3}{b_2 \cdot u^2}} \leq k_k,$$

gdzie  $a_w$  – odległość międzyosiowa, mm;

$T_2$  – moment obrotowy na cichobieżnym wale przekładni, Nmm;

$K_H$  – współczynnik obciążenia;

$$K_H = K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{Hv}$$

$K_{H\beta}$  – współczynnik nierównomierności rozkładu obciążenia po szerokości wieńca (tabela D.25);

$K_{H\alpha}$  – współczynnik nierównomierności rozkładu naprężenia między zębami (tabela D.27);

$K_{Hv}$  – współczynnik dynamiczności (tabela D.28);

$u$  – przełożenie przekładni;

$b_2$  – szerokość koła, mm;

$k_k$  – dopuszczalne naprężenia kontaktowe, MPa.

*Do obliczeń weryfikacyjnych względem naprężeń zginających:*

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F Y_\beta K_{F\alpha}}{b m_n} \leq k_g$$

*Do obliczeń weryfikacyjnych względem granicznych naprężeń dla otwartych, zamkniętych przekładni, przekładni z zębem prostym i walcowych z zębem ukośnym:*

Względem naprężeń kontaktowych:

$$\sigma_{Hmax} = \sigma_H \sqrt{\frac{T_{1maxk}}{T_1}} \leq k_{kgran},$$

gdzie  $\sigma_H$  – obliczone naprężenia kontaktowe, MPa;

$k_{kgran}$  – graniczne dopuszczalne naprężenia kontaktowe, MPa;

$T_1$  – moment obrotowy zębatki, Nmm;

$T_{1max}$  – moment obrotowy zębatki przy maksymalnym obciążeniu, Nmm.

Względem naprężeń zginających

$$\sigma_{Fmax} = \sigma_F \frac{T_{1max}}{T_1} \leq k_{kgran},$$

gdzie  $\sigma_F$  – obliczone naprężenia zginające, MPa;

$k_{kgran}$  – graniczne dopuszczalne naprężenia zginające koła, MPa.

### Obliczenia termiczne przekładni

Obliczenia cieplne dla walcowych i stożkowych przekładni zębatych wykonywane są jako dodatkowe w przypadku pracy przy dużych obciążeniach i prędkościach. Dla przekładni ślimakowych są to podstawowe obliczenia, ponieważ pracują one w warunkach silnego wydzielania się ciepła, które może prowadzić do uszkodzenia. Obliczenia cieplne są wykonywane dla ustalonego trybu pracy na podstawie bilansu cieplnego, czyli równości wydzielania ciepła i wymiany ciepła:

$$Q_{wyd} = Q_{wym}$$

Przy obliczeniach cieplnych często określa się temperaturę smaru, przy czym powinien być spełniony warunek:

$$t_s = t_0 + \frac{(1 - \eta)N_1}{K_T A(1 + \psi)} \leq [t_s]$$

gdzie  $\eta$  – ogólna sprawność przekładni;

$N_1$  – moc na zębniku (ślimaku), W;

$t_0$  – temperatura otoczenia poza obudową w stopniach, w warunkach hali zwykle  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ;

$K_T = 8 \div 17 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  – współczynnik wymiany ciepła z powierzchni obudowy (większa wartość przy dobrej cyrkulacji powietrza w pomieszczeniu);

$A$  – pole powierzchni chłodzenia obudowy przekładni (bez uwzględnienia dna),  $\text{m}^2$ ;

$\psi$  – współczynnik wymiany ciepła przez dno obudowy (0,3 przy przyleganiu dna do obudowy, 0 – przy przyleganiu dna do betonu albo cegły);

$[t_s]$  – dopuszczalna temperatura smaru w obudowie.

Dla smaru zwykłego  $[t_s] = 70 \div 90^\circ\text{C}$ , dla lotniczego  $[t_s] = 20 \div 100^\circ\text{C}$ .

Jeżeli warunek bilansu cieplnego nie jest spełniony  $Q_B > Q_0$ , należy uwzględnić dodatkowe odprowadzanie ciepła. Osiąga się to następującymi sposobami: zwiększenie powierzchni chłodzenia  $A$ , przez zastosowanie żeber chłodzących; odmuchiwanie obudowy powietrzem za pomocą wentylatora zamontowanego na wale ślimaka; umieszczenie w obudowie wnek wodnych albo węzownicy z wodą bieżącą; stosuje się układy obiegu smaru ze specjalnymi chłodniami.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.26.** Dla przekładni walcowej o zębach skośnych (rys. 3.40) określić: średnicę podziałową i wewnętrzną koła, normalny i końcowy (obwodowy) moduł zazębienia, wysokość zęba, odległość między osiami oraz siły działające w zazębieniu. Niezbędne dane przyjąć z rysunku.

Dane:

$$N_1 = 10 \text{ kW}$$

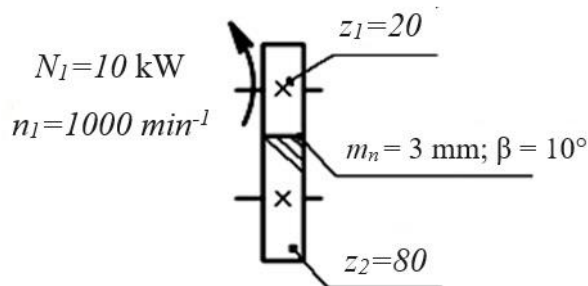
$$n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$$

$$z_1 = 20$$

$$z_2 = 80$$

$$m_n = 3 \text{ mm}$$

$$\beta = 10^\circ$$



Szukane:

$$d_1 - ? \quad d_2 - ?$$

$$d_{a1} - ? \quad d_{a2} - ?$$

$$p_t - ? \quad h - ?$$

$$a_w - ? \quad F_t - ?$$

$$F_r - ? \quad F_a - ?$$

Rys. 3.40. Schemat przekładni walcowej o zębach skośnych

### Rozwiązanie

1. Określamy niewiadome.

1.1. Określamy średnice otworów kół:

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta} = \frac{3 \cdot 20}{\cos 10^\circ} = 61,2245 \text{ mm} \quad \text{zębunki} \quad \text{koła} \quad d_2 = \frac{m_n z_2}{\cos \beta} = \frac{3 \cdot 80}{\cos 10^\circ} = 244,8979 \text{ mm}$$

1.2. Określamy zewnętrzne średnice kół:

- zębownika

$$d_{a1} = d_1 + 2m_n = 61,2245 + 2 \cdot 3 = 67,225 \text{ mm}$$

- koła

$$d_{a2} = d_2 + 2m_n = 244,8979 + 2 \cdot 3 = 250,898 \text{ mm}$$

1.3. Określamy skok zazębienia końcowego

$$p_t = \pi \frac{d_1}{z_1} = 3,14 \cdot \frac{61,2245}{20} = 9,612 \text{ mm}$$

1.4. Określamy wysokość zęba

$$h = 2,25m_n = 2,25 \cdot 3 = 6,75 \text{ mm}$$

1.5. Określamy odległość między osiami

$$a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5(61,2245 + 244,8979) = 153 \text{ mm}$$

Z tabeli D.26 przyjmujemy  $a_w = 160 \text{ mm}$ .

1.6. Określamy siły działające w zazębieniu

Jako pierwszy określamy moment obrotowy zębownika

$$T_1 = 9,55 \frac{N_1}{n_1} = 9,55 \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{1000} \approx 96 \text{ Nm, wtedy}$$

Siła obwodowa

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 96 \cdot 10^3}{61,2245} = 3136 \text{ N}$$

Siła promieniowa

$$F_{r1} = \frac{F_{t1} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = 3136 \cdot \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 10^\circ} = 1159 \text{ N}$$

gdzie  $\alpha$  – kąt zaczepienia,  $\alpha = 20^\circ$ .

Siła osiowa

$$F_{a1} = F_{t1} \operatorname{tg} \beta = 3136 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 552 \text{ N}$$

*Odpowiedź:*  $d_1 = 61,2245 \text{ mm}$ ;  $d_2 = 244,8979 \text{ mm}$ ;  $d_{a1} = 67,225 \text{ mm}$ ;  $d_{a2} = 250,898 \text{ mm}$ ;  $p_t = 9,612 \text{ mm}$ ;  $h = 6,75 \text{ mm}$ ;  $a_w = 160 \text{ mm}$ ;  $F_{t1} = 3136 \text{ N}$ ;  $F_{r1} = 1159 \text{ N}$ ;  $F_{a1} = 552 \text{ N}$ .

**Przykład 3.27.** Sprawdzić kontaktową wytrzymałość zębów walcowej przekładni zębatej z ukośnymi zębami, jeśli: przenoszona moc  $N_1 = 15 \text{ kW}$ ; częstotliwość obrotowa szybkobieżnego wału  $n_1 = 750 \text{ min}^{-1}$ ; przełożenie  $u = 3,5$ ; liczba zębów zębatki  $z_1 = 23$ ; kąt pochylenia zębów  $\beta = 12^\circ$ ; moduł zazębienia  $m_n = 3 \text{ mm}$ ; materiał koła – stal 40H normalizowana, współczynnik szerokości koła  $\psi_{ba} = 0,315$ ; współczynnik trwałości  $K_{HL} = 1$ ; współczynnik obciążenia  $K_H = 1,2$ .

*Dane:*

$$N_1 = 15 \text{ kW}$$

$$n_1 = 750 \text{ min}^{-1}$$

$$u = 3,5$$

$$z_1 = 23$$

$$\beta = 12^\circ$$

$$m_n = 3 \text{ mm}$$

$$\psi_{ba} = 0,315$$

$$K_{HL} = 1$$

$$K_H = 1,2$$

stal 40H normalizowana

*Szukane:*

$$\sigma_H - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Zapisujemy warunek wytrzymałości kontaktowej dla walcowej przekładni z ukośnymi zębami.

$$\sigma_H = \frac{270}{a_w} \sqrt{\frac{T_2 \cdot K_H (u + 1)^3}{b_2 u^2}} \leq [\sigma_H]$$

2. Określamy nieznanne.

2.1. Określamy parametry zębniaka i koła:

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta} = \frac{3 \cdot 23}{\cos 12^\circ} = 70,54 \text{ mm}$$

$$d_2 = d_1 u = 70,542 \cdot 3,5 = 246,895 \text{ mm}$$

2.2. Określamy odległość między osiami:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{70,542 + 246,895}{2} = 158,72 \text{ mm}$$

z tabeli D.26 przyjmujemy  $a_w = 160 \text{ mm}$ .

2.3. Określamy dopuszczalne naprężenia kontaktowe dla koła

Biorąc pod uwagę średnicę koła  $d_2 \approx 245 \text{ mm}$ , materiał stal 40H i rodzaj obróbki cieplnej z tabeli D.19, twardość materiału wynosi  $HB_{\min} = 220$ , dla kół stalowych przy twardości  $\leq 350HB$

$$[\sigma_H] = 2,75 HB_{\min} K_{HL} = 2,75 \cdot 220 \cdot 1 = 605 \text{ MPa}$$

2.4. Określamy momenty obrotowe:

- zębniaka

$$T_1 = 9,55 \frac{N_{sil}}{n_{sil}} = 9,55 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{750} = 191 \text{ Nm}$$

- koła (ze względu na to, że przekładnia jest walcowa  $\eta = 0,98$ )

$$T_2 = T_1 u \eta = 191 \cdot 3,5 \cdot 0,98 = 655 \text{ Nm}$$

2.5. Określamy szerokość koła

$$b_2 = \psi_{ba} \cdot a_w = 0,315 \cdot 160 = 50,4 \text{ mm}$$

z tabeli D.21 przyjmujemy  $b_2 = 50 \text{ mm}$ .

3. Określamy naprężenia kontaktowe i oceniamy wytrzymałość kontaktową zębów

$$\sigma_H = \frac{270}{a_w} \sqrt{\frac{T_2 \cdot K_H (u + 1)^3}{b_2 u^2}} = \frac{270}{160} \sqrt{\frac{655 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot (3,5 + 1)^3}{50 \cdot 3,5^2}} = 577 \frac{N}{\text{mm}^2} = 577 \text{ MPa}$$

$$577 \text{ MPa} < k_k = 605 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałości jest spełniony.

**Przykład 3.28.** Sprawdzić temperaturę przekładni ślimakowej (rys. 3.41), jeśli: przenoszona moc  $N_1 = 2,2 \text{ kW}$ ; liczba obrotów ślimaka  $z_1 = 1$ ; temperatura otoczenia  $t_o = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ; przekładnia jest zamontowana na metalowej ramie; współczynnik przenikania ciepła  $K_T = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ ; dopuszczalny zakres temperatur smaru  $[t_s] = 70 \div 90 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Dane:

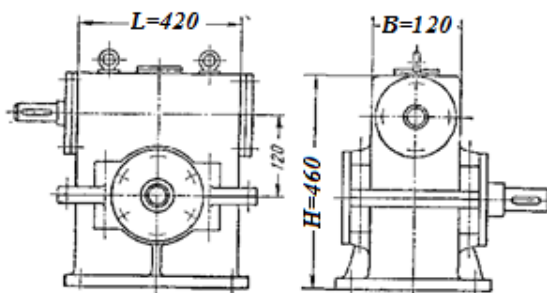
$$N_1 = 2,2 \text{ kW}$$

$$z_1 = 1$$

$$t_o = 20^\circ\text{C}$$

$$K_T = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$t_s = 70 \div 90^\circ\text{C}$$



Szukane:

$$T_s - ?$$

Rys. 3.41. Przekładnia ślimakowa

### Rozwiązanie

1. Zapisujemy warunek bilansu cieplnego przekładni ślimakowej:

$$T_s = t_o + \frac{(1 - \eta)N_1}{K_T A(1 + \psi)} \leq t_s$$

2. Określamy niewiadome.

2.1. Określamy sprawność przekładni ślimakowej.

Przy przybliżonych obliczeniach, sprawność przekładni ślimakowej można określić na podstawie liczby obrotów ślimaka

$z_1$	$\eta$
1	0,72 ÷ 0,78
2	0,78 ÷ 0,82
3	0,82 ÷ 0,87
4	0,87 ÷ 0,92

Dla  $z_1 = 1$  przyjmujemy  $\eta = 0,75$ .

2.1. Określamy pole powierzchni obudowy przekładni, przez którą przenika ciepło:

$$A = 2(B \cdot H) + 2(L \cdot H) + B \cdot L = 2(0,12 \cdot 0,46) + 2(0,42 \cdot 0,46) + 0,12 \cdot 0,42 = 0,55 \text{ m}^2$$

2.1. Określamy współczynnik uwzględniający odprowadzanie ciepła przez dolną część obudowy przekładni.

Jeżeli korpus przekładni jest zainstalowany na fundamencie betonowym, żelbetowym albo kamiennym, to  $\psi = 0$ , jeżeli na ramie żelaznej –  $\psi = 0,2 \div 0,3$ .

Przy założeniu, że przekładnie zainstalowano na ramie żelaznej –  $\psi = 0,2$ .

3. Określamy temperaturę smaru i określamy tryb temperaturowy przekładni:

$$T_s = t_o + \frac{(1 - \eta)N_1}{K_T A(1 + \psi)} = t_o + \frac{(1 - 0,75)2,2 \cdot 10^3}{0,15 \cdot 0,55(1 + 0,2)} = 65^\circ\text{C} < t_s = 70 \div 90^\circ\text{C}$$

temperatura przekładni jest normalna.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania (obliczeniowe)

**Zadanie 3.12.** Dla przekładni walcowej o ukośnych zębach określić: średnicę podziałową i wewnętrzną koła, normalny i końcowy (obwodowy) moduł zazębienia, wysokość zęba, odległość między osiami oraz siły działające w zazębieniu (Tabela 3.12).

Tabela 3.12. Dane wejściowe do zadania 3.12

Nr war.	$N$ kW	$n_1$ min <sup>-1</sup>	$z_1$	$u$	Normalny krok $p_n$ , mm	$\beta$ , stopnie
1	4,5	250	18	2	6,28	9
2	5,0	300	19	3	7,85	10
3	5,5	250	20	4	9,42	11
4	6,0	320	21	5	10,99	12
5	6,5	300	22	6	12,56	13
6	7,0	340	25	4	14,13	14
7	7,5	180	26	2	15,7	15
8	8,0	160	28	2	6,28	16
9	8,5	150	30	3	7,85	9
10	9,5	240	22	4	9,42	10
11	10,0	260	20	5	6,28	11
12	10,5	220	18	6	7,85	12
13	11,0	200	18	4	9,42	13
14	11,5	280	19	2	10,99	14
15	12,0	300	20	2	12,56	15
16	16,5	260	21	3	14,13	16
17	12,5	240	22	4	15,7	9
18	13,0	230	25	5	6,28	10
19	13,5	260	26	6	7,85	11
20	14,0	220	28	4	9,42	12
21	14,5	250	30	2	6,28	13
22	15,0	180	22	2	7,85	14
23	16,0	240	20	3	9,42	15
24	17,0	240	18	4	10,99	16
25	17,5	150	18	5	12,56	9
26	18,0	170	19	6	14,13	10
27	19,0	180	20	4	15,7	11
28	20,0	140	21	2	6,28	12
29	21,0	300	22	2	7,85	13
30	22,0	320	25	3	9,42	14



**Zadanie 3.13.** Sprawdzić na wytrzymałość kontaktową zęby walcowej przekładni z ukośnymi zębami. Dane do obliczeń podano w tabeli 3.13.

Tabela 3.13. Dane wejściowe do zadania 3.13

Nr war.	$N$ kW	$n_1$ min <sup>-1</sup>	$m_n$ , mm	$z_1$	$u$	$\beta$ , °	$\psi_{ba}$	$K_{HL}$	$K_H$	Stal	Ob- róbka cieplna
1	4,5	750	2	18	2	9	0,25	1,1	1,1	C35	Normalizowanie
2	5,0	800	2,5	19	3	10	0,315	1,0	1,05	C40	
3	5,5	900	3	20	4	11	0,4	1,12	1,0	C45	
4	6,0	950	3,5	21	5	12	0,25	1,14	1,12	C50	
5	6,5	1000	4	22	6	13	0,315	1,2	1,15	C55	
6	7,0	1050	4,5	25	4	14	0,4	1,4	1,11	30HGS	
7	7,5	1100	5	26	2	15	0,25	1,3	1,3	35H	Ulepszenie cieplne
8	8,0	1200	1,5	28	2	16	0,315	1,5	1,4	40H	
9	8,5	1250	2	30	3	9	0,4	1,6	1,2	40HN	
10	9,5	1300	2,5	22	4	10	0,25	1,7	1,25	C35	
11	10,0	1400	3	20	5	11	0,315	1,8	1,35	C40	
12	10,5	1450	3,5	18	6	12	0,4	2,0	1,1	C45	
13	11,0	1500	4	18	4	13	0,25	2,1	1,05	C50	Normalizowanie
14	11,5	750	4,5	19	2	14	0,315	1,25	1,0	C55	
15	12,0	800	5	20	2	15	0,4	1,35	1,12	30HGS	
16	16,5	900	1,5	21	3	16	0,25	1,1	1,15	35H	
17	12,5	950	2	22	4	9	0,315	1,0	1,11	40H	
18	13,0	1000	2,5	25	5	10	0,4	1,12	1,3	40HN	
19	13,5	1050	3	26	6	11	0,25	1,14	1,4	C35	Ulepszenie cieplne
20	14,0	1100	3,5	28	4	12	0,315	1,2	1,2	C40	
21	14,5	1200	4	30	2	13	0,4	1,4	1,25	C45	
22	15,0	1250	4,5	22	2	14	0,25	1,3	1,35	C50	
23	16,0	1300	5	20	3	15	0,315	1,5	1,1	C55	
24	17,0	1400	1,5	18	4	16	0,4	1,6	1,05	30HGS	
25	17,5	1450	2	18	5	9	0,25	1,7	1,0	35H	Normalizowanie
26	18,0	1500	2,5	19	6	10	0,315	1,8	1,12	40H	
27	19,0	750	3	20	4	11	0,4	2,0	1,15	40HN	
28	20,0	800	3,5	21	2	12	0,25	2,1	1,11	C35	
29	21,0	900	4	22	2	13	0,315	1,25	1,3	C40	
30	22,0	950	4,5	25	3	14	0,4	1,35	1,4	C45	

### 3.6. Dobór reduktorów

#### Wiadomości ogólne

**Reduktory** – to urządzenia, które są produkowane jako oddzielne jednostki i są zaprojektowane w celu zmniejszenia prędkości kątowych i zwiększenia momentów obrotowych.

Reduktory są szeroko stosowane w napędach maszyn i mechanizmów.

Ogólnym kryterium *technicznego poziomu* reduktorów jest stosunek masy reduktora do momentu obrotowego na jego niskoobrotowym wale:

$$\gamma = \frac{m}{T_2},$$

gdzie  $m$  – masa w kg,

$T_2$  – moment obrotowy w Nm.

Jego wartość w dużym stopniu zależy od twardości kół zębatach. Dla reduktorów o wysokim poziomie technicznym  $\gamma = 0,03 \div 0,05$ .

Przekładnie te są bardzo zróżnicowane pod względem schematów kinematycznych i konstrukcji.

#### **Klasyfikacja reduktorów:**

– *według rodzaju przekładni*: przekładnie czołowe, przekładnie stożkowe, przekładnie ślimakowe, przekładnie planetarne, przekładnie falowe, przekładnie kombinowane (przekładnie stożkowo-walcowe, przekładnie ślimakowe);

– *według układu zębów na obręczy koła*: przekładnie czołowe, przekładnie śrubowe, przekładnie szewronowe, przekładnie łukowe;

– *według liczby stopni*: jedno- i wielostopniowe. Liczbę stopni przekładni można zdefiniować jako liczbę wałów minus jeden. Zwykle liczba stopni przekraczająca trzy jest rzadko używana ze względu na duże rozmiary i koszt takich reduktorów;

– *według lokalizacji wałów i kół w przestrzeni*: poziome, pionowe, skośne;

– *według metody montażu*: na nóżkach lub płycie (z podstawą) – do montażu na fundamentach, podłogach, ramach; z kołnierzami – do montażu na obudowach, ramach maszyn i mechanizmów; nasadzane – cichobieżne montowane bezpośrednio na wale roboczym maszyny; kombinowane – do różnego montażu; według schematu montażowego;

- według wymagań klimatycznych: przekładnie są przeznaczone do pracy w regionach makroklimatycznych o klimacie umiarkowanym, tropikalnym, umiarkowanie zimnym, zimnym itp.;
- według kategorii lokalizacji, które są regulowane przez odpowiednie normy.

### **Dobór i obliczenie reduktorów**

*Dobór seryjnych reduktorów* odbywa się zgodnie z przekazywanymi momentami obrotowymi z katalogów producentów. Wstępne dane do wyboru przekładni to: największa wartość obciążenia odpowiadająca normalnej pracy przekładni; tryb pracy; prędkość obrotowa wału szybkobieżnego; przełożenie; lokalizacja silnika i korpusu roboczego maszyny; warunki pracy.

### **Warunek doboru reduktora**

$$T_{ob} = K_r T_n \leq T_t, u_f \approx u_t, n_{rz.p.o.} \leq n_{max},$$

gdzie  $K_r$  – współczynnik trybu pracy;

$T_r, T_n, T_t$  – moment obrotowy obliczeniowy, nominalny na wale wejściowym i tabelaryczny, Nm;

$u_f, u_t$  – faktyczne i tabelaryczne przełożenie;

$n_{rz.p.o.}$  – rzeczywista prędkość obrotowa szybkobieżnego wału reduktora,  $\text{min}^{-1}$ ;

$n_{max}$  – maksymalna tabelaryczna prędkość obrotowa wału reduktora,  $\text{min}^{-1}$ .

Dopuszczalne przeciążenie wynosi 10%, dopuszczalne niedociążenie – 20 %.

*Obliczenie reduktorów* obejmuje obliczenie takich elementów, jak: koła zębate, wały, łożyska, śruby znajdujące się w pobliżu łożysk, sprawdzanie połączeń wpustowych i obliczenia termiczne (dla szybkich przekładni ślimakowych).

Projektowanie, obliczanie i dobór materiałów do komponentów przekładni jest opisane w podręcznikach projektowania i technicznych.

Przy rozwiązywaniu zadań dotyczących doboru reduktora zaleca się zwrócenie uwagi na położenie wałów na schematach zadań. Jeśli wały są ułożone równolegle na schemacie przekładni, przekładnia będzie cylindryczna, a jeśli są ustawione pod kątem, może być ślimakowa lub stożkowa.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.29.** Dobrać z katalogu reduktor do elektrycznego napędu wciągarki (rys. 3.42), wskazując jego typ, liczbę stopni, wymiary gabarytowe, wagę i rozmiar śrub do jego zamocowania, jeśli: prędkość obrotowa wału silnika  $n_1 = 945 \text{ min}^{-1}$ ; udźwig wciągarki  $Q = 1,5 \text{ t}$ ; prędkość podnoszenia ładunku  $v_t = 1,2 \text{ m/s}$ ; średnica bębna napędzającego  $D_b = 500 \text{ mm}$ ; współczynnik trybu pracy  $K_r = 1,3$ ; dopuszczalne odchylenie przełożenia  $\Delta u \pm 4 \%$ .

Dane:

$$n_1 = 945 \text{ min}^{-1}$$

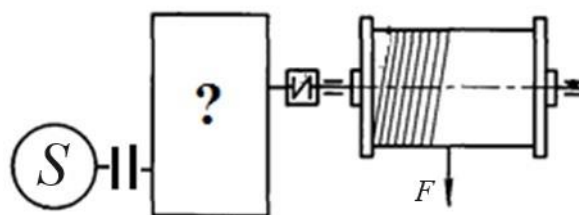
$$Q = 1,5 \text{ t}$$

$$v_t = 1,2 \text{ m/s}$$

$$D_b = 500 \text{ mm}$$

$$K_r = 1,3$$

$$\Delta u \pm 4\%$$



Szukane:

Reduktor - ?

Rys. 3.42. Elektryczny napęd wciągarki

### Rozwiązanie

1. Warunek doboru reduktora:

$$T_{ob} = K_r T_n \leq T_t, u_f \approx u_t, n_{rz.p.o.} \leq n_{max}$$

2. Określamy niewiadome.

2.1. Sprawdzamy udźwig do jednego oznaczenia i jednostek:

$$Q = F_t = 15000 \text{ N}$$

2.2. Określamy znamionowy moment obrotowy wału wolnoobrotowego:

$$T_{z.w.w} = \frac{F_t D_b}{2} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2} = 3750 \text{ Nm}$$

2.3. Określamy moment obliczeniowy:

$$T_{ob} = K_{ob} T_{z.w.w} = 1,3 \cdot 3750 = 4875 \text{ Nm}$$

2.4. Określamy prędkość obrotową bębna, która jest równa prędkości obrotowej wolnoobrotowego wału reduktora:

$$n_b = n_{w.w} = \frac{60 v_t}{\pi D_b} = \frac{60 \cdot 1,2}{3,14 \cdot 0,5} = 46 \text{ ob/min}$$

2.5. Określamy przełożenie reduktora:

$$u_p = \frac{n_{sil}}{n_b} = \frac{945}{46} = 20,5$$

3. Dobieramy reduktor.

Biorąc pod uwagę warunek doboru reduktora oraz uzyskane wartości obliczeniowego momentu obrotowego i przełożenia, a także równoległe ułożenie wałów

przekładni na schemacie napędu z katalogu z tabeli D.31, wybieramy cylindryczny reduktor dwustopniowy o wielkości 1C2U-250, dla którego:

- znamionowy moment obrotowy  $T_z = 5000 \text{ Nm}$ ;
- przełożenie  $u_z = 20$ ;

Określamy dopuszczalne odchylenia przełożenia

$$\Delta u = \frac{u_f - u_z}{u_z} \cdot 100\% = 2,5\% < 4\%$$

Warunek jest spełniony.

Z tabeli D.33 również wypisujemy wymiary

$L = 825 \text{ mm}$ ;  $B = L_4 + L_5 = 265 + 335 = 600 \text{ mm}$ ;  $H = 515 \text{ mm}$ ;

masa reduktora  $m = 320 \text{ kg}$ ;

średnica otworów na śruby montażowe  $d = 28 \text{ mm}$ , przyjmujemy śruby M24.

*Odpowiedź:* Reduktor 1C2U-250.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania (obliczeniowe)

**Zadanie 3.14.** Dobrać z katalogu reduktor do elektrycznego napędu wciągarki wskazując jego typ, liczbę stopni, wymiary gabarytowe, wagę i rozmiar śrub do jego zamocowania. Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.14.

Tabela 3.14. Dane wejściowe do zadania 3.14

Nr war.	$F_t$ kN	$n_1$ $\text{min}^{-1}$	$D_3$ mm	$v_t$ m/s	$K_r$	$\Delta u$	Schemat napędu
1	4,5	750	500	0,2	1,0	4	
2	5,0	800	600	0,25	1,1	5	
3	5,5	900	700	0,3	1,2	6	
4	6,0	950	750	0,35	1,15	7	
5	6,5	1000	800	0,5	1,2	9	
6	7,0	1050	850	0,4	1,3	8	
7	7,5	1100	900	0,45	1,4	10	
8	8,0	1200	950	0,6	1,5	4	
9	8,5	1250	1000	0,7	1,6	5	
10	9,5	1300	1100	0,8	1,05	6	
11	10,0	1400	1200	1,0	1,12	7	
12	10,5	1450	500	1,1	1,0	9	
13	11,0	1500	600	1,2	1,1	8	
14	11,5	750	700	1,3	1,2	10	
15	12,0	800	750	1,25	1,15	4	
16	16,5	900	800	1,5	1,2	5	
17	12,5	950	850	1,4	1,3	6	
18	13,0	1000	900	1,45	1,4	7	
19	13,5	1050	950	0,2	1,5	9	
20	14,0	1100	1000	0,25	1,6	8	
21	14,5	1200	1100	0,3	1,05	10	
22	15,0	1250	1200	0,35	1,12	4	
23	16,0	1300	500	0,5	1,0	5	
24	17,0	1400	600	0,4	1,1	6	
25	17,5	1450	700	0,45	1,2	7	
26	18,0	1500	750	0,6	1,15	9	
27	19,0	750	800	0,7	1,2	8	
28	20,0	800	850	0,8	1,3	10	
29	21,0	900	900	1,0	1,4	4	
30	22,0	950	950	1,1	1,5	5	

### 3.7. Sporządzanie schematów kinematycznych napędów

#### Wiadomości ogólne

Konwencjonalne reprezentacje graficzne elementów maszyn i mechanizmów są specjalnymi uproszczonymi obrazami używanymi do sporządzania schematów kinematycznych i pokazują podstawową strukturę mechanizmu lub maszyny oraz wzajemne oddziaływanie elementów maszyn i mechanizmów. Konwencjonalne symbole graficzne na schematach kinematycznych i zasady sporządzania schematów kinematycznych są regulowane przez odpowiednie normy. Tabele 3.16 i 3.17 poniżej zawierają podstawowe reprezentacje graficzne elementów kinematycznych maszyn i mechanizmów maszyn.

#### Reguły sporządzania schematów kinematycznych

Z reguły schemat kinematyczny wyrobu sporządza się w formie rysunku zestawieniowego (rys. 3.43).

Na schematach kinematycznych przedstawia się:

- wały, osie, korbowody, korby i inne – podstawowe linie ciągłe o grubości  $s$ ;
- elementy przedstawione w uproszczonym zarysie, koła zębate, ślimaki, koła pasowe, sprzęgła, łożyska itp. – liniami ciągłymi o grubości  $s/2$ ;
- kontur wyrobu (np. obudowa), w który wpisany jest wykres – ciągłymi cienkimi liniami o grubości  $s/3$ .





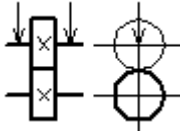
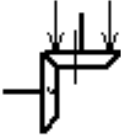
Zgodnie z normą grubość linii podstawowej  $s$  na schematach kinematycznych powinna mieścić się w przedziale  $0,5 \div 1,4$  mm. W przypadku korzystania z komputerowych programów graficznych zaleca się ustawienie następującej grubości linii w arkuszu: podstawowa  $s = 0,6$  mm, wtedy  $s/2 = 0,3$  mm i  $s/3 = 0,2$  mm.

Każdy element kinematyczny pokazany na schemacie ma zwykle przypisany numer seryjny, zaczynając od silnika. Wały numerowane są cyframi rzymskimi, pozostałe elementy numerowane są wyłącznie cyframi arabskimi (rys. 3.43). Numer seryjny elementu jest umieszczony na linii. Poniżej linii znajdują się główne cechy i parametry elementu kinematycznego, których lista znajduje się w tabeli 3.15.


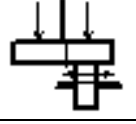
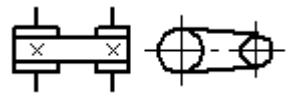
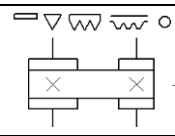
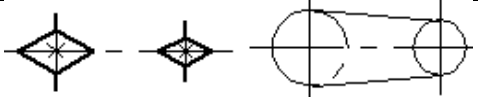
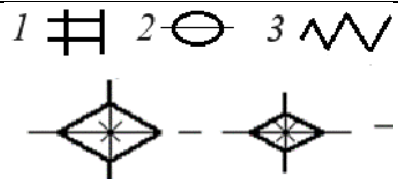
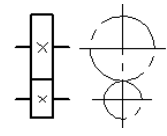
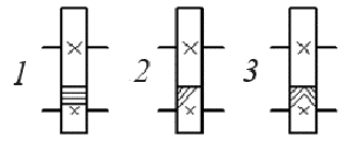
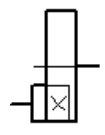
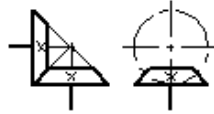
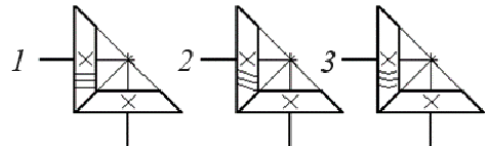
Tabela 3.15. Lista podstawowych parametrów i charakterystyk elementów kinematycznych

Element kinematyczny	Parametr, charakterystyka
1. Silnik	Rodzaj; moc $N, W$ ; prędkość obrotowa wału $n, \text{ob./min}$
2. Reduktor, pasek, łańcuch i inne przekładnie	Przełożenie $u$
3. Koła pasowe	Średnice $\varnothing, \text{mm}$
4. Koło łańcuchowe	Liczba zębów koła łańcuchowego $z$ , krok łańcucha $t, \text{mm}$
5. Koła zębate, koła ślimakowe	Liczba zębów $z$ , moduł $m, \text{mm}$ ; kąt pochyle- nia zębów $\beta$ (dla zębów skośnych)
6. Ślimaki	Rodzaj ślimaka (z wyjątkiem Archimedes), liczba zwojów ślimaka $z$ , moduł osiowy $m, \text{mm}$

Tabela 3.16. Symbole graficzne elementów maszyn i mechanizmów na schematach kinematycznych (ISO 5127:2017)

Nazwa	Symbol
Źródło ruchu (silnik)	
Wał, oś, pręt, korbowód itp.	
Łącze stałe (stojak)	
Wielostopniowe koło pasowe	
Przekładnia cierna:	
Walcowa	
skośna	



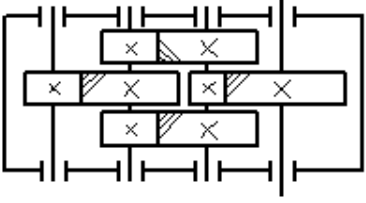
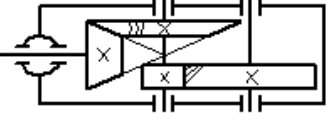
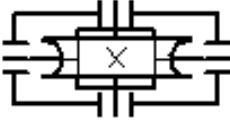
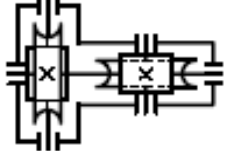
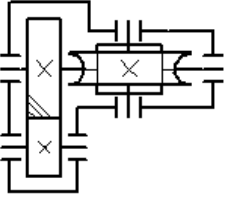
Nazwa	Symbol
skośna regulowana	
czołowa regulowana	
Przekładnia pasowa:	
bez określenia rodzaju pasa	
Z określeniem rodzaju pasa (obok rysuje się profil pasa). Na rysunku przedstawiono profile pasów płaskich, klinowych, wieloklinowych i okrągłych	
Łańcuchowa:	
Bez określenia rodzaju łańcucha	
Z określeniem rodzaju łańcucha. Na rysunku przedstawiono konwencjonalne oznaczenia łańcuchów: 1) płytkowe, rolkowe, tulejkowe; 2) kalibrowane, kotwiczne; 3) zębate	
Przekładnia czołowa:	
bez określenie rodzaju zęba	
z określeniem rodzaju zęba: 1) ząb prosty; 2) ząb skośny; 3) szewron	
Przekładnia zębata z zaczepleniem wewnętrznym	
Przekładnia zębata stożkowa:	
bez określenia rodzaju zęba	
z określeniem rodzaju zęba: 1) ząb prosty; 2) ząb skośny; 3) z zębami okrągłymi	

Nazwa	Symbol
Przekładnia hipoidalna	
Przekładnia ślimakowa z cylindrycznym ślimakiem:	
z górnym układem ślimakowym	
z dolnym układem ślimakowym	
Przekładnia ślimakowa	
Przekładnia śrubowo-nakrętkowa:	
z jednoczęściową prowadnicą	
integralna z elementami tocznymi	
ślizgowa rozdzielcza	
Gwint	
Łożyska ślizgowe i toczne bez specyfikacji rodzaju: 1) promieniowe; 2) wzdłużne	$1 \equiv \text{---} \equiv 2 \text{   }$
Łożyska toczne: 1) promieniowe; 2) promieniowe wzdłużne jednostronne; 3) promieniowe wzdłużne dwustronne; 4) wzdłużne jednostronne; 5) wzdłużne dwustronne	 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$
stożkowe	
Sferyczne (samonastawne) łożysko toczne: 1) kulkowe; 2) rolkowe	$1 \text{ (ball)} \quad 2 \text{ (roller)}$
Łożyska ślizgowe: 1) promieniowe; 2) promieniowe wzdłużne jednostronne; 3) promieniowe wzdłużne dwustronne; 4) wzdłużne jednostronne; 5) wzdłużne dwustronne	 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Nazwa	Symbol
Złączka bez określenia rodzaju	
Złączki z określeniem rodzaju: 1) ślepa; 2) kompensująca; 3) elastyczna	 <i>1</i> <i>2</i> <i>3</i>
Hamulec (ogólne oznaczenie)	

Tabela 3.17. Przykłady wykonania schematów kinematycznych wybranych reduktorów

Przekładnia	Schemat
Walcowa jednostopniowa	
Walcowa jednostopniowa pionowa	
Stożkowa jednostopniowa	
Cylindryczna przekładnia dwustopniowa wykonana według rozszerzonego schematu o zębach skośnych	
Cylindryczna przekładnia dwustopniowa o zębach dzielonych czołowych	
Cylindryczna dwustopniowa współosiowa	

Przekładnia	Schemat
Cylindryczna przekładnia trzystopniowa z dzielonymi wałami pośrednimi z zębami stożkowymi	
Stożkowo-walcowe dwustopniowe koło zębate czołowe z okrągłymi zębami stopnia stożkowego i zębami walcowymi	
Ślimak jednostopniowy z dolnym układem ślimaka	
Dwustopniowa przekładnia ślimakowa	
Zębowo-ślimakowa	

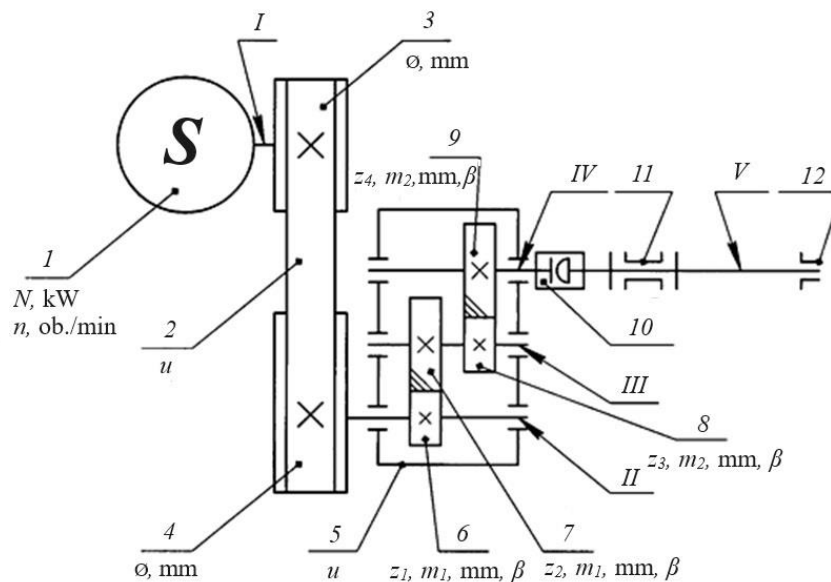
## Przykłady wykonania

**Przykład 3.30.** Narysuj schemat kinematyczny napędu w oparciu o schemat strukturalny, wskazując jego elementy i główne parametry.

### Dane wejściowe

Silnik → przekładnia pasowa → walcowa przekładnia dwustopniowa wykonana zgodnie ze schematem rozszerzonym → złączka kompensująca → wał maszyny roboczej, podparty z jednej strony przez dwustronne łożysko oporowe, a z drugiej przez jednostronne łożysko oporowe.

### Wykonanie



Rys. 3.43. Kinematyczny schemat napędu:

1 – silnik; 2 – przekładnia pasowa; 3 – napędzające koło pasowe; 4 – napędzane koło pasowe; 5 – walcowa przekładnia dwustopniowa wykonana według rozszerzonego schematu; 6 – przekładnia pierwszego stopnia; 7 – koło pierwszego stopnia; 8 – przekładnia drugiego stopnia; 9 – koło drugiego stopnia; 10 – złączka kompensująca; 11 – dwustronne łożysko ślizgowe łożysko oporowe; 12 – łożysko ślizgowe wzdłużne jednostronne; I – wał silnika; II – cichobieżny wał reduktora; III – pośredni wał reduktora; IV – cichobieżny wał reduktora; V – roboczy wał maszyny

## Zadania do samodzielnego wykonania (graficznie)

**Zadanie 3.15.** Sporządzić schemat kinematyczny napędu w oparciu o schemat strukturalny (Tabela 3.18), wskazując jego elementy i główne parametry.

Tabela 3.18. Dane wyjściowe do zadania 3.15

Nr war.	Schemat strukturalny
1	Silnik → przekładnia klinowa → dwustopniowa przekładnia walcowa wykonana zgodnie z rozszerzonym schematem → złączka kompensująca → roboczy wał maszyn oparty o jednostronne łożyska ślizgowe
2	Silnik → złączka → przekładnia ścięta z ukośnymi zębami → złączka → wał maszyny roboczej oparty o stożkowe łożyska toczne
3	Silnik → przekładnia klinowo-pasowa → przekładnia ślimakowa z górnym położeniem ślimaka → złączka sprężysta → wał maszyny oparty na o dwustronne łożyska toczne skośne
4	Silnik → złączka → przekładnia walcowa skośna → przekładnia łańcuchowa → wał roboczy maszyny oparty o łożyska kulkowe wzdłużne
5	Silnik → złączka → dwustopniowa przekładnia walcowa wykonana zgodnie z rozszerzonym schematem ze skośnymi zębami → przekładnia łańcuchowa → wał roboczy maszyny oparty o promieniowe łożyska kulkowe
6	Silnik → przekładnia łańcuchowa → współosiowa dwustopniowa przekładnia czołowa ze skośnymi zębami czołowymi → złączka sprężysta → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
7	Silnik → złączka → trzystopniowa przekładnia wykonana według schematu dzielonego z ukośnymi zębami → złączka kompensująca → wał maszyny oparty o łożyska ślizgowe
8	Silnik → przekładnia łańcuchowa → dwustopniowa przekładnia ślimakowa → złączka → roboczy wał maszyny podparty łożyskiem tocznym
9	Silnik → złączka → dwustopniowa przekładnia ślimakowa → złączka → roboczy wał maszyny oparty o łożysko toczne
10	Silnik → przekładnia łańcuchowa → przekładnia ścięta z okrągłymi zębami → złączka → wał roboczy maszyny oparty o promieniowe łożyska toczne
11	Silnik → przekładnia łańcuchowa → dwustopniowa przekładnia walcowa wykonana zgodnie z rozszerzonym schematem na wale cichobieżnym, z jednej strony którego zainstalowano hamulec → złączka → wał roboczy maszyny oparty o łożyska ślizgania

Nr war.	Schemat strukturalny
12	Silnik → złączka sprężysta → pionowa przekładnia dwustopniowa z walcowym kołem zębatym czołowym → przekładnia pasowa z pasem klinowym → wał roboczy maszyny podparty na łożyskach stożkowych
13	Silnik → złączka → przekładnia kąтова z zębami stożkowymi → złączka → wał → przekładnia pasowa wału roboczego maszyny wsparta na łożyskach tocznych
14	Silnik → złączka → dwustopniowa przekładnia walcowa wykonana zgodnie z rozszerzonym schematem z ukośnymi zębami → złączka kompensująca → roboczy wał maszyny podparty łożyskami ślizgowymi
15	Silnik → przekładnia klinowa → przekładnia czołowa o zębach ściętych → złączka → wał roboczy maszyny podparty na łożyskach tocznych kulkowych
16	Silnik → przekładnia łańcuchowa → przekładnia ślimakowa z górnym układem ślimaków → złączka → wał roboczy maszyny podparty na łożyskach tocznych skośnych
17	Silnik → złączka → przekładnia zębowo-ślimakowa → złączka → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
18	Silnik → przekładnia łańcuchowa → dwustopniowa przekładnia ślimakowa → złączka → roboczy wał maszyny oparty o łożyska ślizgowe
19	Silnik → złączka → trzystopniowa przekładnia wykonana zgodnie ze schematem podziału wałów pośrednich o zębach skośnych i zębach szewronowych dużej i niskiej prędkości → złączka → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
20	Silnik → przekładnia z paskiem klinowym i dwustopniowym kołem pasowym → przekładnia kąтова skośna → złączka → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
21	Silnik → złączka → przekładnia czołowa o zębach ściętych → otwarta przekładnia zębata → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
22	Silnik → złączka → dwustopniowa przekładnia o zębach skośnych → przekładnia łańcuchowa → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
23	Silnik → złączka → pionowa przekładnia jednostopniowa o zębach skośnych → przekładnia łańcuchowa → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne skośne.
24	Silnik → złączka → dwustopniowa przekładnia wykonana według rozszerzonego schematu o zębach skośnych → przekładnia łańcuchowa → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne
25	Silnik → przekładnia łańcuchowa → przekładnia czołowa o zębach skośnych → otwarta przekładnia stożkowa → wał roboczy maszyny oparty o łożyska toczne

Nr war.	Schemat strukturalny
26	Silnik → przekładnia łańcuchowa → trójstopniowa przekładnia czołowa o zębach skośnych → otwarta przekładnia stożkowa z wałem roboczym maszyny podpartym łożyskami tocznymi
27	Silnik → przekładnia łańcuchowa → przekładnia ślimakowa → otwarta przekładnia zębata walcowa z wałem roboczym maszyny podpartym na dwurzędowych samonastawnych łożyskach wałeczkowych
28	Silnik → przekładnia klinowa → stożkowo-walcowa przekładnia o zębach skośnych → złączka → wał roboczy maszyny oparty o samonastawne łożyska toczne
29	Silnik → złączka → przekładnia zębato-ślimakowa → złączka → wał roboczy maszyny oparty o jednostronne łożyska toczne
30	Silnik → trzybiegowa przekładnia walcowa skośna z napędem pasowym → otwarta przekładnia zębata walcowa → roboczy wał maszyny oparty o łożyska toczne



### 3.8. Obliczanie wałów i osi

#### Wiadomości ogólne

**Wały** to części, które służą do mocowania, podtrzymywania obracających się części (kół zębatach, kół pasowych, sprzęgieł itp.) i przenoszenia momentu obrotowego wzdłuż ich osi.

Niektóre wały nie podtrzymują obracających się części (wały Kardana, drążki skrętne itp.). Podczas pracy na wał oddziałują siły zginające i skręcające, a w niektórych przypadkach także rozciągające i ściskające.

**Osie** są częściami przeznaczonymi wyłącznie do przytrzymywania i podtrzymywania znajdujących się na nich elementów. W przeciwieństwie do wału, oś nie przenosi momentu obrotowego i oddziałują na nią tylko siły zginające.

Osie mogą obracać się wraz z zamontowanymi częściami, które zapewniają lepszą wydajność łożysk, albo być nieruchome, jeżeli wymagane jest umieszczenie łożysk w obracającej się części.

**Elementy konstrukcyjne wałów i osi.** Konstrukcja, jakość powierzchni wałów i osi zależą od ich przeznaczenia, charakteru i wielkości przyłożonych do nich obciążeń, metody mocowania zamontowanych na nich części, warunków montażu zespołu i technologii ich wytwarzania.

Konstrukcja wału i osi obejmuje: *powierzchnie nośne, powierzchnie osadzenia, obszary przejściowe, ramiona, fazowania, skosy i inne elementy.*

**Materiały wałów i osi.** Materiały wałów i osi muszą być wytrzymałe, sztywne, łatwo obrabialne i mieć wysoki moduł sprężystości. Wały i osie są wykonywane głównie ze stali węglowych i stopowych, rzadziej z żeliwa. Gatunki stali stosowane do wałów i osi bez obróbki cieplnej S275, S315, C35, C40; do wałów z obróbką cieplną C45, 40H, 40HN, 40HN2MA, 30HG. Wały szybkoobrotowe pracujące w łożyskach ślizgowych są wykonywane ze stali C20, 20H, 12HN3A. Czopy tych wałów są poddawane nawęglaniu lub azotowaniu w celu zwiększenia odporności na zużycie.

W przypadku wałów stalowych o średnicy do 150 mm, jako przedmiot obrabiany stosuje się zwykle walcówkę okrągłą, natomiast w przypadku wałów o większej średnicy i wałów kształtowych stosuje się odkuwki. Wały są toczone, a powierzchnie osadzenia są dalej szlifowane. Mocno obciążone wały są szlifowane na całej powierzchni. Właściwości mechaniczne niektórych gatunków stali stosowanych do produkcji wałów i osi podano w tabeli D.41.

## Podstawowe wzory obliczeniowe

Wały i osie obrotowe podlegają cyklicznie zmieniającym się naprężeniom podczas pracy. Głównymi kryteriami wydajności są *wytrzymałość zmęczeniowa (trwałość)* i *szywność*. Zniszczenie wałów i osi w większości przypadków jest związane ze zmęczeniem materiału, więc *główne obliczenia dotyczą wytrzymałości zmęczeniowej*.

Głównymi obciążeniami działającymi na wały i osie są obciążenia pochodzące od kół zębatach, od złączek i korpusów roboczych maszyn lub mechanizmów na nich umieszczonych. W wyniku tego wały i osie ulegają złożonym odkształceniom: skręcaniu, zginaniu, rozciąganiu, ściskaniu. Wpływ sił rozciągających i ściskających nie jest istotny i nie jest brany pod uwagę w większości obliczeń. Ciężar własny wałów i osi, a także ciężar części znajdujących się na wałach i osiach, jest brany pod uwagę tylko wtedy, gdy ich wartości są tego samego rzędu co główne obciążenia.

**Wały są obliczane** w dwóch etapach: *projektowym* (wstępnym) i *weryfikacyjnym* (końcowym). Obliczenia projektowe wałów są przeprowadzane dla statycznej wytrzymałości *na skręcanie tylko w jednym kierunku* w celu określenia przybliżonych średnic. Nieuwzględnione naprężenia zginające, koncentracje naprężeń, schematy obciążeń i inne czynniki są kompensowane poprzez zmniejszenie dopuszczalnych naprężeń skręcających  $k_s$ . W obliczeniach projektowych zwykle określa się średnicę wyjściowego końca wału, który w większości przypadków poddawany jest tylko skręcaniu. Wał pośredni nie ma końca wyjściowego, więc oblicza się dla niego średnicę pod kołem zębatym.

### Warunek wytrzymałości na skręcanie

$$\tau_s = \frac{T}{0,2d^3} \leq k_s, \text{ skąd } d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2k_s}}$$

gdzie  $T$  – moment skręcający przekazywany przez wał, Nmm;

$k_s$  – dopuszczalne naprężenia skręcające, MPa. Dla wyjściowych części wałów  $k_s = 20 \div 30$  MPa. Dla wałów pośrednich przy określeniu średnicy pod kołem  $k_s = 10 \div 20$  MPa.

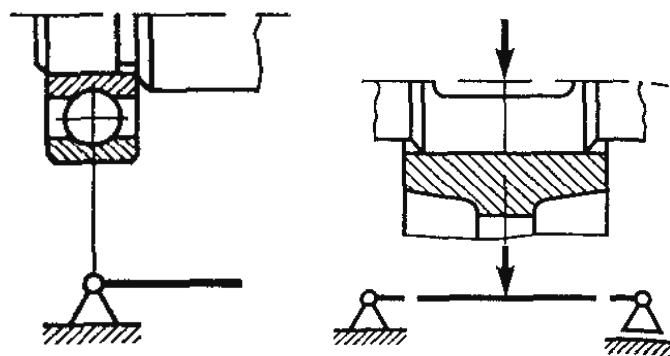
Uzyskana wartość jest zaokrąglana do najbliższego standardowego rozmiaru (tabela D.43). Pozostałe średnice wału są określane podczas procesu projektowania, biorąc pod uwagę konstrukcję i wymiary części znajdujących się na wale, technologię produkcji i montażu.

Przy projektowaniu przekładni można przyjąć, że średnica wyjściowego końca wału jest równa średnicy wału silnika elektrycznego, z którym będzie on połączony za pomocą złączki.

Wały są sprawdzane pod kątem zmęczenia, wytrzymałości statycznej i sztywności, a w niektórych przypadkach pod kątem drgań (nieomawiane w skrypcie). Jest to końcowe i podstawowe obliczenie. Wykonuje się je po zaprojektowaniu wału i wybranych łożysk, gdy znane są średnice, długości odcinków wału, chropowatość, pasowanie, materiał, rodzaje wzmocnień, rozmiary przejść pachwinowych oraz wielowypustów i rowków wpustowych itp. Obliczenia weryfikacyjne wałów są wykonywane według schematów projektowych.

### Schematy obliczeniowe wałów

Na podstawie rysunku (szkicu) wału opracowuje się schemat projektowy, w którym wały są traktowane jako belki zamocowane obrotowo w sztywnych podporach, z których jedna jest ruchoma. Obciążenia działające na wał sprowadzają się do dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn – poziomej i pionowej. Przy wyborze typu podpory przyjmuje się, że jeśli łożyska przenoszą zarówno siły promieniowe, jak i osiowe, są one uważane za przegubowe podpory stałe, a łożyska, które przenoszą tylko siły promieniowe, są uważane za przegubowe podpory ruchome. W schematach obliczeniowych działające obciążenia ciągłe, dla uproszczenia zastępowane są obciążeniami skupionymi, a w obliczeniach przybliżonych są one przykładane w środku części znajdującej się na wale (rys. 3.44). W bardziej precyzyjnych obliczeniach punkty, w których przykładane są obciążenia, są określone zgodnie z zaleceniami, biorąc pod uwagę cechy konstrukcyjne części, które mają być zamontowane na wale.



Rys. 3.44. Schematy obliczeniowe wałów

Po sporządzeniu schematu projektowego określone są reakcje podpór i wykonywane są wykresy sił poprzecznych, zginania, skręcania i momentów równoważnych.

**Obliczenie wytrzymałości zmęczeniowej wałów może być uproszczone i dokładne.** Obliczenia **dokładne** wykonywane są dla potencjalnie niebezpiecznych przekrojów, wstępnie zaplanowanych zgodnie z wykresami momentów i lokalizacją stref koncentracji naprężeń.

**Uproszczone** obliczenia przeprowadza się przy założeniu, że naprężenia normalne i styczne zmieniają się w symetrycznym (najbardziej niekorzystnym) cyklu.

Warunek wytrzymałości przyjmuje postać

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{0,1d^3} \leq k_{-1g} \text{ skąd } d = \sqrt[3]{\frac{M_{red}}{0,1k_{-1g}}}$$

gdzie  $\sigma_{red}$  – naprężenia zredukowane w obliczanym przekroju, MPa;

$M_{red}$  – moment zredukowany w przekroju, Nmm;

$d$  – średnica wału w obliczanym przekroju, mm;

$k_{-1g}$  – dopuszczalne naprężenia zginające przy symetrycznym cyklu obciążenia, MPa.

Obliczeniowe wartości średnicy wału w obliczanym przekroju porównuje się z przyjętym przy projektowaniu. Jeżeli obliczany przekrój jest osłabiony przez rowek wpustowy, to średnicę obliczeniową zwiększa się o 7 ÷ 10 %, jeżeli dopasowanie jest ciasne – o 5 %. Moment zredukowany określa się z uwzględnieniem jednoczesnego działania momentów zginających i skręcających zgodnie z jedną z hipotez wytrzymałości, na przykład zgodnie z hipotezą największych naprężeń stycznych

$$M_{red} = \sqrt{M_g^2 + T^2},$$

gdzie  $M, T$  – odpowiedni moment zginający i skręcający, Nmm.

**Dokładne** obliczenia sprawdzające na zmęczenie wykonuje się przy założeniu, że naprężenia zginające zmieniają się zgodnie z symetrycznym cyklem przemiennym, a naprężenia skręcające zgodnie z cyklem odzerowym (pulsującym) i mają na celu określenie projektowych współczynników bezpieczeństwa w potencjalnie niebezpiecznych przekrojach, biorąc pod uwagę charakter zmian naprężeń, wpływ wymiarów, koncentrację naprężeń, chropowatość i utwardzenie powierzchni.

Warunek wytrzymałości zmęczeniowej ma postać:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n]$$

gdzie  $n_\sigma, n_\tau$  – odpowiednio współczynnik bezpieczeństwa dla normalnych i stycznych naprężeń;

$[n]$  – dopuszczalny współczynnik bezpieczeństwa. Zwykle przyjmuje się  $[n] = 1,2 \div 3$  (mniejszą wartość przy dokładnych schematach obliczeniowych).

Niebezpieczny jest przekrój, dla którego współczynnik bezpieczeństwa jest minimalny. Jeżeli zapas wytrzymałości jest poniżej dopuszczalnego, w pierwszej kolejności zmienia się konfigurację wału w celu zmniejszenia koncentracji naprężeń. Jeżeli te działania nie doprowadzą do zwiększenia wytrzymałości do wymaganej wartości, zwiększa się średnicę wału, zmienia materiał i powtarza obliczenia.

**Obliczenia na wytrzymałość statyczną.** Sprawdzenie wałów na wytrzymałość statyczną przeprowadza się w celu zapobiegania występowania odkształceń plastycznych (szczątkowych) w czasie działania maksymalnych naprężeń (na przykład podczas rozruchu). Obliczenia na wytrzymałość statyczną z reguły przeprowadza się dla przekroju o najmniejszym zapasie wytrzymałości zmęczeniowej, w którym występuje największe prawdopodobieństwo zniszczenia przy przeciążeniu.

Stosując, na przykład, wyteżeniową hipotezę energetyczną, naprężenie zredukowane dla niebezpiecznego przekroju wału jest określane wzorem

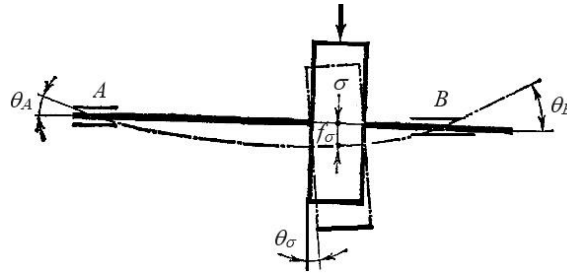
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} \leq k_{max},$$

gdzie  $\sigma_{max}, \tau_{max}$  – największe zginające i skręcające naprężenia odpowiednio w przekroju, MPa.

$$k_{max} \approx 0,66R_e,$$

gdzie  $R_e$  – granica plastyczności materiału.

**Obliczenia na sztywność.** Sprawdzające obliczenia sztywności wałów wykonuje się w tych przypadkach, *kiedy ich odkształcenia mają istotny wpływ na pracę powiązanych z wałem elementów*. Tak, na przykład, zwiększone ugięcie  $f$  wałów przekładni zębatych (rys. 3.45) wywołuje rozbieżność osi kół, koncentrację obciążenia po długości zębów i powoduje ich przedwczesne zużycie a nawet zniszczenie, a kąt obrotu  $\theta$  – zaciskanie się w łożyskach tocznych, zwiększone tarcie i ich przegrzanie.



Rys.3.45. Ugięcie i kąty obroty przekrojów wału

Rozróżnia się sztywność zginania i skrętną.

**Sztywność na zginanie** ocenia się za pomocą ugięcia  $f$  (inne oznaczenie zginania stosowane w literaturze technicznej) i kąta obrotu  $\theta$ , które są określane metodami wytrzymałości materiałów. Wtedy warunek sztywności zginania przyjmie postać:

$$F \leq [f]; \theta \leq [\theta],$$

gdzie  $[f]$  i  $[\theta]$  – odpowiednio dopuszczalne ugięcie [mm] i kąt obrotu [rad], zależą one od przeznaczenia wału, określane na etapie projektowania. W miejscu zainstalowania kół zębatych  $[f] \leq 0,01m$ , gdzie  $m$  – moduł zaczeplenia. Dla łożysk ślizgowych rekomendowane  $[\theta] = 0,001$  rad, w łożyskach kulkowych  $[\theta] \approx 0,01$  rad.

Metody określenia ugięć i kątów omówione zostały w rozdziale „Wytrzymałość materiałów”. Przy typowych schematach obciążenia wałów szeroko stosuje się metodę sił jednostkowych albo zasady niezależnego działania sił, które pozwalają na obliczenia z wykorzystaniem gotowych wzorów przedstawionych w tabeli 3.19.

W większości przypadków wały przekładni nie są sprawdzane na sztywność, ponieważ współczynniki bezpieczeństwa są zawyżone. Wyjątek stanowią wały ślimakowe, które zawsze sprawdza się na sztywność zginania ze względu na dużą odległość między podporami.

Przy symetrycznym położeniu podpór maksymalne ugięcie wynosi

$$f = \frac{l^3 \sqrt{F_{t1}^2 + F_{r1}^2}}{48EJ} \leq [f],$$

gdzie  $l$  – odległość między osiami podpór ślimaka, mm;

$F_{t1}$  i  $F_{r1}$  – siła obwodowa i promieniowa ślimaka, N;

$E$  – moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga), MPa; dla stali  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa;

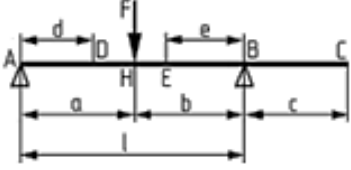

$J$  – zredukowany moment bezwładności przekroju wału ślimaka w uwzględnieniu profilu gwintu, mm<sup>4</sup>.

$$J = \frac{\pi D_{f1}^4}{64} \left( 0,375 + 0,625 \frac{D_{a1}}{D_{f1}} \right),$$

gdzie  $D_{a1}$  i  $D_{f1}$  – zewnętrzna i wewnętrzna średnica ślimaka, mm.

Jeżeli obliczone ugięcie wału  $f > [f]$ , to zwiększa się współczynnik średnicy ślimaka  $q$  i powtarza obliczenia.

Tabela 3.19. Wzory dla określenia ugięcia  $f$  i kątów pochylenia przekroju poprzecznego  $\theta$  wałów o stałym przekroju

$\theta$ albo $f$		
$\theta_A$	$\frac{Fab(l+b)}{6EJl}$	$-\frac{F_1cl}{6EJ}$
$\theta_B$	$-\frac{Fab(l+a)}{6EJl}$	$-\frac{F_1cl}{3EJ}$
$\theta_C$	$\theta_B$	$\frac{F_1c(2l+3c)}{6EJ}$
$\theta_D$	$\frac{Fb(l^2-b^2-3d^2)}{6EJl}$	$\frac{F_1c(3d^2-l^2)}{6EJl}$
$\theta_E$	$\frac{Fa(l^2-a^2-3e^2)}{6EJl}$	-
$\theta_H$	$\frac{Fab(b-a)}{3EJl}$	-
$f_D$	$\frac{Fbd(l^2-b^2-d^2)}{6EJl}$	$-\frac{F_1cd(l^2-d_2)}{6EJl}$
$f_E$	$\frac{Fae(l^2-a^2-e^2)}{6EJl}$	-
$f_H$	$\frac{Fa^2b^2}{3EJl}$	-
$f_C$	$\theta_{BC}$	$\frac{F_1c^2(l+c)}{3EJ}$

Uwaga:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa – moduł sprężystości dla stali;  $J = \frac{\pi d^4}{64}$  – osiowy moment bezwładności przekroju kołowego;  $l$  – długość odcinka między przejściami.

Dla zwiększenia sztywności zginania wałów i osi rekomendowane jest umieszczenie elementów bliżej podpór.

**Sztywność skrętna** wałów jest oceniana przez kąt skręcania  $\varphi_0$  na jednostkę długości wału:

$$\varphi_0 = \frac{T}{GJ_b} \leq [\varphi_0],$$

gdzie  $T$  – moment skrętny w obliczanym przekroju, Nm;

$G$  – moduł Kirchhoffa, MPa; dla stali  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa;

$J_b$  – biegunowy moment bezwładności w obliczanym przekroju,  $m^4$ . Dla okrągłego ciągłego przekroju  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ;

$[\varphi_0]$  – dopuszczalny kąt skręcania wału [rad] na długość 1 m. Wartość zależy od przeznaczenia wału i mieści się w szerokim zakresie

$[\varphi_0] = (5,0 \div 22) \cdot 10^{-3}$  rad/m.

Dla wielu wałów przekładni sztywność skrętna nie jest istotna i takie obliczenia nie są przeprowadzane.

### Obliczenia osi

**Osie** tylko podtrzymują elementy i dlatego są obciążone naprężeniami zginającymi. Dla osi, tak jak i dla wałów, wykonuje się obliczenia *projektowe* i *sprawdzające*. **Projektowe** (wstępne) obliczenia osi na wytrzymałość statyczną wykonuje się podobnie jak dla belek z podporami przegubowymi, konwencjonalnymi metodami wytrzymałości materiałów, ustalając długości odcinków w zależności od konstrukcji węzła. Obliczenia osi nieruchomych opierają się na założeniu, że naprężenia zginające zmieniają się zgodnie z cyklem odzerowym, najbardziej niekorzystnym ze wszystkich znanych cykli stałych, a obliczenia osi ruchomych opierają się na założeniu, że naprężenia zmieniają się zgodnie z cyklem symetrycznym. Średnicę w obliczanym przekroju określa się z warunku wytrzymałości na zginanie:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{0,1d^3} \leq k_{-1(0)g} \text{ skąd } d \geq \sqrt[3]{\frac{M_g}{0,1k_{-1(0)g}}}$$

gdzie  $M_g$  – moment gnący, Nmm;

$d$  – średnica przekroju osi, mm;

$k_{(-1)0g}$  – odpowiednio dopuszczalne naprężenia zginania przy symetrycznym i odzerowym cyklu zmiany naprężeń, MPa.

Dla osi wykonanych ze stali średniowęglowych dopuszczalne naprężenia zginające przyjmują  $k_{0g} = 100 \div 160$  MPa. Mniejsze wartości rekomenduje się przy ostrych koncentracjach naprężeń. Naprężenia w osiach obracających się w cyklu symetrycznym przyjmują  $k_{-1g} = (0,5 \div 0,6)k_{0g}$ . Jeśli oś w obliczanym przekroju ma rowek lub okleinę w części konstrukcyjnej, wynikowa średnica jest zwiększana o około 10 % i zaokrąglana do najbliższej standardowej średnicy.

**Sprawdzające** (ostateczne) obliczenia osi na wytrzymałość zmęczeniową i sztywność przeprowadza się, jak przy obliczeniach wałów, przy  $T = 0$ .



## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.31.** Napęd (rys. 3.46) zawiera silnik, przekładnię pasową, reduktor. Z warunku wytrzymałości określić średnicę końca wyjściowego cichobieżnego wału reduktora, jeżeli moc silnika  $N_{sil} = 10 \text{ W}$ ; prędkość obrotowa wału silnika  $n_{sil} = 1000 \text{ min}^{-1}$ , średnice kół pasowych  $D_1 = 160 \text{ mm}$ ,  $D_2 = 320 \text{ mm}$ , przełożenie reduktora  $u_p = 5$ , dopuszczalne naprężenia skręcające dla materiału wału  $k_s = 45 \text{ MPa}$ .

*Dane:*

$$N_{sil} = 10 \text{ W}$$

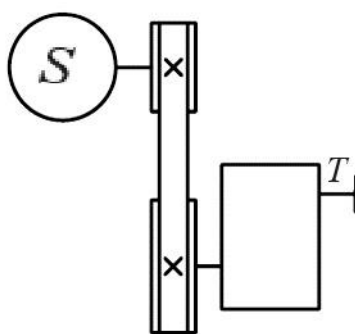
$$n_{sil} = 1000 \text{ min}^{-1}$$

$$D_1 = 160 \text{ mm}$$

$$D_2 = 320 \text{ mm}$$

$$u_p = 5$$

$$k_s = 45 \text{ MPa.}$$



*Szukane:*

$$d_{w.c.} \text{ -?}$$

Rys. 3.46. Napęd do obliczeń

### Rozwiązanie

1. Zapisujemy warunek wytrzymałości na skręcanie wału cichobieżnego

$$\tau_s = \frac{T_{w.c.}}{0,2d_{w.c.}^3} \leq k_s$$

2. Określamy nieznanne

2.1. Określamy moment na wale silnika

$$T_{sil} = 9,55 \frac{N_{sil}}{n_{sil}} = 9,55 \frac{10 \cdot 10^3}{1000} \approx 96 \text{ Nm}$$

2.2. Określamy przełożenie przekładni

$$u_{prz} = \frac{D_2}{D_1} u_p = \frac{320}{160} \cdot 5 = 10$$

2.3. Określamy sprawność napędu

Napęd składa się z napędu pasowego i przekładni – biorąc pod uwagę, że przełożenie wynosi 5, będzie to przekładnia jednostopniowa, a równoległe ułożenie wałów na schemacie wskazuje, że jest to przekładnia cylindryczna. Z tabeli D.17 przyjmujemy sprawność przekładni pasowej  $\eta_{p,p} = 0,96$ , sprawność przekładni zębatej  $\eta_p = 0,98$ , a następnie sprawność napędu

$$\eta_n = \eta_{prz} \cdot \eta_{red} = 0,94$$

2.4. Określamy moment skręcający na wale cichobieżnym

$$T_{w.c} = T_{sil} \cdot u_{prz} \cdot \eta_{prz} = 96 \cdot 10 \cdot 0,94 \approx 902 \text{ Nm}$$

2.5. Z warunku wytrzymałości na skręcanie określamy średnicę wału ci-chobieżnego

$$d_{w.c} \geq \sqrt[3]{\frac{T_{w.c} \cdot 10^3}{0,2k_s}} = \sqrt[3]{\frac{902 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 45}} \geq 47 \text{ mm}$$

Z tabeli D.43 przyjmujemy  $d_{w.c} = 48 \text{ mm}$ .

*Odpowiedź:*  $d_{w.c} = 48 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.32.** Określić średnicę wału (rys. 3.47) w miejscu przyłoże-nia obciążenia  $F_1$ , jeśli: przekazywana moc  $N = 10 \text{ kW}$ ; prędkość obrotowa wału  $n = 500 \text{ min}^{-1}$ ;  $F_1 = 3 \text{ kN}$ ; materiał wału stal C45;  $a = 300 \text{ mm}$ ;  $b = 200 \text{ mm}$ ; przekrój osłabiony rowkiem wpustowym.

*Dane:*

$$N = 10 \text{ kW}$$

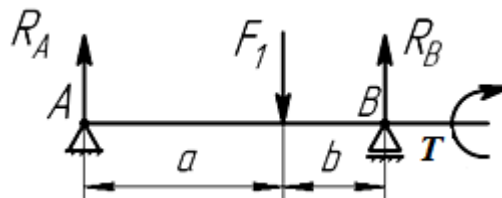
$$n = 500 \text{ min}^{-1}$$

$$F_1 = 3 \text{ kN}$$

$$a = 300 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

materiał – stal C45



*Szukane:*

$d - ?$

Rys. 3.47. Schemat sił oddziałujących na wał

### Rozwiązanie

1. Zapisujemy warunek wytrzymałości dla wału z uwzględnieniem mo-mentu gnącego i skręcającego:

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{0,1d^3} \leq k_{-1g}$$

2. Określamy nieznanne

2.1. Określamy dopuszczalne naprężenia dla materiału wału

Dla stali C45 z tabeli D.41 przyjmujemy  $\sigma = 560 \text{ MPa}$  (ponieważ nie-znana jest średnica wału), dla którego z tabeli D.42 przyjmujemy dopusz-czalne naprężenia  $k_{-1g} = 50 \text{ MPa}$ .

2.2. Określamy moment skręcający, który przekazuje wał

$$T = 9,55 \frac{N}{n} = 9,55 \frac{10 \cdot 10^3}{500} = 191 \text{ Nm}$$

2.3. Określamy reakcje w podporach

Przyjmujemy regułę znaków. Moment przeciwny kierunkowi ruchu wskazówek zegara przyjmujemy jako dodatni.

$$\Sigma M_A = 0; R_B(a + b) - F_1 a = 0; R_B = \frac{F_1 a}{a + b} = \frac{3000 \cdot 0,3}{0,3 + 0,2} = 1800 \text{ N}$$

$$\Sigma M_B = 0; -R_A(a + b) + F_1 b = 0; R_A = \frac{F_1 b}{a + b} = \frac{3000 \cdot 0,2}{0,3 + 0,2} = 1200 \text{ N}$$

*Sprawdzenie*

$$\Sigma F_y = 0. R_A - F_1 + R_B = 0; 1200 - 3000 + 1800 = 0;$$

$$0 = 0$$

Reakcje określono poprawnie.

2.4. Określamy moment zginający

$$M = R_A a = 1200 \cdot 0,3 = 360 \text{ Nm}$$

2.5. Określamy moment zredukowany

$$M_{red} = \sqrt{M_g^2 + T^2} = \sqrt{360^2 + 191^2} = 408 \text{ Nm}$$

2.6. Z warunku wytrzymałości określamy średnicę wału

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{red}}{0,1k_{-1g}}} = \sqrt[3]{\frac{408 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 50}} = 43 \text{ mm}$$

Ponieważ przekrój jest osłabiony przez rowek wpustowy, średnicę zwiększamy o 10%.

$$d \cdot 1,1 = 43 \cdot 1,1 = 47,3 \text{ mm}$$

Uzyskaną wartość zaokrąglamy do wartości z tabeli D.43  $d = 50 \text{ mm}$ .

*Odpowiedź:*  $d = 50 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.33.** Sprawdzić wytrzymałość osi w miejscu oddziaływania siły  $F_1$ , jeśli wartość obciążenia  $F_1 = 10 \text{ kN}$ , średnica osi  $d = 40 \text{ mm}$ ;  $a = 300 \text{ mm}$ ;  $b = 200 \text{ mm}$ , oś nieruchoma, przekrój osłabiony rowkiem wpustowym, dopuszczalne naprężenia materiału osi  $k_{0g} = 70 \text{ MPa}$ .

*Dane:*

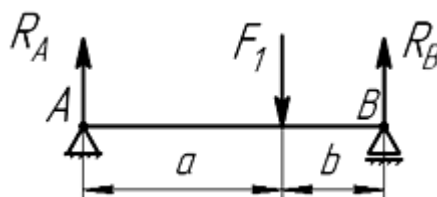
$$F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$d = 40 \text{ mm}$$

$$a = 300 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$k_{0g} = 70 \text{ MPa}$$



Rys. 3.48. Siły oddziałujące na oś

*Szukane:*

$$\sigma_g - ?$$

*Rozwiązanie*

1. Sporządzamy schemat obliczeniowy (rys. 3.48).

2. Zapisujemy warunek wytrzymałości dla osi:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{0,1d^3} \leq k_{0g}$$

3. Określamy nieznanne.

3.1 Wyznaczamy wartość reakcji w podporach.

Przyjmujemy regułę znaków. Moment przeciwny kierunkowi ruchu wskazówek zegara przyjmujemy jako dodatni.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0; R_B(a + b) - F_1a = 0; R_B = \frac{F_1a}{a + b} = \frac{10000 \cdot 0,3}{0,3 + 0,2} = 6000 \text{ N} \\ \Sigma M_B = 0; -R_A(a + b) + F_1b = 0; R_A = \frac{F_1b}{a + b} = \frac{10000 \cdot 0,2}{0,3 + 0,2} = 4000 \text{ N}\end{aligned}$$

*Sprawdzenie*

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - F_1 + R_B = 0; 4000 - 10000 + 6000 = 0; 0 = 0$$

Reakcje określono poprawnie.

3.2. Określamy moment gnący:

$$M = R_A a = 4000 \cdot 0,3 = 1200 \text{ Nm}$$

3.3. Określamy naprężenia zginające i oceniamy wytrzymałość wału:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{0,1d^3} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 40^3} = 188 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 188 \text{ MPa}$$

Ponieważ przekrój osi jest osłabiony rowkiem wpustowym, zwiększamy obliczone naprężenia o 10%:

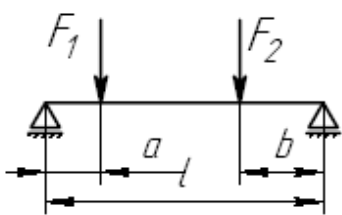
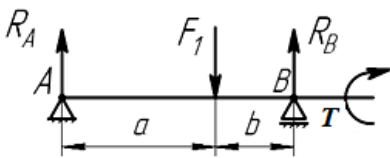
$$\sigma_g \cdot 1,1 = 188 \cdot 1,1 = 207 \text{ MPa} > k_{og} = 70 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałości nie jest spełniony. W celu spełnienia warunku wytrzymałości trzeba zwiększyć średnicę albo wybrać bardziej wytrzymały materiał.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania (obliczeniowe)

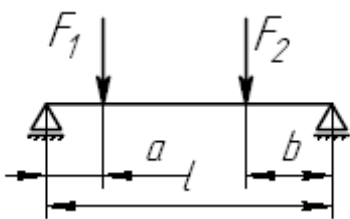
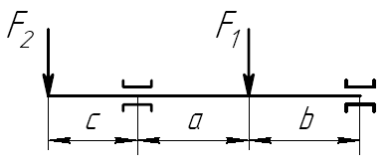
**Zadanie 3.16.** Określić średnicę wału w miejscu przyłożenia obciążenia  $F_1$ . Dane wejściowe przedstawiono w tabeli 3.20.

Tabela 3.20. Dane wejściowe do zadania 3.16

Nr war	$F_1$ , kN	$F_2$ , kN	$N$ , kW	$n_1$ , min <sup>-1</sup>	$a$ , mm	$b$ , mm	$l$ , mm	$k_{1g}$ , MPa	Schemat
1	4,5	3,0	-	-	50	100	300	30	 <p style="text-align: center;">Przekrój osłabiony rowkiem wpustowym</p>
2	5,0	4,0	-	-	100	150	400	35	
3	5,5	5,0	-	-	150	200	500	40	
4	6,0	2,0	-	-	200	250	600	45	
5	6,5	4,0	-	-	300	300	700	50	
6	7,0	5,0	-	-	250	120	800	55	
7	7,5	2,5	-	-	350	140	600	60	
8	8,0	3,0	-	-	180	160	700	65	
9	8,5	5,0	-	-	220	180	800	70	
10	9,5	6,0	-	-	300	150	1000	75	
11	10,0	4,0	-	-	180	240	600	80	
12	10,5	3,0	-	-	150	125	700	85	
13	11,0	5,0	-	-	100	140	500	90	
14	11,5	2,0	-	-	200	160	650	30	
15	12,0	1,0	-	-	250	180	750	35	
16	16,5	-	16,5	900	100	50	-	40	 <p style="text-align: center;">Przekrój nieosłabiony przez rowek wpustowy</p>
17	12,5	-	12,5	950	150	100	-	45	
18	13,0	-	13,0	1000	200	150	-	50	
19	13,5	-	13,5	1050	250	200	-	55	
20	14,0	-	14,0	1100	300	250	-	60	
21	14,5	-	14,5	1200	120	50	-	65	
22	15,0	-	15,0	1250	140	100	-	70	
23	16,0	-	16,0	1300	160	120	-	75	
24	17,0	-	17,0	1400	180	140	-	80	
25	17,5	-	17,5	1450	150	100	-	85	
26	18,0	-	18,0	1500	240	200	-	90	
27	19,0	-	19,0	750	125	50	-	30	
28	20,0	-	20,0	800	140	100	-	35	
29	21,0	-	21,0	750	160	120	-	40	
30	22,0	-	22,0	800	180	150	-	45	

**Zadanie 3.17.** Wyznaczyć średnicę osi w miejscu przyłożenia siły  $F$ .  
Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.21.

Tabela 3.21. Dane wejściowe do zadania 3.17

Nr war.	$F_1$ , kN	$F_2$ , kN	$a$ , mm	$b$ , mm	$c$ , mm	$l$ , mm	$k_{1g}$ , MPa	Schemat
1	4,5	3,0	50	100	-	300	30	 <p>Przekrój nieosłabiony przez rowek wpustowy</p>
2	5,0	4,0	100	150	-	400	35	
3	5,5	5,0	150	200	-	500	40	
4	6,0	2,0	200	250	-	600	45	
5	6,5	4,0	300	300	-	700	50	
6	7,0	5,0	250	120	-	800	55	
7	7,5	2,5	350	140	-	600	60	
8	8,0	3,0	180	160	-	700	65	
9	8,5	5,0	220	180	-	800	70	
10	9,5	6,0	300	150	-	1000	75	
11	10,0	4,0	180	240	-	600	80	
12	10,5	3,0	150	125	-	700	85	
13	11,0	5,0	100	140	-	500	90	
14	11,5	2,0	200	160	-	650	30	
15	12,0	1,0	250	180	-	750	35	
16	16,5	5,0	100	50	50	-	40	 <p>Przekrój osłabiony przez rowek wpustowy</p>
17	12,5	2,5	150	100	100	-	45	
18	13,0	3,0	200	150	150	-	50	
19	13,5	5,0	250	200	200	-	55	
20	14,0	6,0	300	250	300	-	60	
21	14,5	4,0	120	50	250	-	65	
22	15,0	3,0	140	100	350	-	70	
23	16,0	5,0	160	120	180	-	75	
24	17,0	2,0	180	140	220	-	80	
25	17,5	1,0	150	100	300	-	85	
26	18,0	3,0	240	200	180	-	90	
27	19,0	4,0	125	50	150	-	30	
28	20,0	5,0	140	100	100	-	35	
29	21,0	2,0	160	120	200	-	40	
30	22,0	5,0	180	150	250	-	45	

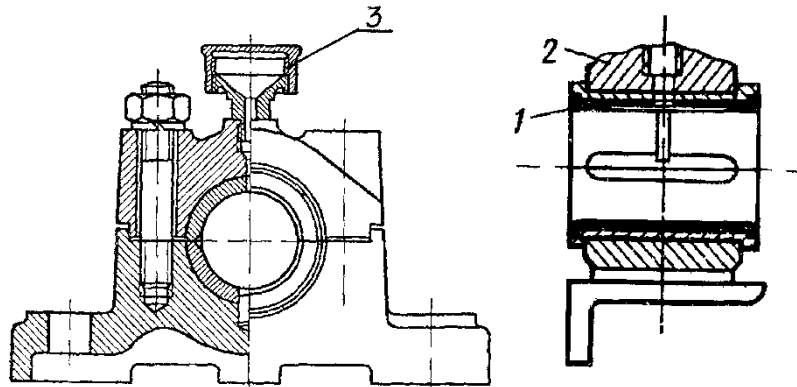
### 3.9. Obliczanie łożysk ślizgowych

#### Wiadomości ogólne

**Łożyska ślizgowe** są podporami dla obracających się wałów i osi, które zapewniają ich pozycjonowanie w przestrzeni, zdolność do obracania się lub kołysania i przenoszenia wszystkich działających na nie obciążeń.

#### Układ łożysk ślizgowych

W wersji uproszczonej (rys. 3.48) łożysko ślizgowe składa się z wkładki 1 zainstalowanej w obudowie 2.



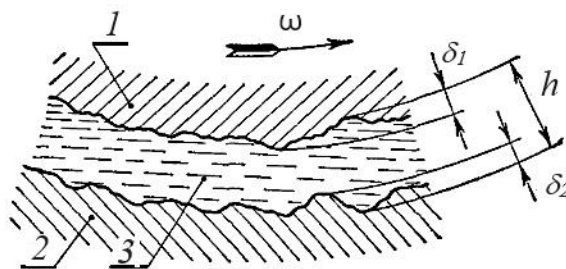
Rys. 3.48. Łożysko ślizgowe:

1 – wkładka; 2 – obudowa; 3 – smarownica

Wkładka, obudowa, smarownica i uszczelka tworzą **węzeł łożyskowy**, który często nazywany jest **łożyskiem ślizgowym**.

Praca łożyska ślizgowego jest związana z różnymi **trybami tarcia**.

W zależności od trybu pracy łożyska tarcie w nim może być *suche, graniczne, półsuche, półpłynne i płynne, przejściowe* z jednego trybu w inne przy zwiększeniu prędkości kątowej wału od zera do pewnej wartości. Najkorzystniejszymi warunkami tarcia łożyska ślizgowego jest **tryb tarcia płynnego**, przy którym powierzchnie tarcia są całkowicie rozdzielone smarem (rys. 3.49), grubość  $h$ , która jest większa od sumy  $\delta_1 + \delta_2$ .



Rys. 3.49. Do obliczenia trybu tarcia płynnego:

1 – wkładka; 2 – oporowa powierzchnia wału; 3 – warstwa smaru

Przy płynnym tarcu nie występuje zużycie powierzchni, występuje minimalny opór obrotowy, wydzielanie ciepła i wysoka sprawność. Tarcie płynne występuje tylko w specjalnych łożyskach przy określonych warunkach. Przy innych trybach tarcia obserwuje się zużycie powierzchni tarcia, istotne wydzielanie się ciepła i zmniejszenie sprawności.

Większość łożysk ślizgowych pracuje w warunkach tarcia półpłynnego, a przy rozruchu i zatrzymaniu się – w warunkach półsuchego i granicznego tarcia.

Graniczne, półsuche i półpłynne tarcie łączy pojęcie – **tarcia przy niedoskonałym smarowaniu**.

**Wkład** – to właściwie samo łożysko ślizgowe. Stosuje się je w celu uniknięcia potrzeby wykonania obudowy z drogich materiałów odpornych na zużycie, w celu możliwości zamiany po rozruchu. Wkłady są *nieodłączalne, odłączalne*, a w przypadku wałów o dużej średnicy mają postać *zestawu podkładek*, które tworzą powierzchnię nośną.

Materiałami na wkłady są:

- a) metale i stopy metali – babbity, brąz, stopy na bazie cynku, stopy na bazie aluminium, żeliwa przeciwcierne;
- b) materiały bimetaliczne;
- c) materiały niemetaliczne (tworzywa sztuczne, drewno, guma, materiały grafitowe);
- d) materiały kompozytowe;
- e) metaloceramika.

Wybór materiału wkładu zależy od obciążenia, prędkości i warunków pracy. Najpopularniejsze materiały wkładów i ich właściwości przedstawiono w tabeli D.44.

### **Podstawowe wzory obliczeniowe**

*Głównym kryterium wydajności łożysk ślizgowych jest odporność na zużycie – odporność na zużycie i zakleszczenie.*

#### **Obliczenie łożysk pracujących w trybie niedoskonałego smarowania**

Jak wspomniano powyżej, większość łożysk ślizgowych pracuje w warunkach niedoskonałego smarowania (tarcie półsuche, graniczne i półpłynne). Ze względu na brak teorii obliczeń w trybie niedoskonałego smarowania, łożyska są obliczane konwencjonalnie na podstawie średniego ciśnie-



nia  $p$  i specyficznej pracy sił tarcia  $p\nu$ . Obliczenia na podstawie średniego ciśnienia  $p$  gwarantują brak wyciskania smaru, a obliczenia  $p\nu$  – normalny tryb cieplny i brak zacinania się.

### 1. Łożyska poprzeczne (rys. 3.50, a)

Ciśnienie średnie

$$p = \frac{F_r}{dl} \leq [p]$$

właściwa praca sił tarcia

$$p\nu \leq [p\nu]$$

Prędkość kątowna oporowej powierzchni wału (prędkość ślizgania)

$$v = \frac{\omega d}{2 \cdot 1000} = \frac{\pi n d}{60 \cdot 1000} \leq v_{max},$$

gdzie  $F_r$  – siła promieniowa łożyska, N;

$\nu$  – prędkość obwodowa powierzchni czopu (prędkość ślizgania);

$d$  i  $l$  – średnica i długość powierzchni nośnej wału, które są określane podczas obliczeń i projektowania wału, mm. Dla większości łożysk  $l = (0,5 \div 1,3)d$ ;

$[p]$  i  $[p\nu]$  – dopuszczalne ciśnienie i właściwa praca sił tarcia, MPa.

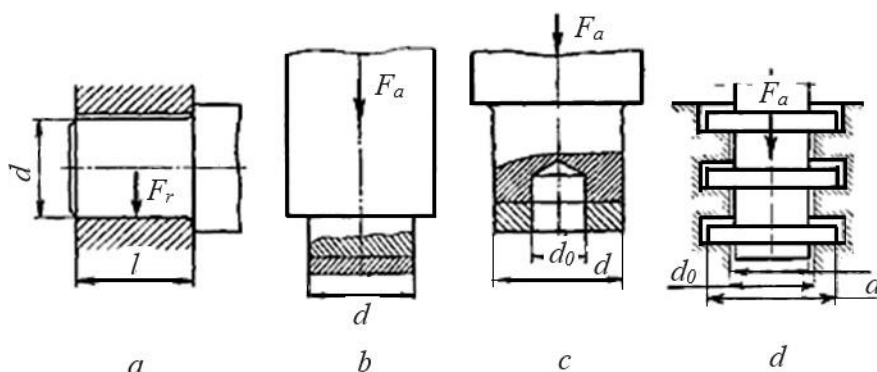
$v_{max}$  – maksymalna prędkość ślizgania;

1000 – współczynnik konwersji milimetrów w metry;

$n$  – prędkość obrotowa powierzchni nośnej,  $\text{min}^{-1}$ ;

$\omega$  – prędkość kątowna powierzchni nośnej,  $\text{s}^{-1}$ .

Dopuszczalne wartości  $[p]$ ,  $[p\nu]$ ,  $v_{max}$  zależą od materiału powierzchni tarcia i są określane na podstawie doświadczenia eksploatacji podobnych konstrukcji, wybierane z tabeli D.44.



Rys. 3.50. Schemat występowania sił w łożysk ślizgania ze smarowaniem niedoskonałym:

a – łożysko oporowe; b – łożysko z kołnierzem, c – łożysko z pierścieniem oporowym, d – łożysko oporowe grzebieniowe

## 2. Płaskie łożyska wzdłużne (łożyska oporowe):

a) Łożysko oporowe z masywną stopą (rys. 3.50, *b*)  
ciśnienie średnie

$$p = \frac{4F_a}{\pi d^2 \varphi} \leq [p],$$

gdzie  $\varphi$  – współczynnik uwzględniający zmniejszenie powierzchni nośnej przez rowki smarujące, 0,8...0,9.

Praca właściwa sił tarcia i prędkość ślizgania określane są jak dla łożysk poprzecznych.

b) łożysko z pierścieniem oporowym (rys. 3.50, *c*)  
ciśnienie średnie

$$p = \frac{4F_a}{\pi(d^2 - d_0^2)\varphi} \leq [p]$$

właściwa praca sił tarcia

$$pv \leq [pv]$$

średnia prędkość ślizgania

$$v_{sr} = \frac{\omega R_{red}}{1000} = \frac{\pi n R_{red}}{30 \cdot 1000} \leq v_{max},$$

gdzie  $d_0$  – średnica wewnętrzna, przyjmuje się  $(0,6 \div 0,8)d$ , mm;

$R_{red} = 0,33 \frac{d^3 - d_0^3}{d^2 - d_0^2}$  zredukowany promień stopy, mm;

c) łożysko oporowe grzebieniowe (rys. 3.50, *d*)  
ciśnienie średnie

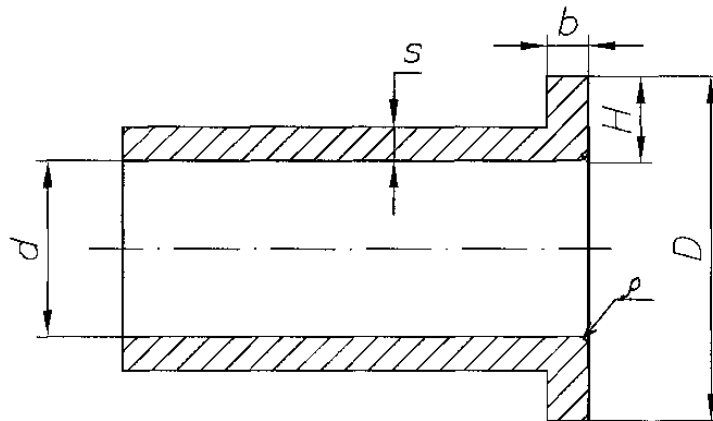
$$p = \frac{4F_a}{z\pi(d^2 - d_0^2)\varphi} \leq [p],$$

gdzie  $z$  – liczba grzebieni.

Praca właściwa sił tarcia  $p$  i średnia prędkość ślizgania  $v_{sr}$  określana jest jak dla łożysk pierścieniowych.

Wartości  $[p]$  i  $[pv]$  zmniejszą się o 20 ÷ 40 % w porównaniu do  $[p]$  i  $[pv]$  dla innych łożysk ze względu na nierównomierny rozkład obciążenia osiowego  $F_a$  między powierzchniami nośnymi grzebieni.

## Wymiary wkładki łożyska z kołnierzem (rys. 3.51)



Rys. 3.51. Schemat określenia wymiarów wkładki z kołnierzem

*Grubość ścianki wkładu*

Żeliwnej, z brązu

$$s = 0,03d + (2 \div 5) \text{ mm}$$

Wysokość kołnierza

$$H = 1,2s + (3 \div 5) \text{ mm}$$

Szerokość kołnierza

$$b = 1,2s$$

Zewnętrzna średnica kołnierza

$$D = d + 2H$$

Promień zaokrąglenia

$$\rho = (0,03 \div 0,05)d$$

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.34.** Sprawdzić łożysko osi wózka (rys. 3.52), jeśli wymiary szynki:  $d = 60$  mm i  $l = 70$  mm. Obciążenie promieniowe łożyska  $F_r = 16$  kN przy maksymalnej prędkości kątowej  $\omega = 30$  s<sup>-1</sup>. Materiał wkładu – CuSn6Zn6Pb3. Materiał osi – stal normalizowana C45.

*Dane:*

$$F_r = 16 \text{ kN}$$

$$d = 60 \text{ mm}$$

$$l = 70 \text{ mm}$$

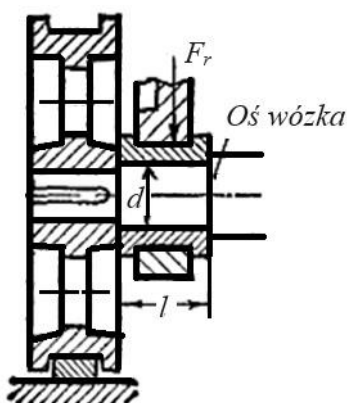
$$\omega = 30 \text{ s}^{-1}$$

wkład

CuSn6Zn6Pb3

oś stal

normalizowana C45



*Szukane:*

$$v - ?$$

$$p - ?$$

$$pv - ?$$

Rys. 3.52. Wózek po przykładu 3.34

### Rozwiązanie

1. Dla zadanego materiału wkładu z tabeli D.44 wypisujemy

$$[p] = 4 \div 6 \text{ MPa}; [pv] = 4 \div 6 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}; v_{\max} = 8 \text{ m/s}.$$

2. Określamy prędkość kątową (prędkość ślizgania) i porównujemy z maksymalną:

$$v = \frac{\omega d}{2 \cdot 1000} = \frac{30 \cdot 60}{2 \cdot 1000} = 0,9 \text{ m/s} < v_{\max} = 8 \text{ m/s}$$

Warunek jest spełniony.

3. Sprawdzamy średnie ciśnienie w łożysku:

$$p = \frac{F_r}{dl} = \frac{16 \cdot 10^3}{60 \cdot 70} = 3,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 3,8 \text{ MPa} < [p] = 4 \div 6 \text{ MPa}$$

Warunek jest spełniony.

4. Sprawdzamy łożysko na nagrzewanie i brak zacięcia:

$$pv = 3,8 \cdot 0,9 = 3,42 \text{ MPa} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} < [pv] = 4 \div 6 \text{ MPa} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Warunek jest spełniony.

*Wniosek:* łożysko jest odpowiednie dla określonych warunków pracy.

**Przykład 3.35.** Dobrać materiał dla łożyska ślizgowego, jeśli: działające obciążenie promieniowe  $Q_r = 7 \text{ T}$ ; średnica czopu  $d = 80 \text{ mm}$ ; prędkość obrotowa wału  $n = 100 \text{ min}^{-1}$ ; materiał wału – hartowana stal C45.

*Dane:*

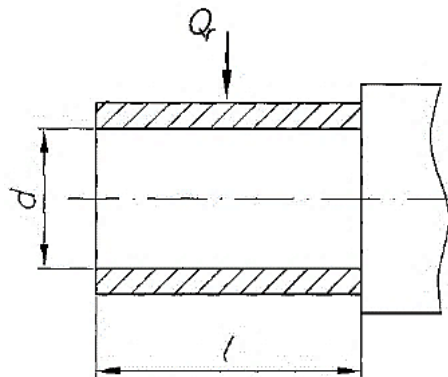
$$Q_r = 7 \text{ T}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

$$n = 100 \text{ min}^{-1}$$

wał

hartowana stal C45



*Szukane:*

$$l - ?$$

$$v - ?$$

$$p - ?$$

$$pv - ?$$

materiał wkładki - ?

Rys. 3.53. Schemat łożyska ślizgowego do przykładu 3.35

### Rozwiązanie

1. Sporządzamy schemat obliczeniowy (rys. 3.53).
2. Przekształcamy jednostki:

$$Q_r = F_r = 7 \text{ T} = 70 \cdot 10^3 \text{ N}$$

3. Określamy długość wkładki:

$$l = (0,5 \div 1,3)d = (0,5 \div 1,3) \cdot 80 = 40 \div 104 \text{ mm}$$

Z powodów konstrukcyjnych przyjmujemy  $l = 70 \text{ mm}$ .

4. Określamy prędkość obrotową czopa (prędkość ślizgania):

$$v = \frac{\pi n d}{60 \cdot 1000} = \frac{3,14 \cdot 100 \cdot 80}{60 \cdot 1000} = 0,42 \text{ m/s}$$

5. Określamy średnie ciśnienie w łożysku:

$$p = \frac{F_r}{dl} = \frac{70 \cdot 10^3}{80 \cdot 70} = 12,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 12,5 \text{ MPa}$$

6. Określamy właściwą pracę sił tarcia:

$$pv = 12,5 \cdot 0,42 = 5,25 \text{ MPa} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. Z tabeli D.44 z uwzględnieniem obliczonych wartości dobieramy materiał łożyska ślizgowego. Przyjmujemy CuAl9Fe4, dla którego:

$$v_{\max} = 8 \text{ m/s} > v = 0,42 \text{ m/s} - \text{warunek jest spełniony};$$

$$[p] = 15 \text{ MPa} > 12,5 \text{ MPa} - \text{warunek jest spełniony};$$

$$[pv] = 12 \text{ MPa} \cdot \text{m/s} > pv = 5,25 \text{ MPa} \cdot \text{m/s} - \text{warunek jest spełniony}.$$

*Odpowiedź:*  $v = 0,42 \text{ m/s}$ ;  $p = 12,5 \text{ MPa}$ ;  $pv = 5,25 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$ ; materiał wkładki – CuAl9Fe4.

**Przykład 3.36.** Obliczyć łożysko ślizgania wału przekładni ślimakowej (rys. 3.54), jeśli: obciążenie promieniowe łożyska  $F_r = 11$  kN, osiowe  $F_a = 4,4$  kN, średnica czopu wału  $d = 80$  mm, prędkość obrotowa  $n = 115$  ob./min.

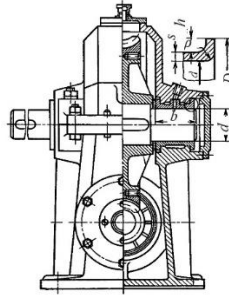
*Dane:*

$$F_r = 11 \text{ kN}$$

$$F_a = 4,4 \text{ kN}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

$$n = 115 \text{ ob./min}$$



*Szukane:*

$$l - ?$$

$$v - ?$$

$$p - ?$$

$$pv - ?$$

materiał wkładu - ?

Rys. 3.54. Przekładnia ślimakowa

### Rozwiązanie

1. Określamy długość wkładu:

$$l = (0,5 \div 1,3)d = (0,5 \div 1,3) \cdot 80 = 40 \div 104 \text{ mm}$$

Z powodów konstrukcyjnych, uwzględniając fazowanie, z tabeli D.21 przyjmujemy roboczą długość wkładu  $l = 60$  mm.

2. Określamy prędkość obrotową czopa (prędkość ślizgania):

$$v = \frac{\pi n d}{60 \cdot 1000} = \frac{3,14 \cdot 115 \cdot 80}{60 \cdot 1000} = 0,48 \text{ m/s}$$

3. Określamy średnie ciśnienie w łożysku z powodu obciążenia promieniowego  $F_r$ :

$$p = \frac{F_r}{dl} = \frac{11 \cdot 10^3}{80 \cdot 60} = 2,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2,3 \text{ MPa}$$

4. Określamy właściwą pracę sił tarcia z powodu obciążenia promieniowego  $F_r$ :

$$pv = 2,3 \cdot 0,48 = 1,1 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$$

5. Z tabeli D.44 wybieramy materiał wkładu – żeliwo odporne na ścieranie EN-GJL-HB200, dla którego

przy  $v = 2$  m/s mamy  $[p] = 0,05$  MPa;  $[pv] = 0,1$  MPa · m/s; przy  $v = 0,2$  m/s mamy  $[p] = 9$  MPa;  $[pv] = 1,8$  MPa · m/s.

6. Dla obliczonej prędkości ślizgania  $v = 0,48$  m/s za pomocą interpolacji określamy wartości  $[pv] = 1,54$  MPa · m/s  $> 1,1$  MPa · m/s, wtedy

$$[p] = \frac{[pv]}{v} = \frac{1,54}{0,48} = 3,2 \text{ MPa} > 2,3 \text{ MPa}$$

Warunek jest spełniony.

7. Określamy wymiary żeliwnego wkładu:

Przyjmujemy długość wkładu

$$s = 0,03d + (1 \div 3) \text{ mm} = 0,03 \cdot 80 + 2,6 \text{ mm} = 5 \text{ mm}$$

Wysokość kołnierza

$$H = 1,2s + (3 \div 5)\text{mm} = 1,2 \cdot 5 + 4 = 10 \text{ mm}$$

Grubość kołnierza

$$b = 1,2s = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ mm}$$

Średnica

$$\rho = 0,03d = 0,03 \cdot 5 = 0,15 \text{ mm}$$

Przyjmujemy  $\rho = 2 \text{ mm}$ .

Zewnętrzna średnica kołnierza  $D = d + 2H = 80 + 2 \cdot 10 = 100 \text{ mm}$ .

Wewnętrzną średnicę powierzchni pierścieniowego wkładu określamy z uwzględnieniem promienia  $\rho = 2 \text{ mm}$

$$d_0 = d + 2\rho = 80 + 2 \cdot 2 = 84 \text{ mm}$$

8. Określamy średnicę zredukowaną bocznej powierzchni wkładu:

$$R_{red} = 0,33 \frac{D^3 - d_0^3}{D^2 - d_0^2} = 0,33 \frac{100^3 - 84^3}{100^2 - 84^2} = 45 \text{ mm}$$

9. Określamy średnią prędkość ślizgania powierzchni bocznej wkładu:

$$v_{sr} = \frac{\pi n R_{red}}{30 \cdot 1000} = 0,54 \text{ m/s}$$

10. Określamy średnie ciśnienie na bocznej powierzchni wkładu przy oddziaływaniu osiowej siły  $F_a$ , przyjmujemy współczynnik uwzględniający zmniejszenie powierzchni oporu rowkami smarującymi  $\varphi = 0,9$ :

$$p_T = \frac{4F_a}{\pi(D^2 - d_0^2)\varphi} = \frac{4 \cdot 4,4 \cdot 10^3}{3,14(100^2 - 80^2) \cdot 0,9} = 2,1 \text{ N/mm}^2 = 2,1 \text{ MPa}$$

11. Określamy pracę właściwą sił tarcia na powierzchni bocznej wkładu przy działaniu siły osiowej  $F_a$ :

$$p v_{sr} = 2,1 \cdot 0,54 = 1,1 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$$

12. Określamy dopuszczalne wartości  $[p]$  i  $[p v]$  za pomocą interpolacji liniowej przy  $v_{sr} = 0,54$  wartości  $[p v] = 1,48 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$ , więc

$$[p] = \frac{[p v]}{v} = \frac{1,48}{0,54} = 2,74 \text{ MPa}$$

Porównując dopuszczalne wartości z obliczeniowymi dla powierzchni bocznej wkładu

$$p = 2,1 \text{ MPa} < [p] = 2,74 \text{ MPa}$$

oraz  $p v_{sr} = 1,1 \text{ MPa} \cdot \text{m/s} < [p v] = 1,48 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$  – warunki są spełnione.

*Odpowiedź:*  $l = 60 \text{ mm}$ ;  $v = 0,48 \text{ m/s}$ ;  $v_{sr} = 0,54 \text{ m/s}$ ;  $p = 2,3 \text{ MPa}$ ;  $p_T = 2,1 \text{ MPa}$ ;  $p v_{sr} = 1,1 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$ ; materiał wkładu – żeliwo szare odporne na ścieranie EN-GJL-HB200.

**Zadania do samodzielnego rozwiązania**  
(obliczeniowe)

**Zadania 3.18.** Sprawdzić łożysko osi wózka (rys. 3.52). Materiał osi – stal normalizowana C45, dane do obliczeń podano w tabeli 3.22.

Tabela 3.22. Dane wejściowe do zadania 3.18

Nr war.	Wymiar szyjki, mm		Obciążenie $F_r$ , kN	Prędkość kątowna $\omega$ , s <sup>-1</sup>	Materiał wkładu
	$d$	$l$			
1	40	20	7	30	CuSn6Zn6Pb3
2	45	30	6	40	
3	50	35	5	25	
4	55	45	8	20	
5	60	55	9	35	
6	65	35	10	52	
7	70	40	11	22	
8	75	43	12	33	CuSn10F1
9	80	52	20	38	
10	85	62	16	51	
11	90	72	17	65	
12	95	60	19	30	
13	100	50	3	15	EN-GJS-400-15
14	55	23	4	18	
15	60	28	5	16	
16	65	33	6	14	
17	50	41	3,5	13	
18	70	35	2,5	44	
19	75	38	14	32	CuAl9Fe4
20	80	42	13	44	
21	85	44	15	48	
22	40	46	16	54	
23	45	60	17	62	
24	50	80	17,5	70	
25	55	64	10,5	35	Babbit B16
26	60	56	11,5	38	
27	65	46	8,5	41	
28	70	44	9,5	43	
29	75	34	7,3	60	
30	105	72	6,2	24	



**Zadanie 3.19.** Obliczyć łożysko ślizgowe wału przekładni ślimakowej (rys. 3.54). Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli 3.23.

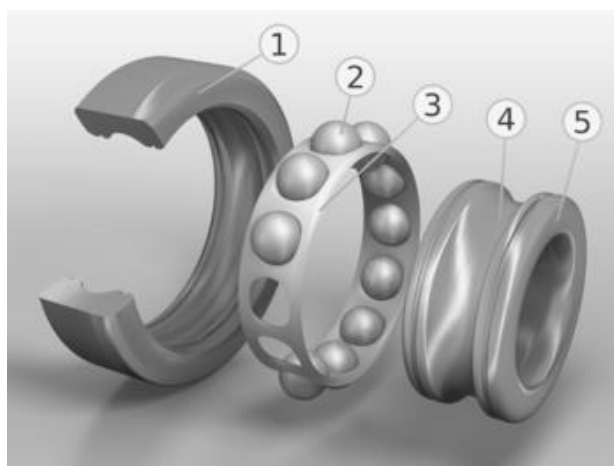
Tabela 3.23. Dane wejściowe do zadania 3.19

Nr war.	Obciążenia, kN		Średnica wału, $d$	Prędkość obrotowa, $n$ , $\text{min}^{-1}$
	$F_r$	$F_a$		
1	7	3,6	40	100
2	6	4	45	115
3	5	2,5	50	125
4	8	4,4	55	120
5	9	5,6	60	135
6	10	5,9	65	152
7	11	6	70	122
8	12	4,6	75	133
9	14	7	80	138
10	16	7,3	85	151
11	17	8	90	165
12	13	5,5	95	130
13	3	2	35	115
14	4	2,4	55	118
15	5	2,8	60	116
16	6	3,3	65	114
17	3,5	2,3	50	113
18	2,5	1,7	70	144
19	14	7,4	75	132
20	13	6,9	80	144
21	15	7,5	85	148
22	16	8	40	154
23	17	8,3	45	162
24	17,5	6,2	50	170
25	10,5	5,8	55	135
26	11,5	7,3	60	138
27	8,5	6,4	65	141
28	9,5	5,9	70	143
29	7,3	4,7	75	160
30	6,2	3,8	35	124

### 3.10. Dobór łożysk tocznych

#### Wiadomości ogólne

**Łożyska toczne** są podporami dla obracających się wałów i osi, które zapewniają określoną ich pozycję w przestrzeni, zdolność do obracania się albo kołysania i przyjmowania wszystkich działających na nie obciążeń.



Rys. 3.55. Łożysko toczne

Łożysko toczne (rys. 3.55) to gotowy zespół składający się z zewnętrznego (a) i wewnętrznego (5) pierścienia, między którymi umieszczone są elementy toczne (2) – kulki, wałeczki. Dla zabezpieczenia elementów tocznych przed przemieszczeniem się względem siebie i kolizją oddziela się je od siebie separatorem (3). Podczas pracy elementy toczne toczą się po bieżniach (4) pierścieni, z których jeden z nich, w większości przypadków, jest nieruchomy. Rozkład obciążenia pomiędzy nośnymi elementami tocznymi jest nierównomierny i zależy od wielkości luzu promieniowego w łożysku oraz dokładności kształtu geometrycznego jego elementów.

W niektórych przypadkach dla zmniejszenia wymiarów geometrycznych łożyska pierścienie są pomijane, a elementy toczne poruszają się bezpośrednio na czopie i oprawie.

Zespoły łożyskowe oprócz samych łożysk tocznych zawierają obudowę z pokrywami, urządzenia do mocowania pierścieni łożyskowych oraz urządzenia ochronne i smarujące.

#### Podstawowe parametry łożysk tocznych

Podstawowymi siłowymi parametrami łożysk tocznych jest ich nośność statyczna  $C_0$  [N] i dynamiczna  $C$  [N].

Podstawowymi geometrycznymi parametrami są: zewnętrzna średnica pierścienia,  $D$  [mm] wewnętrzna średnica pierścienia,  $d$  [mm], szerokość łożyska  $B$  [mm] albo wysokość  $H$  [mm].

Podstawowym parametrem kinematycznym jest graniczna prędkość obrotowa  $n_g$ .

Wartości tych parametrów są podane w tabelach dla łożysk tocznych (tabele D.50–D.55).

### Podstawowe wzory obliczeniowe

Prawidłowy dobór łożyska wraz z poprawną instalacją i obsługą warunkują jego niezawodne działanie oraz działanie mechanizmu i urządzenia w całości.

*Przy doborze łożyska tocznego należy wziąć pod uwagę następujące czynniki:* wartość i kierunek obciążenia; charakter dodatkowego obciążenia; średnicę wału; prędkość obrotową jednego albo obu pierścieni; warunki pracy (temperatura) i inne wymagania wynikające z konstrukcji urządzenia.

Łożyska są dobierane pod kątem ich nośności dynamicznej w celu zapobiegania pękaniu zmęczeniowego i ich nośności statycznej dla zapobiegania odkształceniom plastycznym.

### Dobór łożysk pod kątem nośności dynamicznej

Metoda obliczenia pod kątem nośności dynamicznej  $C$  (dla podanej żywotności albo trwałości) jest wykonywana przy zakładanej prędkości obrotowej  $n > 1 \text{ min}^{-1}$ .

Przy  $n = 1 \div 10 \text{ min}^{-1}$  do obliczeń przyjmuje się  $n = 10 \text{ min}^{-1}$ .

#### Warunek doboru łożyska:

$$C_{Sa} \leq C; n \leq n_g,$$

gdzie  $C_{Sa}$  – skorygowana obliczeniowa nośność dynamiczna łożyska, N;

$C$  – założona nośność dynamiczna łożyska, N;

$n$  – prędkość obrotowa wału albo obudowy,  $\text{min}^{-1}$ ;

$n_g$  – graniczna prędkość obrotowa łożyska,  $\text{min}^{-1}$  (jest dobierana z katalogu).

Dynamiczna nośność i trwałość (żywołność) są powiązane zależnością empiryczną.

Skorygowana obliczona trwałość (żywołność) łożyska w milionach obrotów albo obliczeniowa skorygowana dynamiczna nośność są określane ze wzorów:

$$L_{sa} = a_1 a_{23} \left(\frac{C}{P}\right)^p \quad \text{albo} \quad C_{Sa} = P \sqrt[p]{\frac{L_{Sa}}{a_1 a_{23}}}$$

wtedy **warunek doboru łożyska**

$$L_{Sa} \geq L'_{Sa} \quad \text{albo} \quad C_{Sa} \leq C; n \leq n_{sk}$$

Skorygowana obliczona trwałość (żywołność) łożyska [h] albo skorygowana obliczeniowa dynamiczna nośność określane są ze wzorów:

$$L_{sah} = a_1 a_{23} \frac{10^6}{60 \cdot n} \left(\frac{C}{P}\right)^p \quad \text{albo} \quad C_{Sa} = P \cdot \sqrt[p]{\frac{L_{sah} \cdot 60 \cdot n}{10^6 (a_1 a_{23})}}$$

wtedy **warunek doboru łożyska**

$$L_{sah} \geq L'_{sah} \quad \text{albo} \quad C_{Sa} \leq C; n \leq n_{sk}$$

gdzie  $C$  – zadana dynamiczna nośność łożyska, N;

$P$  – zredukowane dynamiczne obciążenie, N;

$p$  – wskaźnik stopnia; dla łożysk kulkowych  $p = 3$ ; dla rolkowych  $p = 10/3$ ;

$n$  – prędkość obrotowa zewnętrznego albo wewnętrznego pierścienia,  $\text{min}^{-1}$ ;

$L'_{sa}$  – podstawowa trwałość, mln ob.;

$L'_{sah}$  – podstawowa trwałość (żywołność) łożyska, h; (jest zadawana albo dobierana z odpowiednich tabel);

$n_g$  – graniczna prędkość obrotowa łożyska,  $\text{min}^{-1}$ ;

$a_1$  – współczynnik korekcji niezawodności;

$a_{23}$  – współczynnik korekcji materiału i smaru.

Zamiast indeksu  $s$  w oznaczeniu trwałości eksploatacyjnej i nośności dynamicznej wpisywane jest  $s = 100 - S$ , gdzie  $S$  – niezawodność łożyska (podaje się w odpowiednich tabelach). Większość łożysk jest wykonywana z niezawodnością 90%, wtedy  $s = 10$  albo  $L_{10ah}$ .

Dla ogólnie przyjętej niezawodności 90 % przy zwykłej jakości stali i warunkach smarowania, które warunkują rozdzielanie roboczych po-

wierzchni kontaktu, współczynniki korekcji wynoszą  $a_1 = 1$ ;  $a_{23} = 1$ . Przy innych wymaganiach niezawodności, jakości stali i trybach smarowania, wartości współczynników korekcji  $a_1, a_{23}$  są dobierane z katalogów łożysk.

### Określenie zredukowanej nośności dynamicznej

Dla łożysk poprzecznych i skośnych zredukowane dynamiczne obciążenie

$$P = (XVF_r + YF_a) \cdot K_b \cdot K_T$$

Dla łożysk poprzecznych wzdłużnych zredukowane dynamiczne obciążenie

$$P = (XF_r + YF_a) \cdot K_b \cdot K_T$$

Dla wzdłużnych łożysk zredukowane dynamiczne obciążenie

$$P = F_a \cdot K_b \cdot K_T$$

gdzie  $F_r$  – największe obciążenie promieniowe, N;

$F_a$  – największe osiowe obciążenie, N;

$X, Y$  – współczynniki promieniowego i osiowego obciążenia (są wskazywane w katalogach zależnie od stosunku  $F_a/VF_r$ );

$V$  – współczynnik obrotu pierścienia (przy obrocie pierścienia wewnętrznego  $V = 1$ , przy obrocie pierścienia zewnętrznego  $V = 1,2$ );

$K_b$  – współczynnik bezpieczeństwa, uwzględniający charakter obciążenia (wybierany z tabel);

$K_T$  – współczynnik temperaturowy wybierany z tabel. Dla  $t \leq 100 \text{ }^\circ\text{C}$   $K_T = 1$ .

Powyższe wzory są stosowane przy obciążeniu ciągłym i prędkości obrotowej.

Łożyska do pracy w trybie zmiennym dobiera się na podstawie zredukowanego obciążenia i warunkowej prędkości obrotowej. Jeśli obciążenie zmienia się liniowo od  $P_{\max}$  do  $P_{\min}$  (na przykład podpory z jednostronnym nawijaniem), to obciążenie zredukowane:

$$P = \frac{P_{\min} + 2P_{\max}}{3}$$

Jeśli zmiana obciążenia i prędkości obrotowej następuje zgodnie z bardziej skomplikowanym prawem, to obciążenie zredukowane:

$$P = \sqrt[3]{\frac{P_1^3 \cdot L_1 + P_2^3 \cdot L_2 + \dots + P_n^3 \cdot L_n}{L}}$$

gdzie  $P_1, P_2, \dots, P_n$  – stałe obciążenia, działające w ciągu  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – milionów obrotów;

$L$  – całkowita liczba obrotów w milionach, w ciągu których działają wskazane obciążenia.

### Charakterystyczne cechy doboru łożysk skośnych

W łożyskach skośnych przy oddziaływaniu na nie obciążeń promieniowych występują osiowe składowe  $S$ , które oblicza się ze wzorów:

$$S = 0,83eF_r \text{ – dla stożkowych łożysk rolkowych}$$

$$S = eF_r \text{ – dla promieniowych łożysk kulkowych}$$

gdzie  $e$  – współczynnik wpływu obciążenia osiowego (tabele D.48, D.51, D.52, D.55).

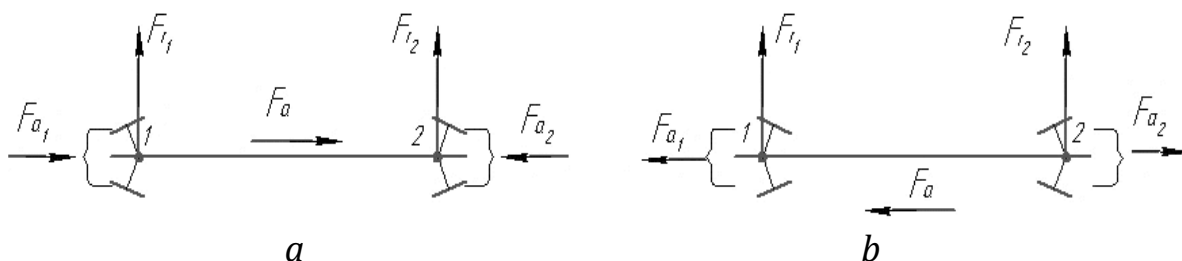
Osiowe składowe mają na celu zredukować zewnętrzne siły osiowe i rozsunąć pierścienie łożyska w kierunku osiowym. Zapobiegają temu ramiona oporowe wału i obudowy z reakcjami  $F_{a1}$  i  $F_{a2}$ . Dla normalnej pracy łożyska konieczne jest, aby siła osiowa obciążająca łożysko była nie mniejsza od składowej osiowej siły promieniowej:

$$F_{a1} \geq S_1 \text{ i } F_{a2} \geq S_2$$

Oprócz tego powinien być spełniony warunek równowagi wału – suma wszystkich sił osiowych powinna wynosić zero. Dla schematu z rys. 3.56,  $a$ :

$$F_{a1} + F_a - F_{a2} = 0$$

Dodatnimi kierunkami sił osiowych są kierunki, pokrywające się z kierunkiem siły  $F_a$ . Liczbą 2 oznaczono łożysko, które przyjmuje obciążenie osiowe  $F_a$ .



Rys. 3.56. Schematy obciążenia łożysk skośnych:  
 $a$  – schemat „rozpychający”;  $b$  – schemat „rozciągający”

W tabeli 3.24 przedstawiono wzory dla obliczenia sił osiowych

Tabela 3.24. Wzory dla obliczenia obciążeń osiowych łożysk skośnych

Warunki obciążenia	Obliczeniowe obciążenia osiowe	
	w podporze I	w podporze II
$S_1 \geq S_2; F_a \geq 0$	$F_{a_1} = S_1$	$F_{a_2} = F_a + S_1$
$S_1 < S_2; F_a \geq S_2 - S_1$	$F_{a_1} = S_2 - F_a$	$F_{a_2} = S_2$

Redukowane dynamiczne obciążenia  $P$  określone są dla każdej podpory, tylko zamiast osiowego obciążenia  $F_a$  wykorzystuje się odpowiednie obciążenie osiowe  $F_{a_1}$  albo  $F_{a_2}$ . Trwałość obliczeniowa określana jest dla bardziej obciążonej podpory.

Przy określeniu promieniowych reakcji łożysk skośnych warto pamiętać, że punkt dodawania tej reakcji znajduje się w miejscu przecięcia normalnej do środka powierzchni kontaktu ciała tocznego z zewnętrznym pierścieniem i osi wału, czyli na odległości  $a$  od powierzchni bocznej pierścienia łożyska (rys. 3.57).

### 3.11. Dobór złączek

#### Wiadomości ogólne

W nowoczesnym przemyśle maszynowym większość urządzeń składa się z zespołów i mechanizmów. Aby zapewnić sprzężenie kinematyczne i siłowe, wały komponentów są połączone za pomocą złączek.

**Złączki** to jednostki montażowe, które w zależności od przeznaczenia i konstrukcji mogą pełnić szereg podstawowych i dodatkowych funkcji.

*Głównym przeznaczeniem złączek* jest łączenie końców wałów zespolonych lub końców wałów poszczególnych maszyn i mechanizmów; przeniesienie momentu obrotowego bez zmiany jego wartości wzdłuż osi.

*Dodatkowe funkcje złączek to:* kompensacja niewielkich niewspółosiowości wałów, które mogą wystąpić w wyniku niedokładnego wykonania, instalacji, odkształceń cieplnych, obciążeń i cech konstrukcyjnych maszyny lub mechanizmu; redukcja obciążeń dynamicznych i wibracyjnych; ochrona maszyn i mechanizmów przed przeciążeniami; włączanie i wyłączanie maszyn i mechanizmów.

Współczesne maszyny wykorzystują dużą liczbę złączek, z których wiele jest znormalizowanych.

#### Dobór złączek

Standardowe i znormalizowane złączki nie są obliczane. Z reguły są one dobierane, podobnie jak łożyska toczne, zgodnie z tabelami w książkach referencyjnych lub katalogach.

Wybór złączy standardowych i znormalizowanych polega na wybraniu wymaganego rozmiaru złącza z katalogu zgodnie z momentem obrotowym.

Główną cechą złączek jest przenoszony moment obrotowy  $T$ . Konkretny rozmiar złączki dobiera się w zależności od przeznaczenia, cech konstrukcyjnych napędu i warunków pracy zgodnie z poniższym warunkiem

$$T_{ob} = K_r \cdot T_{zn} \leq T_{tab},$$

gdzie  $T_{ob}$  – moment obliczeniowy, przekazywany przez złączkę, Nm;

$K_r$  – współczynnik trybu pracy, przyjmuje się  $K_r = 1,0 \div 1,5$  – dla maszyn o niewielkim ciężarze i nieistotnym obciążeniu (przenośniki, obrabiarki),  $K_r = 1,5 \div 2,0$  – dla maszyn o średnim ciężarze i średnim obciążeniu (kompresory, pompy, obrabiarki drewna),  $K_r = 2,0 \div 3,0$  – dla ma-



szyn o dużym ciężarze i istotnym obciążeniu (młoty, kruszarki, walcarki, dźwigi);  $T_{zn}$  – znamionowy moment obrotowy przy stałym trybie pracy na odpowiednim wale, Nm;

$T_{tab}$  – moment obrotowy z tabliczki znamionowej, dla tego typu złączki.

Przy doborze złączki należy również wziąć pod uwagę średnice, długość i kształt końców wałów, które mają być połączone, tryb pracy, zastosowanie maszyny lub mechanizmu, charakter ruchu (rewersyjny, nierewersyjny), prędkość, wymagania dotyczące masy, wymiary, cechy konstrukcyjne napędu i charakterystykę złączki.

Norma przewiduje produkcję dwóch rodzajów złączek, z cylindrycznymi i stożkowymi otworami, w dwóch wersjach: dla długich i krótkich końców wału, a także umożliwia łączenie złączek o różnych średnicach otworów  $d$  i kształtach.

Przed wyborem złączki należy zapoznać się z jej konstrukcją i charakterystyką.

Wszystkie złączki wykorzystywane w maszynach podlegają obliczeniom wytrzymałości, sztywności i odporności na zużycie.

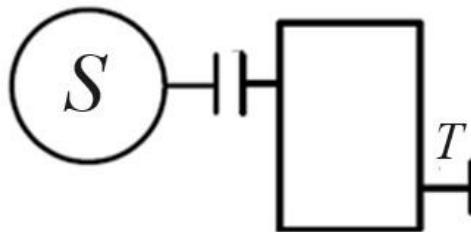
Dobór złączek jest zwykle skomplikowanym zadaniem, ponieważ często konieczne jest określenie średnicy wału za pomocą obliczeń wału, a także określenie parametrów kinematycznych i siłowych.

## Przykłady obliczeń

**Przykład 3.41.** Zapisać warunek doboru i dobrać złączkę, która łączy cichobieżny wał maszyny (rys. 3.60), jeśli: napęd i korpus roboczy maszyny są zamontowane na wspólnej sztywnej ramie; moc silnika  $N_{sil} = 15 \text{ kW}$ , prędkość kątowna wału silnika  $\omega_{sil} = 102 \text{ s}^{-1}$ ; przełożenie reduktora  $u_{red.} = 10$ ; dopuszczalne naprężenia skręcające materiał wału  $k_s = 70 \text{ MPa}$ ; współczynnik trybu pracy  $K_r = 1,5$ .

*Dane:*

$$\begin{aligned} N_{sil} &= 15 \text{ kW} \\ \omega_{sil} &= 102 \text{ s}^{-1} \\ u_{red} &= 10 \\ k_s &= 70 \text{ MPa} \\ K_r &= 1,5 \end{aligned}$$



*Szukane:*

Złączka – ?

Rys. 3.60. Schemat do przykładu

### Rozwiązanie

1. Zapisujemy warunek doboru złączki z uwzględnieniem wału

$$T_{ob,w.c.} = K_r \cdot T_{zn,w.c.} \leq T_{tab}$$

2. Określamy nieznanne.

- 2.1. Określamy moment na wale szybkobieżnym

$$T_{w.sz.} = \frac{N_{sil}}{\omega_{sil}} = \frac{15000}{102} = 147 \text{ Nm}$$

- 2.2. Określamy moment znamionowy na wale cichobieżnym

$$T_{zn,w.c.} = T_{w.sz.} \cdot u_{red} = 147 \cdot 10 = 1470 \text{ Nm}$$

- 2.3. Wyznaczamy obliczeniowy moment na wale koła pasowego

$$T_{ob,w.c.} = K_r \cdot T_{zn,w.c.} = 1,5 \cdot 1470 = 2205 \text{ Nm}$$

Oprócz obliczonego momentu obrotowego, przy wyborze złączki należy znać średnicę wału, dla którego złączka jest wybierana.

- 2.4. Z warunku wytrzymałości na skręcanie określamy średnicę cichobieżnego wału.

Warunek wytrzymałości na skręcanie

$$\tau_s = \frac{T \cdot 10^3}{0,2d^3} \leq k_s, \text{ skąd}$$

$$d_{w.c.} \geq \sqrt[3]{\frac{T_{ob,w.c.} \cdot 10^3}{0,2k_s}} = \sqrt[3]{\frac{2205 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 70}} = 54 \text{ mm}$$

### 3. Dobieramy złączkę.

Biorąc pod uwagę, że napęd i korpus roboczy maszyny znajdują się na wspólnej ramie, można najpierw spróbować wybrać złączkę tulejowo-wtykową zgodnie z tabelą D.56, biorąc pod uwagę warunek wyboru, obliczony moment obrotowy na wale wolnoobrotowym i jego średnicę. Z tabeli widać, że dla najbliższej większej wartości momentu  $T_{tab} = 4000 \text{ Nm}$  średnica wału powinna być w zakresie  $d = 80 \div 95 \text{ mm}$ , co jest istotnie większe niż średnica obliczeniowa cichobieźnego wału  $d_{w.c.} = 54 \text{ mm}$ .

Spróbujemy z tabeli D.57 dobrać złączkę. Z danych w tabeli widać, że najbardziej pasuje złączka 3 mm, parametry której

$$T_{tab} = 3150 \text{ Nm} > T_{ob.w.c.} = 2205 \text{ Nm}$$

Średnica wału może znajdować się w zakresie  $d = 40 \div 60 \text{ mm}$ , w którym mieści się obliczona średnica wału cichobieźnego.

*Odpowiedź:* Złączka 3 mm z  $T_{tab} = 3150 \text{ Nm}$ ;  $d = 40 \div 60 \text{ mm}$ .

**Przykład 3.42.** Ocenic możliwość stosowania złączki tulejowo-wtykowej, która łączy wał wyjściowy reduktora napędu z roboczym wałem maszyny (rys. 3.61), jeśli: moc silnika  $N_{sil} = 5,5 \text{ kW}$ ;  $n_{sil} = 960 \text{ min}^{-1}$ ; dopuszczalne naprężenia na skręcanie materiału wału  $k_s = 50 \text{ MPa}$ ; przełożenie przekładni pasowej  $u_{p,p} = 2$ ; przełożenie reduktora  $u_{red} = 3$ ; współczynnik dynamiczności  $K_r = 1,8$ ; moment z tabeli  $T_{tab} = 500 \text{ Nm}$ ; średnica z tabeli  $d_{tab} = 40 \text{ mm}$ .

*Dane:*

$$N_{sil} = 5,5 \text{ kW}$$

$$n_{sil} = 960 \text{ min}^{-1}$$

$$k_s = 50 \text{ MPa}$$

$$u_{p,p} = 2$$

$$u_{red} = 3$$

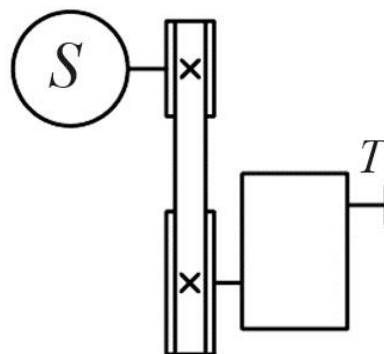
$$K_r = 1,8$$

$$T_{tab} = 500 \text{ Nm}$$

$$d_{tab} = 40 \text{ mm}$$

*Szukane:*

Złączka - ?



Rys. 3.61. Schemat do przykładu

### *Rozwiązanie*

1. Zapisujemy warunek doboru złączki z uwzględnieniem wału:

$$T_{ob,w.c.} = K_r \cdot T_{zn,w.c.} \leq T_{tab}$$

2. Określamy nieznanne.

2.1. Określamy moment na wale silnika:

$$T_{sil} = 9.55 \frac{N_{sil}}{n_{sil}} = 9.55 \frac{5500}{960} \approx 55 \text{ Nm}$$

2.2. Określamy moment znamionowy na cichobieźnym wale reduktora:

$$T_{zn,w.c} = T_{sil} u_{p,p} u_{red} = 55 \cdot 2 \cdot 3 = 330 \text{ Nm}$$

2.3. Określamy moment obliczeniowy na wale cichobieźnym:

$$T_{ob,w.c} = K_r \cdot T_{zn,w.c} = 1,8 \cdot 330 = 594 \text{ Nm}$$

2.4. Z warunku wytrzymałości na skręcanie określamy obliczeniową średnicę wału cichobieźnego.

Warunek wytrzymałości wału na skręcanie

$$\tau_s = \frac{T \cdot 10^3}{0,2d^3} \leq k_s, \text{ skąd}$$
$$d_{w.c.} \geq \sqrt[3]{\frac{T_{ob,w.c} \cdot 10^3}{0,2k_s}} = \sqrt[3]{\frac{594 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 50}} = 39 \text{ mm}$$

Przyjmujemy  $d_{w.c} = 40 \text{ mm}$ .

3. Oceniamy możliwość zastosowania złączki.

Porównując obliczeniowe wartości i wartości z tabeli, otrzymujemy:

$$T_{ob,w.c.} = 594 \text{ Nm} > T_{tab} = 500 \text{ Nm} - \text{warunek nie jest spełniony}$$

$$d_{w.c} = 40 \text{ mm} = d_{tab} = 40 \text{ mm} - \text{warunek jest spełniony}$$

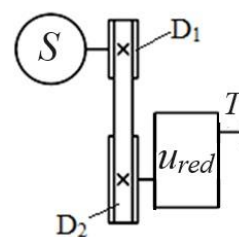
*Wniosek:* Złączka nie pasuje, ponieważ moment obliczeniowy jest większy od momentu w tabeli.

## Zadania do samodzielnego obliczenia (obliczeniowe)

**Zadanie 3.21.** Dobrać złączkę, która łączy cichobieżny wał sprzęgła z roboczym wałem maszyny (rys. 3.62).

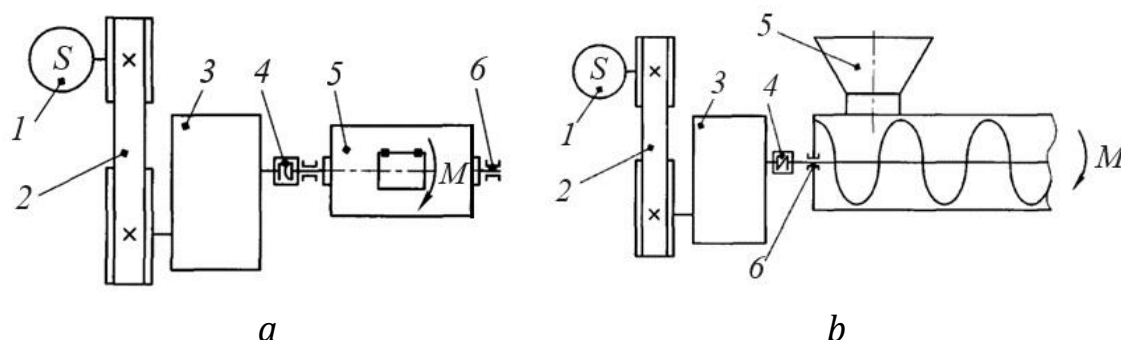
Tabela 3.26. Dane wejściowe do zadania 3.21

Nr war.	$N_{sil}$ , kW	$n_{sil}$ , min <sup>-1</sup>	$D_1$ , mm	$D_2$ , mm	$u_{red}$	$k_s$ , MPa	$K_r$
1	10	750	100	300	3	35	2,0
2	11	850	120	360	4	40	1,5
3	15	950	140	420	5	45	1,2
4	17	1000	160	480	6	50	1,3
5	20	1100	180	360	8	60	1,4
6	5	1200	200	600	10	75	1,6
7	7	1500	250	500	3	80	1,8
8	10	750	100	300	3	35	2,2
9	11	850	120	360	4	40	2,0
10	15	950	140	420	5	45	1,5
11	10	1000	160	480	6	50	1,2
12	5	1100	180	360	8	60	1,3
13	8	1200	200	600	10	75	1,4
14	5	1500	250	500	3	80	1,6
15	11	750	100	300	3	35	1,8
16	10	850	120	360	4	40	2,2
17	15	950	140	420	5	45	2,0
18	18	1000	160	480	6	50	1,5
19	20	1100	180	360	8	60	1,2
20	10	1200	200	600	10	75	1,3
21	5	1500	250	500	3	80	1,4
22	15	750	100	300	3	35	1,6
23	10	750	100	300	3	35	2,0
24	11	850	120	360	4	40	1,5
25	5	950	140	420	5	45	1,2
26	10	1000	160	480	6	50	1,3
27	15	1100	180	360	8	60	1,4
28	5	1200	200	600	10	75	1,6
29	20	1500	250	500	3	80	1,8
30	15	750	100	300	5	35	2,2
<b>Dane uzupełniające</b>							
Warianty 1 ÷ 5, 11 ÷ 15, 21 ÷ 25 Napęd i osprzęt są zamontowane na tej samej ramie							
Warianty 6 ÷ 10, 16 ÷ 20, 26 ÷ 30 Napęd i osprzęt są zamontowane na różnych ramach							



Rys. 3.62. Schemat

**Zadanie 3.22.** Oceń możliwość stosowania złączki, łączącej wał wyjściowy przekładni z wałem roboczym maszyny (Tabela 3.27).



Rys. 3.63. Schematy przekładni maszyn:

*a* – bęben uderzający; *b* – mieszalnik ślimakowy; 1 – silnik; 2 – przekładnia pasowa; 3 – reduktor; 4, *a* – złączka kompensująca – zębata; 4, *b* – złączka sprężysta; 5, *a* – bęben uderzający; 5, *b* – mieszalnik; 6 – łożysko ślizgowe

Tabela 3.27. Dane wejściowe do zadania 3.22

Nr war.	$N_{sil}$ , kW	$n_{sil}$ , $\text{min}^{-1}$	$u_{p,p}$	$u_{red}$	$k_s$ , MPa	$K_r$	$T_{tab}$ , Nm	$d_{tab}$ , mm	Rys. 3.63
1	10	750	2	3	35	1,4	710	40	<i>a</i>
2	11	850	3	4	40	1,6	1400	40 ÷ 50	
3	15	950	2,5	5	45	1,8	3150	40 ÷ 60	
4	17	1000	4	6	50	2,2	5600	45 ÷ 75	
5	20	1100	3	8	60	2,0	8000	50 ÷ 90	
6	5	1200	2,5	10	75	1,5	500	40 ÷ 45	<i>b</i>
7	7	1500	3	3	80	1,2	710	45 ÷ 55	
8	10	750	3,5	3	35	1,3	1000	50 ÷ 70	
9	11	850	2	4	40	1,4	2000	63 ÷ 85	
10	15	950	3	5	45	1,4	4000	80 ÷ 95	
11	10	1000	2,5	6	50	1,6	710	40	<i>a</i>
12	5	1100	4	8	60	1,8	1400	40 ÷ 50	
13	8	1200	3	10	75	2,2	3150	40 ÷ 60	
14	5	1500	2,5	3	80	1,4	5600	45 ÷ 75	
15	11	750	3	3	35	1,6	8000	50 ÷ 90	
16	10	850	3,5	4	40	1,8	500	40 ÷ 45	<i>b</i>
17	15	950	2	5	45	2,2	710	45 ÷ 55	
18	18	1000	3	6	50	2,0	1000	50 ÷ 70	
19	20	1100	2,5	8	60	1,5	2000	63 ÷ 85	
20	10	1200	4	10	75	1,2	4000	80 ÷ 95	
21	5	1500	3	3	80	1,3	710	40	<i>a</i>
22	15	750	2,5	3	35	1,4	1400	40 ÷ 50	
23	10	750	3	3	35	1,4	3150	40 ÷ 60	
24	11	850	3,5	4	40	1,6	5600	45 ÷ 75	
25	5	950	2	5	45	1,8	8000	50 ÷ 90	
26	10	1000	3	6	50	2,2	500	40 ÷ 45	<i>b</i>

Nr war.	$N_{sil}$ , kW	$n_{sil}$ , min <sup>-1</sup>	$u_{p,p}$	$u_{red}$	$k_s$ , MPa	$K_r$	$T_{tab}$ , Nm	$d_{tab}$ , mm	Rys. 3.63
27	15	1100	2,5	8	60	2,0	710	45 ÷ 55	
28	5	1200	4	10	75	1,5	1000	50 ÷ 70	
29	20	1500	3	3	80	1,2	2000	63 ÷ 85	
30	15	750	2,5	5	35	1,3	4000	80 ÷ 95	

## ZAŁĄCZNIKI

Załącznik A (rekomendowany)

### **Kolejność wykonywania i wymagania do wykonywania zadania praktycznego**

1. Wariant zadania wybrać na podstawie numeru na liście grupy. W przypadku, gdy w tabeli brakuje numeru, wtedy numer zadania jest równy sumie liczb w numerze z listy (np. dla numeru „15”  $1 + 5 = 6$ ).
2. Zapisać warunki zadania w krótkiej formie „Dane” albo: „Dane wejściowe”. Po prawej stronie zapisać szukane wartości „Szukane”. Przy zapisywaniu warunków zadania, zadane i szukane wartości zamieniane są na litery (załącznik B).
3. Sporządzić rysunek albo schemat (jeżeli nie jest dołączony do zadania), z niezbędną i wystarczającą liczbą rodzajów, przekrojów, oznaczeń, wymiarów, działających sił i innych parametrów. Rysunki i schematy są wykonywane ręcznie. Przy oznaczeniu na rysunku albo schemacie wymiarów, sił i innych parametrów trzeba korzystać z oznaczeń literowych odpowiednich wartości. Wymiary są mierzone w milimetrach bez jednostek na końcu.
4. Pod rysunkiem albo schematem zapisuje się wyśrodkowane „Rozwiązanie”, pod którym zapisuje się wzory i wykonuje się obliczenia. Kolejność, w jakiej wykonywane jest rozwiązanie, może być różna, na przykład najpierw zapisywane są wszystkie wzory obliczeniowe, a następnie określone są niewiadome lub zapisywany jest wzór i natychmiast określana jest żądana wartość. Procedura wykonywania obliczeń jest następująca: najpierw wzór jest zapisywany w notacji alfabetycznej, następnie ich wartości liczbowe są zastępowane literami bez określania jednostek miary, a wynik obliczeń jest zapisywany z jednostkami miary w układzie SI. Oznaczenie literowe wartości musi być takie same w ramach obliczeń. Obliczenia pośrednie nie są wykonywane. Obliczeniom muszą towarzyszyć krótkie objaśnienia przyjętych współczynników, wartości, decyzji projektowych, z odniesieniami itp.
5. Na końcu zadania zapisuje się odpowiedź, jeśli jest to obliczenie projektowe, lub wniosek, jeśli jest to obliczenie weryfikacyjne. Dozwolone jest zapisanie wniosku bezpośrednio po obliczeniach w trakcie rozwiązywania zadania. Kolejność wykonania praktycznych zadań jest pokazana w przykładach skryptu.



**Oznaczenia ważniejszych wielkości**

$Q$	– siła skupiona;
$F$	– siła (oznaczenie ogólne); obciążenie; pole powierzchni;
$F_t$	– siła obwodowa; siła styczna;
$F_r$	– siła promieniowa (rozporowa);
$F_n$	– siła normalna;
$P$	– siła; obciążenie;
$M$	– moment siły (oznaczenie ogólne);
$T$	– moment obrotowy;
$M_g$	– moment gnący w przekroju poprzecznym belki;
$M_x, M_y$	– moment gnący w przekroju poprzecznym belki względem osi $x$ albo $y$ ;
$M_{red}$	– zredukowany moment według przyjętej hipotezy wytrzymałościowej;
$N$	– moc; wzdłużna siła w przekroju poprzecznym belki;
$\sigma$	– naprężenia normalne (ogólne oznaczenie);
$\sigma_r; \sigma_c; \sigma_g$	– naprężenia normalnie przy rozciąganiu, ściskaniu, zginaniu odpowiednio;
$\sigma_{red}$	– naprężenia zredukowane zgodnie z przyjętą hipotezą wytrzymałości;
$R_m$	granica wytrzymałości (ogólne oznaczenia);
$R_e$	– granica plastyczności;
$R_{-1}$	– granica wytrzymałości na zginanie przy symetrycznym cyklu zmiany naprężenia;
$R_0$	– granica wytrzymałości na zginaniu przy zmiennym cyklu zmiany naprężeń;
$\sigma_k$	– naprężenia kontaktu;
$k$	– dopuszczalne naprężenia normalne (oznaczenie ogólne);
$k_r; k_c;$	– dopuszczalne naprężenia przy rozciąganiu, ściskaniu, zginaniu odpowiednio;
$k_g$	– dopuszczalne naprężenia kontaktowe;
$k_k$	– dopuszczalne naprężenia kontaktowe;
$\tau$	– naprężenia styczne (ogólne oznaczenia);
$\tau_{sc}$	– naprężenia styczne ścinające;
$\tau_p$	– granica plastyczności przy skręcaniu;

$\tau_{-1}$	- granica wytrzymałości na skręcaniu przy zmiennym cyklu naprężenia;
$\tau_0$	- granica wytrzymałości na skręcanie przy harmonijnym cyklu naprężeń;
$k_s$	- dopuszczalne naprężenia przy skręcaniu
$k_t$	- dopuszczalne naprężenia przy ścinaniu;
$p$	- ciśnienie; skok gwintu;
$q$	- intensywność siły ciągłej, obciążenie na jednostkę długości linii kontaktu;
$[q]$	- dopuszczalne obciążenie ciągłe;
$[n]$	- dopuszczalny współczynnik zapasu wytrzymałości;
$E$	- moduł sprężystości wzdłużnej;
$G$	- moduł ścinania; masa; siła ciężkości;
$v$	- prędkość liniowa, prędkość obrotowa;
$\omega$	- prędkość kątowna;
$n$	- prędkość obrotowa; współczynnik wytrzymałości; ilość wyrobów;
$g$	- przyspieszenie swobodnego spadania;
$L, l$	- długość;
$H, h$	- wysokość;
$B, b$	- szerokość;
$D, d$	- średnica;
$r$	- promień; współczynnik asymetrii cyklu;
$\delta$	- grubość;
$S, s$	- grubość; krok gwintu;
$A, a$	- odległość między osiami przekładni (zębatej, pasowej itd.); pole powierzchni;
$m$	- moduł kół zębatach;
$m_n$	- normalny moduł kół zębatach;
$m_s(m_t)$	- moduł przekładni czołowej; moduł osiowy przekładni ślimakowej;
$J_x, J_y$	- odśrodkowy moment bezwładności przekroju poprzecznego odpowiednio względem osi $x$ albo $y$ ;

$J_p$	-	biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego belki;
$W_x, W_y$	-	odśrodkowy wskaźnik wytrzymałości odpowiednio względem osi $x$ albo $y$ ;
$W_p$	-	biegunowy wskaźnik wytrzymałości;
$z$	-	ilość elementów w połączeniu; liczba zębów;
$i$	-	przełożenie przekładni; liczba zwojów sprężyny;
$u$	-	przełożenie pary kół zębatach;
$z$	-	indeks cylindrycznej sprężyny gwintowej;
$HB$	-	twardość Brinella;
$HRC_e$	-	twardość Rockwella (skala C);
$HV$	-	twardość Vickersa;
$HSh$	-	twardość Shore'a;
$\alpha$	-	współczynnik rozszerzalności liniowej; kąt zaczepienia, kąt profilu gwintu, zęba; kąt obwodu pasa koła pasowego;
$\beta$	-	kąt pochylenia zębów;
$\varepsilon$	-	odkształcenie liniowe; współczynnik poślizgu; współczynnik nakładania się przełożenia; czynnik skali;
$\eta$	-	sprawność;
$f$	-	współczynnik tarcia;
$\mu$	-	współczynnik Poissona; lepkość dynamiczna;
$\rho$	-	kąt tarcia; szczelność; promień krzywizny w przekładniach zębatach;
$\varphi$	-	kąt wzniosu linii śrubowej; kąt skręcenia.

### **Uwagi:**

1. Oznaczenia wartości w ramach obliczeń powinny być takie same.
2. Nieprzedstawione oznaczenia można znaleźć przy omówieniu tematów teoretycznej i praktycznej części skryptu.

Tabela C1. Alfabet grecki

Znak	Wymowa	Znak	Wymowa	Znak	Wymowa
<b>A a</b>	alfa	<b>I ι</b>	jota	<b>P ρ</b>	R(h)o
<b>B β</b>	beta	<b>K κ</b>	kappa	<b>Σ σ</b>	sigma
<b>Γ γ</b>	gamma	<b>Λ λ</b>	lambda	<b>T τ</b>	tau
<b>Δ δ</b>	delta	<b>M μ</b>	mi	<b>Υ υ</b>	ipsilon
<b>E ε</b>	epsilon	<b>N ν</b>	ni	<b>Φ φ</b>	fi
<b>Z ζ</b>	dzeta	<b>Ξ ξ</b>	ksi	<b>X χ</b>	chi
<b>H η</b>	eta	<b>O ο</b>	omikron	<b>Ψ ψ</b>	psi
<b>Θ θ</b>	theta	<b>Π π</b>	pi	<b>Ω ω</b>	omega

Obecnie we wszystkich dziedzinach nauki, techniki, gospodarki oraz edukacji stosuje się Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (SI).

Tabela C2. Wybrane jednostki układu SI

Nazwa wielkości	Jednostka	Oznaczenie
<i>Podstawowe wartości</i>		
Długość	Metr	m
Masa	Kilogram	kg
Czas	Sekunda	s
Temperatura termodynamiczna	Kelwin	K
<i>Dodatkowe wartości</i>		
Kąt rozwarty	Radian	rad
<i>Wartości pochodne</i>		
Pole powierzchni	Metr kwadratowy	m <sup>2</sup>
Objętość	Metr sześcienny	m <sup>3</sup>
Statyczny moment i moment oporu przekroju płaskiego	Metr sześcienny	m <sup>3</sup>
Moment bezwładności przekroju płaskiego	Metr do potęgi czwartej	m <sup>4</sup>
Gęstość	Kilogram na metr sześcienny	kg/m <sup>3</sup>
Prędkość	Metr na sekundę	m/s
Prędkość obrotowa	Radian na sekundę	rad/s, s <sup>-1</sup>
Siła	Niuton	N
Naprężenia (ciśnienie mechaniczne)	Pascal (Niuton na metr kwadratowy)	Pa (N/m <sup>2</sup> )
Moc	Watt	W
Ciężar właściwy	Niuton na metr sześcienny	N/m <sup>3</sup>
Moment bezwładności (dynamiczny)	Kilogram-metr kwadratowy	kg · m <sup>2</sup>

Uwaga: Oprócz temperatury Kelvina dopuszczalne jest stosowanie temperatury Celsjusza ( $t$ ), która jest wyrażana w stopniach Celsjusza ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Tabela C3. Mnożniki oraz ich nazwy i symbole aktualnie stosowane do tworzenia jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych

Nazwa	Symbol	Mnożnik	Nazwa	Symbol	Mnożnik
Mega	M	$10^6$	Decy	d	$10^{-1}$
Kilo	k	$10^3$	Centy	c	$10^{-2}$
Hekto	h	$10^2$	Mili	m	$10^{-3}$
Deka	da	10	Mikro	$\mu$	$10^{-6}$

Uwaga 1. Niedozwolone jest używanie dwóch przedrostków do prostej nazwy jednostki, na przykład megakiloton;

Uwaga 2. Przedrostki nie mogą być stosowane do nazw następujących jednostek, które oznaczają wielokrotność lub jednostkę wartościową, na przykład w tonach do centrów.

Tabela C4. Konwersja niektórych jednostek i jednostek poza układu SI na jednostki SI

Jednostki poza układem SI	Jednostki układu SI
<i>Jednostki długości</i>	
1 milimetr, mm	$10^{-3}$ m
1 centymetr, cm	$10^{-2}$ m
1 mikrometr, $\mu$ m	$10^{-6}$ m
1 m = 1000 mm = 100 cm; 1 cm = 10 mm; 1 $\mu$ m = 0,001 mm ( $10^{-3}$ mm)*	
<i>Jednostki obszaru</i>	
1 mm <sup>2</sup>	$10^{-6}$ m <sup>2</sup>
1 cm <sup>2</sup>	$10^{-4}$ m <sup>2</sup> = 100 mm <sup>2</sup>
<i>Jednostki statycznego momentu i momentu oporu przekroju płaskiego</i>	
1 cm <sup>3</sup>	$10^{-6}$ m <sup>3</sup> = 1000 mm <sup>3</sup>
<i>Jednostki momentu bezwładności płaskiego przekroju</i>	
1 cm <sup>4</sup>	$10^{-8}$ m <sup>4</sup> = 10000 mm <sup>4</sup>
<i>Jednostki masy</i>	
1 tona, t	1000 kg
1 kg = 1000 g*	
<i>Jednostki prędkości obrotowej</i>	
1 ob./min (min <sup>-1</sup> )	$\pi/180$ rad/s
1 ob./s	$2\pi$ rad/s
<i>Jednostki siły, obciążenia, masy</i>	
1 kG (kgf)	$9,80665 \approx 9,81 \approx 10$ N
1 T (tf)	$9806,65 \approx 9810 \approx 104$ N
<i>Jednostki momentu sił, pary sił</i>	
1 kGm (kgfm)	$9,80665 \approx 9,81 \approx 10$ Nm
1 kGcm (kgfcm)	$0,0980665 \approx 0,0981 \approx 0,1$ Nm
1 Nm = 1000 Nmm*	

<b>Jednostki poza układem SI</b>	<b>Jednostki układu SI</b>
<i>Jednostki pracy, energii</i>	
1 kGm (kgfm)	9,80665 ≈ 9,81 ≈ 10 J
1 kWh = 3,6 10 <sup>6</sup> J*	
<i>Jednostki mocy</i>	
1 kGm · m/s; kG · cm/s	9,80665 W ≈ 9,81 W ≈ 10 W
1 KM	735, 499 W ≈ 735,5 W ≈ 736 W
<i>Jednostki naprężeń mechanicznych, ciśnienie</i>	
1 kG/cm <sup>2</sup> (kgf/cm <sup>2</sup> )	98066,5 ≈ 9,81 · 10 <sup>4</sup> Pa ≈ 0,1 MPa
1 kG/mm <sup>2</sup> (kgf/mm <sup>2</sup> )	9806650 ≈ 9,81 · 10 <sup>6</sup> Pa ≈ 10 MPa
1 at	98066,5 ≈ 9,81 · 10 <sup>4</sup> Pa ≈ 0,1 MPa
1 at = 1 kgf/cm <sup>2</sup> ; 1 N/mm <sup>2</sup> = 1 MPa*	
<i>Jednostki lepkości dynamicznej</i>	
1 pauz P	0,1 Pas
1 centypauz cP	0,001 Pas
<i>Jednostki lepkości kinetycznej</i>	
1 stokes, St	1,010 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s
1 centystokes, cSt	1,010 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
1 cSt = 1 mm <sup>2</sup> /s = 1,010 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s*	
<i>Jednostki wymiany ciepła i współczynniki wymiany ciepła</i>	
1 kcal/m <sup>2</sup> · h · stopień	1,163 W/m <sup>2</sup> °C
<i>Jednostki współczynnika przewodności cieplnej</i>	
1 kcal/m · h · stopień	1,163 W/m °C
<i>Jednostka ilości ciepła</i>	
1 kcal	≈ 4,187103 ≈ 4103 J
<i>Jednostki objętości</i>	
1 l	10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
1000 l = 1 m <sup>3</sup> *	

Uwaga: \* - dodatkowe współczynniki często są stosowane w obliczeniach

## Załącznik D (informacyjny)

Tabela D.1. Wartości  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  dla wybranych materiałów w 20 °C

Materiał	Moduł sprężystości $E$ , MPa	Moduł Kirchhoffa $G \cdot 10^4$ , MPa	Współczynnik Poissona $\mu$	Temperaturowy współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Gęstość $\rho_m$ , kg/m <sup>3</sup>
Stal	$(1,90 \div 2,15) \cdot 10^5$	$7,8 \div 8,30$	$0,25 \div 0,33$	$10 \div 13$	$7,7 \div 7,8$
Żeliwo szare	$(0,78 \div 1,47) \cdot 10^5$	4,42	$0,23 \div 0,27$	$8,7 \div 11$	$7,0 \div 7,1$
Brąz cynowy	$(0,74 \div 1,22) \cdot 10^5$	4,2	$0,32 \div 0,35$	$17 \div 22$	$8,6 \div 8,8$
Brąz bezcynowy	$(1,03 \div 1,18) \cdot 10^5$	$4,0 \div 4,2$	0,36	$17 \div 22$	$8,6 \div 8,8$
Mosiądz aluminiowy	$(0,98 \div 1,08) \cdot 10^5$	$3,63 \div 3,92$	$0,32 \div 0,34$	$17 \div 22$	$8,2 \div 8,5$
Stopy aluminium	$(6,87 \div 7,07) \cdot 10^4$	2,65	0,33	$22 \div 24$	$2,6 \div 2,7$

Tabela D.2. Mechaniczne właściwości wybranych gatunków stali

Materiał	$R_e$ , MPa	$k$ , MPa	$R_{-1}$ , MPa	$E$ , MPa
Stal C10, S195	210	140	160	$2 \cdot 10^5$
Stal C20, S215	240	160	170	
Stal S235	260	175	180	
Stal C25	280	190	210	
Stal C30, S275	300	200	225	
Stal; C35, S315	320	210	240	
Stal C45	360	240	275	
Stal C50	380	250	290	
Stal 09G2S	310	205	240	

Uwaga 1.  $R_e$  – granica plastyczności,  $k$  – dopuszczalne naprężenia,  $E$  – moduł sprężystości,  $R_{-1}$  – granica wytrzymałości na zginanie

Tabela D.3. Dopuszczalne naprężenia dla połączeń spawanych

Spawanie	Dopuszczalne naprężenia połączeń spawanych		
	rozciąganie $k_r'$	zginanie $k_g'$	ściananie $k_t'$
Automatyczne, półautomatyczne z drutem samoosłonowym (flux), ręczne, elektrodami E42A i E50A, w środowisku gazów ochronnych, kontaktowe spawanie stykowe	$k_r$	$k_r$	$0,65 k_r$
Ręczne elektrodami E42, E50 (zwykłej jakości), spawanie gazowe	$0,9 k_r$	$k_c$	$0,6 k_r$
Ręczne elektrodami E34	$0,75 k_r$	$0,6 k_r$	$0,6 k_r$
Kontaktowe punktowe	–	–	$0,5 k_r$

Uwaga 1. Przyjęte normy dopuszczalnych naprężeń dotyczą stali nisko- i średniowęglowych oraz niskostopowych (typu 14GS, 09G2S, 09G2, 15GS, 15HSND i in.).

Uwaga 2.  $k_r = R_e/n$  – dopuszczalne naprężenia dla materiału łączonych elementów przy obciążeniu statycznym. Dla konstrukcji metalowych współczynnik bezpieczeństwa wynosi  $n = 1,4 \div 1,6$ . Większa wartość dotyczy ciężkich trybów obciążenia.

Przy zmiennych obciążeniach wytrzymałość połączeń spawanych zmniejsza się (wpływ stref cieplnych, defektów technologicznych). Obliczenie połączeń przy zmiennych obciążeniach przeprowadza się, wykorzystując wzory do obliczenia statycznych obciążeń, dopuszczalne naprężenia spoin przy obciążeniu statycznym mnoży się przez współczynnik zmiennego obciążenia  $\gamma$ . Przy obciążeniach zmiennych rekomendowane jest obliczenie wytrzymałości nie tylko spoiny, ale i elementów łączonych w strefie spoiny. Dopuszczalne naprężenia w strefie spoiny mnoży się przez współczynnik  $\gamma$  obliczany ze wzoru:

$$\gamma = \frac{1}{(0,6K_{ef} + 0,2) - (0,6K_{ef} - 0,2)R}$$

gdzie  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  albo  $\tau_{\min}/\tau_{\max}$  – współczynnik asymetrii cyklu naprężeń;  
 $K_{ef}$  – efektywny współczynnik skupienia naprężeń (z tabel D.4 i D.5).

Tabela D.4. Efektywny współczynnik skupienia naprężeń (dla spoin i elementów spawanych)

Obliczeniowy element	$K_{ef}$ – spawanie łukiem elektrycznym	
	Stal niskowęglowa	Stal niskostopowa
Element w miejscu przejścia do spoiny stykowej	1,5	1,9
Element w miejscu przejścia do spoiny czołowej	2,7	3,3
Element w miejscu przejścia do spoiny bocznej	3,5	4,5
Spoiny czołowe z pełnym przetopem	1,2	1,4
Kątowe spoiny czołowe	2,0	2,0
Kątowe spoiny boczne	3,5	4,5



Tabela D.5. Efektywny współczynnik skupienia naprężeń (dla spoin i elementów spawanych) przy spawaniu kontaktowym

Marka stali	Stan próbki	Grubość, mm	$K_{ef}$ w punktach	
			Łączenia	Roboczych
Stal C10	Normalizacja	3 + 3	1,4 (1,25)	7,5 (5)
Stal 30HGSA	Odpuszczanie	1,5 + 1,5	1,35	12
Stop tytanu Grade2	Stan dostawy	1,5 + 1,5	2,0 (1,3)	10 (5)
Stop aluminium 2024 (PA7)	Stan dostawy	1,5 + 1,5	2,0 (1,3)	5 (2,25)

Uwaga. W nawiasach współczynnik dla spawania stykowego i zgrzewania.

Tabela D.6. Dopuszczalne współczynniki bezpieczeństwa połączeń gwintowych

[n] przy niekontrolowanym zakręcaniu						
Stal	Obciążenia stałe			Obciążenia zmienne		
	Średnica gwintu $d$ , mm			Średnica gwintu $d$ , mm		
	od 6 do 16	od 16 do 30	od 30 do 60	od 6 do 16	od 16 do 30	od 30 do 60
Węglowa	5 ÷ 4	4 ÷ 2,5	2,5 ÷ 1,6	10 ÷ 6,5	6,5	6,5 ÷ 5
Stopowa	6,6 ÷ 5	5 ÷ 3,3	3,3	7,5 ÷ 5	5	5 ÷ 4
[n] = 1,5 ÷ 2,5 przy kontrolowanym zakręcaniu						

Tabela D.7. Dopuszczalne naprężenia połączeń gwintowych, MPa

Rodzaj obciążenia		Wartość zalecana			
Zewnętrzne siły rozciągające:					
Bez zaciągnięcia śruby		$k_r = 0,6R_e$			
Zewnętrzne siły poprzeczne:					
Śruby bez luzu		$k_t = 0,4R_m$ (statyczna)			
		$k_t = 0,2 \div 0,3R_m$ (zmienne)			
Wytrzymałość elementu w miejscu łączenia		$k_c = 0,8R_m$ – stal			
		$k_c = (0,4 \div 0,5)R_e$ – żeliwo			
		$k_c = 1,2 R_e$ – beton			
		$k_c = 2,4 R_e$ – drewno			
Odporne na zużycie śruby napędowe i obciążeniowe					
stal + brąz	stal + żeliwo	stal + stal	nakrętka – stal	śruba – brąz	nakrętka – żeliwo
$k_c = 10 \div 13$	$k_c = 4,5 \div 8$	$k_c = 7,5 \div 13$	$k_t = 0,2R_m$	$k_t = 20 \div 25$	$k_t = 20 \div 30$

Tabela D.8. Gwint metryczny (PN-ISO 261:2001), mm

Nominalna średnica gwintu $d$	Gwint grubozwojny			Gwint drobnozwojny		
	$p$	$d_1$	$d_2$	$p$	$d_1$	$d_2$
M6	1	4,918	5,350	0,75	5,188	5,513
M8	1,25	6,647	7,188	1	6,918	7,350
M10	1,5	8,376	9,026	1,25	8,647	9,188
M12	1,75	10,106	10,863	1,25	10,647	11,188
(M14)	2	11,835	12,701	1,5	12,376	13,026
M16	2	13,835	14,701	1,5	14,376	15,026
(M18)	2,5	15,294	16,376	1,5	16,376	17,026
M20	2,5	17,294	18,376	1,5	18,376	19,026
(M22)	2,5	19,294	20,376	1,5	20,376	21,026
M24	3	20,752	22,051	2	21,835	22,701
(M27)	3	23,752	25,051	2	24,835	25,701
M30	3,5	26,211	27,727	2	27,835	28,701
(M33)	3,5	29,211	30,727	2	30,835	31,701
M36	4	31,670	33,402	3	32,752	34,051
M(39)	4	34,670	36,402	3	35,752	37,051
M42	4,5	37,129	39,077	3	38,752	40,051
M(45)	4,5	40,129	42,077	3	41,752	43,051
M48	5	42,587	44,752	3	44,752	46,051
(M52)	5	46,587	48,752	3	48,752	50,051
M56	5,5	50,046	52,428	3	52,752	54,051
(M60)	5,5	54,046	56,428	3	56,752	58,051
M64	6	57,505	60,103	3	60,752	62,051
(M68)	6	61,505	64,103	3	64,752	66,051

Uwaga. Wartości w nawiasach w miarę możliwości nie powinny być stosowane.

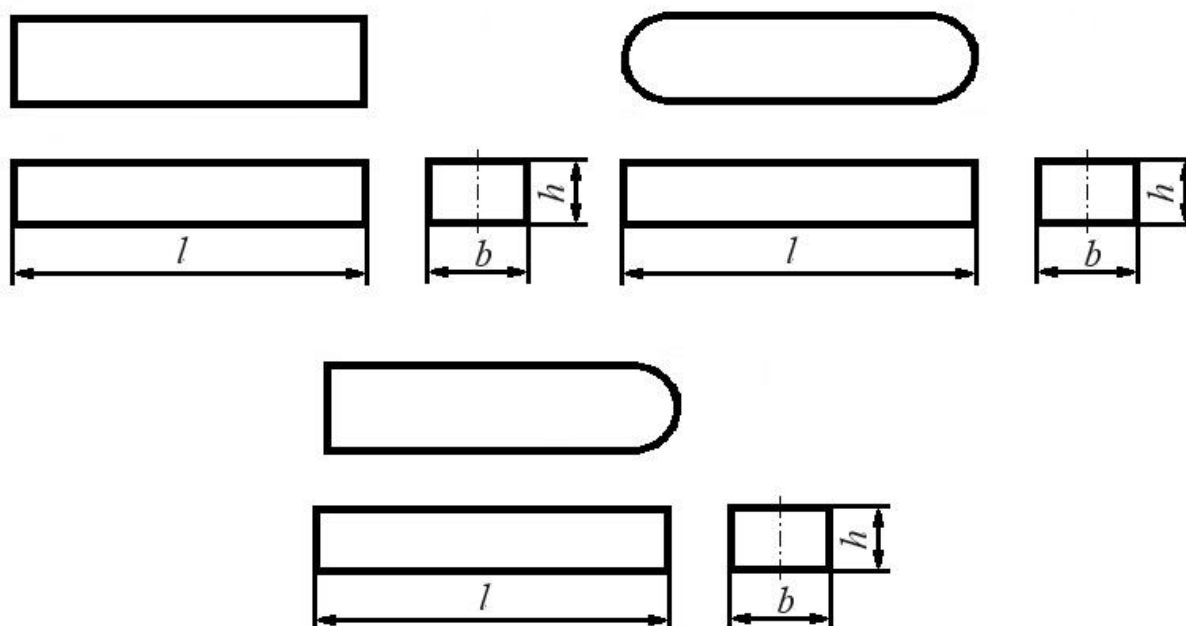
Tabela D.9. Dopuszczalne naprężenia  $k_t$  połączeń wpustowych, MPa

Rodzaj połączenia	Materiał piasty	Charakter obciążenia	
		Stałe	Zmienne
Nieruchome	Stal	150	100
	Żeliwo	90	60
Ruchome	Stal	50	30
$k_t = 70 \div 100$			
Większą wartość przyjmuje się przy obciążeniu stałym			

Tabela D.10. Dopuszczalne naprężenia  $k_t$  połączeń wielowypustowych, MPa

Rodzaj połączenia	Warunki eksploatacji	Powierzchnia zębów	
		Bez obróbki cieplnej	Po obróbce cieplnej
Nieruchome	a	35 ÷ 50	40 ÷ 70
	b	60 ÷ 100	100 ÷ 140
	c	80 ÷ 120	120 ÷ 200
Ruchome bez obciążenia (na przykład skrzynia biegów)	a	15 ÷ 20	20 ÷ 35
	b	20 ÷ 30	30 ÷ 60
	c	25 ÷ 40	40 ÷ 70
Ruchome z obciążeniem (na przykład wał kardanowy w samochodach)	a	-	3 ÷ 10
	b	-	5 ÷ 15
	c	-	10 ÷ 20

Uwaga: a – ciężkie warunki eksploatacji – obciążenia z biciem, wibracje o dużej częstotliwości i amplitudzie, złe warunki smarowania w ruchomych połączeniach, niska dokładność wykonania; b – średnie warunki eksploatacji; c – dobre warunki eksploatacji. Mniejsze wartości dla lekkich trybów obciążania.

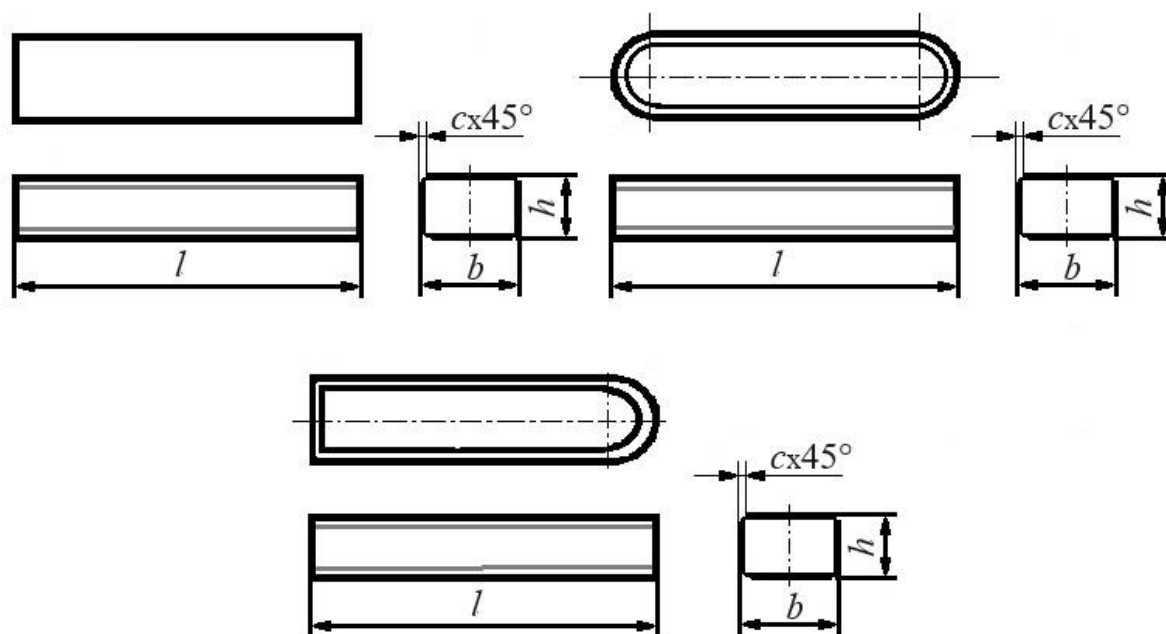


Rys. D.1. Wpusty pryzmatyczne

Tabela D.11. Wpusty pryzmatyczne (PN 85005), mm

Średnica wału		Wymiary		Głębokość rowka		Długość $L$		Promień $r$		Fazowanie $c$	
od	do	$b$	$h$	wał $t$	Piasta $t_1$	od	do	od	do	od	do
8	10	3	3	1,8	1,4	6	36	0,08	0,16	0,16	0,25
10	12	4	4	2,5	1,8	8	45				
12	17	5	5	3	2,3	10	56	0,16	0,25	0,25	0,4
17	22	6	6	3,5	2,8	14	70				
22	30	8	7	4	3,3	18	90				
30	38	10	8	5	3,3	22	110	0,25	0,4	0,4	0,6
38	44	12	8	5	3,3	28	140				
44	50	14	9	5,5	3,8	36	160				
50	58	16	10	6	4,3	45	180				
58	65	18	11	7	4,4	50	200	0,4	0,6	0,6	0,8
65	75	20	12	7,5	4,9	56	220				
75	85	22	14	9	5,4	63	250				
85	95	25	14	9	5,4	70	280				
95	110	28	16	10	6,4	80	320				
110	130	32	18	11	7,4	90	360	0,7	1,0	1,0	1,2
130	150	36	20	12	8,4	100	400				
150	170	40	22	13	9,4	100	400				
170	200	45	25	15	10,4	110	450				

Uwaga. Przykład oznaczenia i standardowy szereg wartości przedstawiono w uwagach do tabeli D.12.



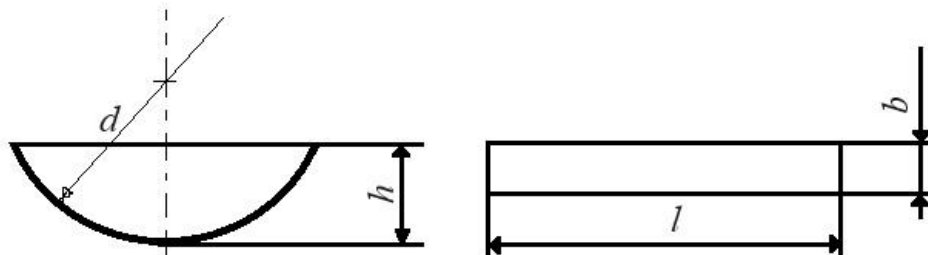
Rys. D.2. Wpusty pryzmatyczne wysokie (PN 85001)

Tabela D.12. Wpusty pryzmatyczne wysokie (PN 85001), mm

Średnica wału		Wy-miary		Głębokość rowku		Długość $L$		Promień $r$		Fazowanie	
od	do	$b$	$h$	wał $t$	piasta $t_1$	od	do	od	do	$t$	$t_1$
30	38	10	9	5,5	3,8	22	110	0,25	0,4	0,4	0,6
38	44	12	11	7	4,4	28	150				
44	50	14	12	7,5	4,9	36	160				
50	58	16	14	9	5,4	45	180	0,4	0,6	0,6	0,8
58	65	18	16	10	6,4	50	200				
65	75	20	18	11	7,4	56	220				
75	85	22	20	12	8,4	63	250				
85	95	25	22	13	9,4	70	280	0,7	1,0	1,0	1,2
95	110	28	25	15	10,4	80	320				
110	130	32	28	17	11,4	90	360				
130	150	36	32	20	12,4	100	400				
150	170	40	36	22	14,4	100	400				
170	200	45	40	25	15,4	110	450				

Uwaga 1. Materiał – stal ciągnięta dla wpustów z chwilową granicą wytrzymałości nie mniej niż 500–600 MPa.

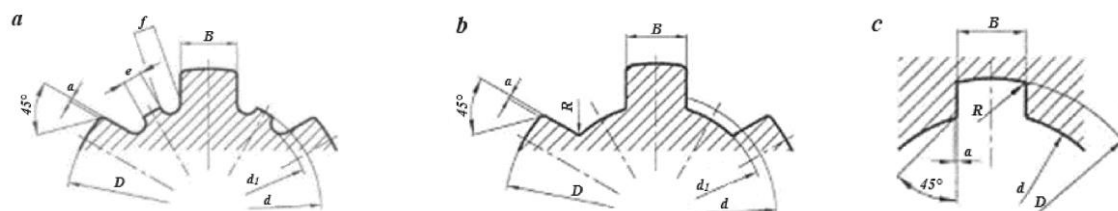
Uwaga 2. Szereg długości  $l$  zgodnie z normą PN 85001: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 45, 50, 56, 63, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200, 220, 250, 280, 320, 360, 400, 450.



Rys. D.3. Wpusty czółenkowe (PN 85008)

Tabela D.13. Wpusty czółenkowe (PN 85008) (wymiary w milimetrach)

Średnica wału $d$		Wymiary wpustów					Masa, kg	Głębokość rowka						
Przekazującego moment	Ustawiające elementy	$b$	$h$	$d_1$	$l$	$c$ albo $r$		wału $t$	pia- sty $t_1$					
						max				min				
od 6 do 8	od 10 do 12	2	2,6	7	6,8	0,16	0,25	0,204	1,8	1,0				
		2	3,7	10	9,7			0,414	2,9					
		2,5	3,7	10	9,7			0,510	2,9					
od 8 do 10	od 12 do 17	3	3,7	10	9,7			0,25	0,4	0,612	2,5	1,4		
			5	13	12,6					1,05	3,8			
			6,5	16	15,7					1,60	5,3			
od 10 do 12	od 17 do 22	4	5	13	12,6					0,25	0,4	1,40	3,5	1,8
			6,5	16	15,7							2,12	5	
			7,5	19	18,6							3,24	6	
od 12 do 17	od 22 do 30	5	9	22	21,6	0,25	0,4					4,10	7,5	2,3
			6,5	16	15,7							2,68	4,5	
			7,5	19	18,6							4,04	5,5	
od 17 do 22	od 30 do 38	6	9	22	21,6			0,25	0,4			5,66	7	2,8
			10	25	24,5							6,90	8	
			11	28	27,3							6,78	6,5	
od 22 do 30	od 38 do 44	8	10	25	24,5					0,4	0,6	8,48	7,5	3,3
			11	28	27,3							10,3	8,5	
			13	32	31,4							14,5	10,5	
od 30 do 38	od 44 do 50	10	13	32	31,4	0,4	0,6					13,8	8	3,3
			15	38	37,1							19,3	10	
			16	45	43,1							25,4	12	
od 38 do 44	od 50 do 58	12	17	55	50,8			0,4	0,6			39,5	13	3,3
19	65	59,1	45,2	14										
od 38 do 44	od 50 do 58	12	19	65	59,1			0,4	0,6			62,1	16	3,3



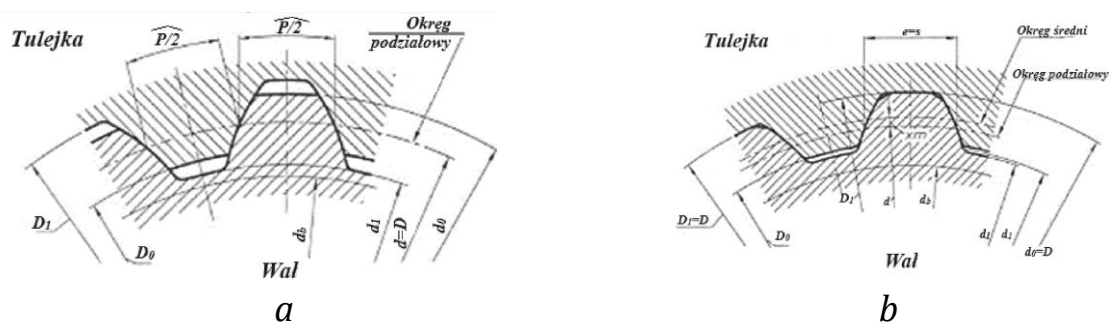
Rys. D.4. Połączenia wielowypustowe równoległe (PN-M 85017):  
 $a$  – zarys osiowania na  $d$ ;  $b$  – zarys osiowania na  $D$  lub  $B$ ;  $c$  – zarys otworu

Tabela D.14. Połączenia wielowypustowe równoległe (PN-M 85017), mm

Wymiar nominalny $z \times d \times D$	$z$	$d$	$D$	$b$	$d_1$	$a$	$f$		$r$ , nie więcej
					Nie mniej		Rozmiar nom.	tol.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Seria lekka</b>									
$6 \times 23 \times 26$	6	23	26	6	22,1	3,54	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 26 \times 30$	6	26	30	6	24,6	3,85	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 28 \times 32$	6	28	32	7	26,7	4,03	0,3	+0,2	0,2
$8 \times 32 \times 36$	8	32	36	6	30,4	2,71	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 36 \times 40$	8	36	40	7	34,5	3,46	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 42 \times 46$	8	42	46	8	40,4	5,03	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 46 \times 50$	8	46	50	9	44,6	5,75	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 52 \times 58$	8	52	58	10	49,7	4,89	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 56 \times 62$	8	56	62	10	53,6	6,38	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 62 \times 68$	8	62	68	12	59,8	7,31	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 72 \times 78$	10	72	78	12	69,6	5,45	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 82 \times 88$	10	82	88	12	79,3	8,62	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 92 \times 98$	10	92	98	14	89,4	10,08	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 102 \times 108$	10	102	108	16	99,9	11,49	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 102 \times 120$	10	112	120	18	108,8	10,72	0,5	+0,3	0,5
<b>Seria średnia</b>									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$6 \times 13 \times 16$	6	13	16	3,5	12,0	-	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 16 \times 20$	6	16	20	4	14,5	-	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 18 \times 22$	6	18	22	5	16,7	-	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 21 \times 25$	6	21	25	5	19,5	1,95	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 23 \times 28$	6	23	28	6	21,3	1,34	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 26 \times 32$	6	26	32	6	23,4	1,65	0,4	+0,2	0,3
$6 \times 28 \times 34$	6	28	34	7	25,9	1,70	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 32 \times 38$	8	32	38	6	29,4	-	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 36 \times 42$	8	36	42	7	33,5	1,02	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 42 \times 48$	8	42	48	8	39,5	2,57	0,4	+0,2	0,3
$8 \times 46 \times 54$	8	46	54	9	42,7	-	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 52 \times 60$	8	52	60	10	48,7	2,44	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 56 \times 65$	8	56	65	10	52,2	2,5	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 62 \times 72$	8	62	72	12	57,8	2,4	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 72 \times 82$	10	72	82	12	67,4	-	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 82 \times 92$	10	82	92	12	77,1	3,0	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 92 \times 102$	10	92	102	14	87,3	4,5	0,5	+0,3	0,5
$10 \times 102 \times 112$	10	102	112	16	97,7	6,3	0,5	+0,3	0,5

Wymiar nominalny $z \times d \times D$	$z$	$d$	$D$	$b$	$d_1$	$a$	$f$		$r$ , nie więcej
					Nie mniej		Rozmiar nom.	tol.	
$10 \times 112 \times 125$	10	112	125	18	106,3	4,4	0,5	+0,3	0,5
<b>Seria ciężka</b>									
$10 \times 18 \times 23$	10	18	23	3	15,6	-	0,3	+0,2	0,2
$10 \times 21 \times 26$	10	21	26	3	18,5	-	0,3	+0,2	0,2
$10 \times 23 \times 29$	10	23	29	4	20,3	-	0,3	+0,2	0,2
$10 \times 26 \times 32$	10	26	32	4	23,0	-	0,4	+0,2	0,3
$10 \times 28 \times 35$	10	28	35	4	24,4	-	0,4	+0,2	0,3
$10 \times 32 \times 40$	10	32	40	5	28,0	-	0,4	+0,2	0,3
$10 \times 36 \times 45$	10	36	45	5	31,3	-	0,4	+0,2	0,3
$10 \times 42 \times 52$	10	42	52	6	36,9	-	0,4	+0,2	0,3
$10 \times 46 \times 56$	10	46	56	7	40,9	-	0,5	+0,3	0,5
$16 \times 52 \times 60$	16	52	60	5	47,0	-	0,5	+0,3	0,5
$16 \times 56 \times 65$	16	56	65	5	50,6	-	0,5	+0,3	0,5
$16 \times 62 \times 72$	16	62	72	6	56,1	-	0,5	+0,3	0,5
$16 \times 72 \times 82$	16	72	82	7	65,9	-	0,5	+0,3	0,5
$20 \times 82 \times 92$	20	82	92	6	75,6	-	0,5	+0,3	0,5
$20 \times 92 \times 102$	20	92	102	7	85,5	-	0,5	+0,3	0,5
$20 \times 102 \times 115$	20	102	115	8	98,7	-	0,5	+0,3	0,5
$20 \times 112 \times 125$	20	112	125	9	104	-	0,5	+0,3	0,5

Uwaga. Do centrowania na średnicy wewnętrznej należy używać wersji A i 3, do centrowania na średnicy zewnętrznej i powierzchniach bocznych wielowypustków należy używać wersji B.



Rys. D.5. Połączenia wielowypustkowe ewolwentowe:  
*a* – osiowanie po *S*; *b* – osiowanie po *D*



Tabela D.15. Połączenia wielowypustkowe ewolwentowe (PN-ISO 4156:1999), mm

Zewn. <i>D</i>	<i>m</i> = 1		<i>m</i> = 1,5		<i>m</i> = 2		<i>m</i> = 2,5		<i>m</i> = 3,5		<i>m</i> = 5		<i>m</i> = 10	
	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>x</i>
30	28	0,5	18	0,75	14	0	-	-	-	-	-	-	-	-
32	30	0,5	20	0,25	14	1	-	-	-	-	-	-	-	-
35	34	0	22	0,25	16	0,5	12	1,25	-	-	-	-	-	-
38	36	0,5	24	0,25	18	0	14	0,25	-	-	-	-	-	-
40	38	0,5	26	-0,25	18	1	14	1,25	-	-	-	-	-	-
42	-	-	26	0,75	20	0	16	-0,25	-	-	-	-	-	-
45	-	-	28	0,75	22	-0,5	16	1,25	-	-	-	-	-	-
50	-	-	32	0,25	24	0	18	1,25	-	-	-	-	-	-
55	-	-	36	-0,25	26	0,5	20	1,25	14	1,25	-	-	-	-
60	-	-	38	0,75	28	1	22	1,25	16	0,25	-	-	-	-
65	-	-	-	-	32	-0,5	24	1,25	18	-0,75	-	-	-	-
70	-	-	-	-	34	0	26	1,25	18	1,75	12	2,5	-	-
75	-	-	-	-	36	0,5	28	1,25	20	0,75	14	0	-	-
80	-	-	-	-	38	1	30	1,25	22	-0,25	14	2,5	-	-
85	-	-	-	-	-	-	32	1,25	24	-1,25	16	0	-	-
90	-	-	-	-	-	-	34	1,25	24	1,25	16	2,5	-	-
95	-	-	-	-	-	-	36	1,25	26	0,25	18	0	-	-
100	-	-	-	-	-	-	38	1,25	28	-0,75	18	2,5	-	-
110	-	-	-	-	-	-	42	1,25	30	0,75	20	2,5	-	-
120	-	-	-	-	-	-	46	1,25	34	-1,25	22	2,5	-	-
130	-	-	-	-	-	-	50	1,25	36	0,25	24	2,5	-	-
140	-	-	-	-	-	-	-	-	38	1,75	26	2,5	-	-
150	-	-	-	-	-	-	-	-	42	-0,25	28	2,5	14	0
160	-	-	-	-	-	-	-	-	44	1,25	30	2,5	14	5
170	-	-	-	-	-	-	-	-	48	-0,75	32	2,5	16	0
180	-	-	-	-	-	-	-	-	50	0,75	34	2,5	16	5
190	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	2,5	18	0
200	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	2,5	18	5

Uwaga. *x* – przesunięcie wyjściowego konturu szyny, *f* = 0,1 m – wartość fazowania.

Tabela D.16. Rekomendowane wartości przełożenia różnych przekładni

Przekładnia	u	
	Zamknięta	Otwarta
Zębata jednostopniowa		
cylindryczna	2 ÷ 6,3	3 ÷ 6,3
stożkowa	2 ÷ 4	–
Zębata dwustopniowa		
cylindryczna	6,3 ÷ 40	–
Planetarna		
jednorzędowa	3,15 ÷ 6,3	–
rozdwojona	6,3 ÷ 18	–
Ślimakowa zamknięta	8 ÷ 60	–
Łańcuchowa	2 ÷ 6	–
Pasowa		
płaska	–	2 ÷ 4
klinowa	–	2 ÷ 5
wieloklinowa	–	2 ÷ 8

Tabela D.17. Przybliżone wartości sprawności

Przekładnia, złożenie	Sprawność	
	Zamknięta	Otwarta
Zębata jednostopniowa		
cylindryczna	0,96 ÷ 0,98*	0,93 ÷ 0,95
stożkowa	0,95 ÷ 0,97*	0,92 ÷ 0,94
Planetarna		
jednorzędowa	0,9 ÷ 0,95*	–
rozdwojona	0,85 ÷ 0,92*	–
Falowa	0,8 ÷ 0,92*	–
Ślimakowa	0,95(1-i/200)*	–
Pasowa	0,97*	0,92 ÷ 0,95*
Płaska, wieloklikowa	–	0,97*
Klinowo-pasowa	–	0,96*
Z łożyskiem tocznym	0,99 ÷ 0,995	
Z łożyskiem ślizgowym	0,98 ÷ 0,99	
Złączka	0,98	

Uwaga. \* – wartości z uwzględnieniem strat w podporach.

Tabela D.18. Silniki elektryczne asynchroniczne 4A zamkniętego typu (PN-M-88561:1987)

Moc, kW	Synchroniczna prędkość obrotowa, ob./min											
	3000			1500			1000			750		
	Rozmiar	s, %	$\frac{T_r}{T_z}$	Rozmiar	s, %	$\frac{T_r}{T_z}$	Rozmiar	s, %	$\frac{T_r}{T_z}$	Rozmiar	s, %	$\frac{T_r}{T_z}$
0,5	63B2	8,5	2,0	71A4	7,3	2,0	71B6	10	2,0	80B8	9	1,6
0,7	71A2	5,9		71B4	7,5		80A6	8,4		90LA8	8,4	
1,1	71B2	6,3		80A4	5,4		80B6	8,0		90LB8	7,0	
1,5	80A2	4,2		80B4	5,8		90L6	6,4		100L8	7,0	
2,2	80B2	4,3		90L4	5,1		100L6	5,1		112MA8	6,0	1,8
3,0	90L2	4,3		100S4	4,4		112MA6	4,7		112M8	5,8	
4,0	100S2	3,3		100L4	4,7		112MB6	5,1		132S8	4,1	
5,5	100L2	3,4		112M4	3,7		132S2	3,3		132M8	4,1	1,4
7,5	112M2	2,5		132S4	3,0		132M6	3,2		160S8	2,5	
11,0	132M2	2,3		132M4	2,8		160S6	2,7		160M8	2,5	
15	160S2	2,1	1,4	160S4	2,3	1,4	160M6	2,6	1,2	180M8	2,5	1,2
18,5	160M2	2,1		160M4	2,2		180M6	2,7		200M8	2,3	
22	180S2	2,0		180S4	2,0		200M6	2,8		200L8	2,7	
30	180M2	1,9		180M4	1,9		200L6	2,1		225M8	1,8	
37	200M2	1,9		200M4	1,7		225M6	1,8		250S8	1,5	

Uwaga 1. Przykład oznaczenia silnika elektrycznego o mocy 11 kW, synchroniczna prędkość obrotowa 1500 ob./min

*Silnik elektryczny 4A132M4U3*

Uwaga 2. Wartości symboli w oznaczeniach: liczba 4 wskazuje numer seryjny; litera A – silnik asynchroniczny, wartości po literze – wysokość osi obrotu, mm; litery L, S i M wartości nastawienia po długości; liczby 2, 4, 6 i 8 określają liczbę biegunów. Ostatnie dwa symbole U3 pokazują, że silnik jest przeznaczony do pracy w klimacie umiarkowanym.

Uwaga 3. W kolumnie s wskazano poślizg w %; w kolumnie  $T_r/T_z$  podano stosunek wartości obrotowego momentu rozruchu do obrotowego momentu znamionowego.

Tabela D.19. Własności mechaniczne wybranych gatunków stali, stosowanych do produkcji kół zębatach o twardości < HB 350

Gatunek stali	Średnica wsadu, mm	Granica wytrzymałości $R_m$ , MPa	Granica plastyczności $R_e$ , MPa	Twardość HB	Obróbka cieplna
C35	do 100	510	270	140 ÷ 187	Normalizacja
	100÷300	590	260		
	300÷500	470	240		
	500÷750	450	230		
C40	do 100	550	280	152 ÷ 207	
	100÷300	530	270		
	300÷500	510	260		
	500÷700	490	250		
C45	do 100	590	300	167 ÷ 217	
	100÷300	570	290		
	300÷500	550	280		
	500÷700	530	270		
C45	40÷60	780÷880	540	223 ÷ 250	Ulepszanie
	60÷90	730÷830	440	207 ÷ 236	
	90÷120	680÷780	390	194 ÷ 222	
	180÷250	640÷740	340	180 ÷ 207	
C50	do 100	610	320	180 ÷ 229	Normalizacja
	100÷300	590	300		
C50	300÷500	570	290	258 ÷ 310	Ulepszanie
	do 200	790	540		
C55	do 100	650	330	185 ÷ 229	Normalizacja
	100÷300	630	320		
	300÷500	610	310		
30HGS	do 60	980	840	215 ÷ 229	Normalizacja
	100÷160	890	690		
	160÷250	790	640		
35H	do 60	940	740	190 ÷ 241	Normalizacja
	60÷100	740	490		
	100÷200	690	440		
40H	do 60	980	790	200 ÷ 230	Normalizacja
	100÷200	760	490		
	200÷300	740	490		
	300÷600	690	440		
40H	do 120	880÷980	690	257 ÷ 285	Ulepszanie
	120÷150	830÷930	590	243 ÷ 271	
	150÷180	780÷880	540	230 ÷ 257	
	180÷250	730÷830	490	215 ÷ 243	
40HN	do 60	980	790	220 ÷ 250	Normalizacja
	60÷100	840	590		

Gatunek stali	Średnica wsadu, mm	Granica wytrzymałości $R_m$ , MPa	Granica plastyczności $R_e$ , MPa	Twardość HB	Obróbka cieplna
	100÷300 300÷500	790 740	570 550		
40HN	do 150 150÷180 180÷250	880 ÷ 980 830 ÷ 930 790 ÷ 880	690 590 540	265 ÷ 295 250 ÷ 280 235 ÷ 265	Ulepszanie
Odlewane ze stali węglowej i stopowej					
L35 L40 L45 L50 L55 L40G	- - - - - -	490 520 540 570 590 630	270 290 310 330 340 320	≥ 145 ≥ 147 ≥ 153 ≥ 174 155-217 ≥ 174	Normalizacja
L35G L35HGS L35HN L40G2	- - - -	590 790 690 630	340 590 490 320	≥ 174 ≥ 202 219 ÷ 269 190 ÷ 225	Ulepszanie

Tabela D.20. Własności mechaniczne wybranych gatunków stali stosowanych do produkcji kół zębatach o twardości HB ≥ 350

Gatunek stali	Obróbka cieplna	Twardość powierzchni zęba HRC	Charakterystyki mechaniczne materiału zęba	
			$R_m$	$R_e$
			MPa	
C20 20G 12HN2 15H 18HGT 20H	Nawęglanie	58 ÷ 63 58 ÷ 63 56 ÷ 58 58 ÷ 63 58 ÷ 60 54 ÷ 62	410 450 780 690 980 780	240 270 590 490 830 640
C40 C45 C50 40H 40HN	Hartowanie powierzchniowe	38 ÷ 52 45 ÷ 55 50 ÷ 57 50 ÷ 55 51 ÷ 57	550 590 620 740 790	270 330 340 490 490
38HA 38HMA	Azotowanie	50 ÷ 65 50 ÷ 65	880 980	740 830
35H 40H 40HN	Azotonawęglanie	48 ÷ 55 48 ÷ 56 50 ÷ 54	830 880 900	590 640 690

Tabela D.21. Znormalizowane wymiary liniowe (ISO 286-1:2010), mm

Rzędy					Rzędy					Rzędy				
Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	In.	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	In.	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	In.
10	10	10	10	10.2	40~	40	40	40	41	160	160	160	160	165
-	-	-	10.5	10.8	-	-	-	42	44	-	-	-	170	175
-	-	11	11	11	-	-	45	45	46	-	-	180	180	185
-	-	-	11.5	11.8	-	-	-	48	49	-	-	-	190	195
-	12	12	12	12.5	-	50	50	50	52	-	200	200	200	205
-	-	-	13	13.5	-	-	-	53	55	-	-	-	210	215
-	-	14	14	14.5	-	-	56	56	58	-	-	220	220	230
-	-	-	15	15.5	-	-	-	60	62	-	-	-	240	240
16	16	16	16	16.5	63	63	63	63	65	250	250	250	250	270
-	-	-	17	17.5	-	-	-	67	70	-	-	-	260	290
-	-	18	18	18.5	-	-	71	71	73	-	-	280	280	310
-	-	-	19	19.5	-	-	-	75	78	-	-	-	300	315
-	20	20	20	20.5	-	80	80	80	82	-	320	320	320	330
-	-	-	21	21.5	-	-	-	85	86	-	-	-	340	350
-	-	22	22	23	-	-	90	90	92	-	-	360	360	370
-	-	-	24	24	-	-	-	95	98	-	-	-	380	390
25	25	25	25	27	100	100	100	100	102	400	400	400	400	410
-	-	-	26	26	-	-	-	105	108	-	-	-	420	440
-	-	28	28	29	-	-	110	110	112	-	-	450	450	460
-	-	-	30	31	-	-	-	120	115	-	-	-	480	490
-	32	32	32	33	-	125	125	125	118	-	500	500	500	515
-	-	-	34	35	-	-	-	130	135	-	-	-	530	545
-	-	36	36	37	-	-	140	140	145	-	-	560	560	580
-	-	-	38	39	-	-	-	150	155	-	-	-	600	615

Uwaga. Przy wyborze rozmiarów należy preferować rzędy o większej gradacji ( rząd Ra5), preferowany powinien być rząd Ra10 td. Wybierając rozmiary większe niż 600, wartość Ra powinna być pobierana z tych samych wierszy, ale o rząd wielkości wyższa Na przykład: obliczona wartość wynosi 73,5 mm przy użyciu tabeli, bierzemy wartość z wiersza Ra 20 – 71 mm.

Tabela D.22. Zalecane kombinacje gatunków stali dla zębniaka i koła zębatego przy twardości poniżej HB 350

Zębniak	Koło zębate	Zębniak	Koło zębate	Zębniak	Koło zębate
C45	C35 L35 L40 C40 C45	50G	C45 L50 L55 50G (S315)	30HGS	35H 40H L40G
C50	C35 L45 (S275)				
C55	C45 L55 (S315)	35H albo 40H	C50 C55 L55 L35G L40G	40HN	35H 40H L55 L40G

Tabela D.23. Wartości współczynnika szerokości koła zębatego względem odległości międzyosiowej  $\Psi_a$  (ISO 6336-1:2019)

$\Psi_a$	0,1	0,125	0,16	0,2	0,25	0,315	0,4	0,5	0,63	0,8	1,0	1,25
Przekładnie o prostych zębach	$\Psi_a = 0,125 \div 0,25$											
Przekładnie o zębach skośnych	$\Psi_a = 0,25 \div 0,4$											
Przekładnie szewronowe	$\Psi_a = 0,5 \div 1,25$											

Tabela D.24. Wartości modułu przekładni ewolwentowych (PN-ISO 54:2001)

Moduł $m_n$ , mm											
rząd 1	0,5	0,6	0,8	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	
rząd 2	0,55	0,7	0,9	1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	
rząd 1	5,0	6,0	8,0	10,0	12,0	16,0	20,0	25	32	40	
rząd 2	5,5	7,0	9,0	11,0	14,0	18,0	22,0	28	36	45	

Uwaga. Preferowane są wartości rzędu drugiego.

Tabela D.25. Wartości współczynnika nierównomiernego rozkładu obciążenia po długości zęba,  $K_{H\beta}$ ,  $K_{F\beta}$

$T_{bd} = \frac{b}{d_1}$	Przy twardości zębniaka albo koła < 350HB			Przy twardości zębniaka i koła > 350HB		
	I	II	III	I	II	III
0,2	1,08	1,01	1,00	1,10	1,02	1,00
0,4	1,22	1,05	1,02	1,24	1,06	1,02
0,6	1,40	1,08	1,03	1,46	1,10	1,04
0,8	1,70	1,12	1,05	1,80	1,15	1,07
1,0	2,03	1,17	1,09	2,10	1,23	1,10
1,2	-	1,22	1,11	-	1,36	1,14

Uwaga. I – wspornikowy układ kół zębatych; II – niesymetryczny układ; III – symetryczny układ;  $T_{bd}$  – współczynnik stosunku szerokości koła do jego średnicy

Tabela D.26. Wartości odległości międzyosiowej cylindrycznych przekładni zębatych (ISO 6336-1:2019)

Odległość międzyosiowa $a_w$ , mm										
rząd 1	40	50	63	80	100	125	160	200	250	315
rząd 2	-	-	71	90	112	140	180	225	280	355
rząd 1	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	-
rząd 2	450	560	710	900	1120	1400	1800	2240	-	-

Uwaga. Preferowane są wartości rzędu drugiego.

Tabela D.27. Wartości współczynników  $K_{H\alpha}$  i  $K_{F\alpha}$  dla przekładni o skośnych zębach i szewronowych

Stopień dokładności	Prędkość kołowa $V$ , m/s				
	<1	5	10	15	20
6	1	1,02	1,03	1,04	1,05
7	1,2	1,05	1,07	1,10	1,12
8	1,06	1,09	1,13	—	—
9	1,1	1,16	—	—	—

Uwaga. Dla kół o prostych zębach  $K_H, K_{F\alpha} = 1$ .

Tabela D.28. Wartości współczynnika  $K_{Hv}$

Przekładnia	Twardość $HB$ Powierzchni zębów	Prędkość kołowa $V$ , m/s			
		< 5	10	15	20
		Stopień dokładności			
		8		7	
O prostych zębach	$\leq 350$	1,05	—	—	—
	$> 350$	1,10	—	—	—
O skośnych zębach i szewronowa	$\leq 350$	1,0	1,01	1,02	1,05
	$> 350$	1,0	1,05	1,07	1,10

Tabela D.29. Wartości współczynników kształtu zęba  $Y_F$  dla niekorygowanego za-czepienia zewnętrznego (ISO 6336:2019)

z albo $z_e$	17	20	25	30	40	50	60	70	80	powyżej 100
$Y_F$	4,28	4,09	3,90	3,80	3,70	3,66	3,62	3,61	3,61	3,60

Tabela D.30. Wartości współczynnika  $K_{Fv}$

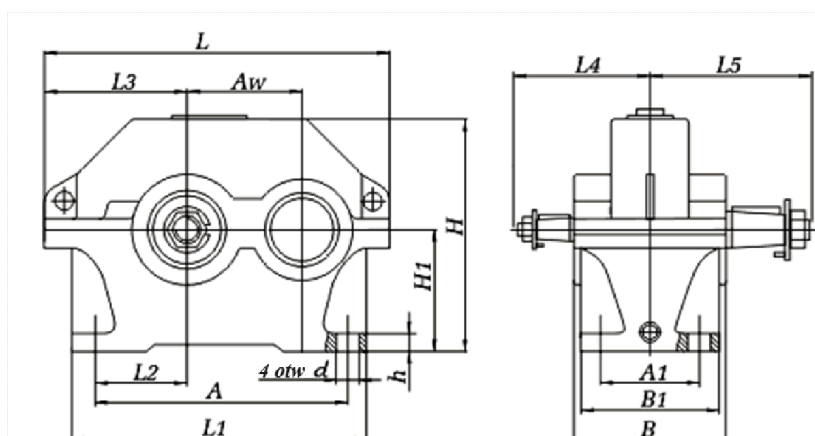
Stopień dokładności	Twardość $HB$ powierzchni zębów	Prędkość kołowa $V$ , m/s		
		3	3-8	8-12,5
6	$\leq 350$	1/1	1,2/1	1,3/1,1
	$> 350$	1/1	1,15/1	1,25/1
7	$\leq 350$	1,15/1	1,35/1	1,45/1,2
	$> 350$	1,15/1	1,25/1	1,35/1,1
8	$\leq 350$	1,25/1,1	1,45/1,3	-/1,4
	$> 350$	1,2/1,1	1,35/1,2	-/1,3

Uwaga. Licznik zawiera wartość  $K_F$  dla przekładni o prostych zębach. mianownik — dla przekładni o skośnych zębach.



Tabela D.31. Podstawowe techniczne charakterystyki przekładni cylindrycznej jednostopniowej

Charakterystyka techniczna		Typ przekładni			
		1CU-100	1CU-160	1CU-200	1CU-250
Przełożenie		2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3			
Dopuszczalne promieniowe obciążenie wspornika, N	na wale szybkobieżnym	630	1250	2800	4000
	na wale cichobieżnym	2240	4500	6300	9000
Znamionowy moment obrotowy na wale cichobieżnym, N·m		315	1250	2500	5000
Prędkość obrotowa wału szybkobieżnego (nie więcej), min <sup>-1</sup>		1500			
Sprawność		0,98			
Masa, kg		27	78	135	250



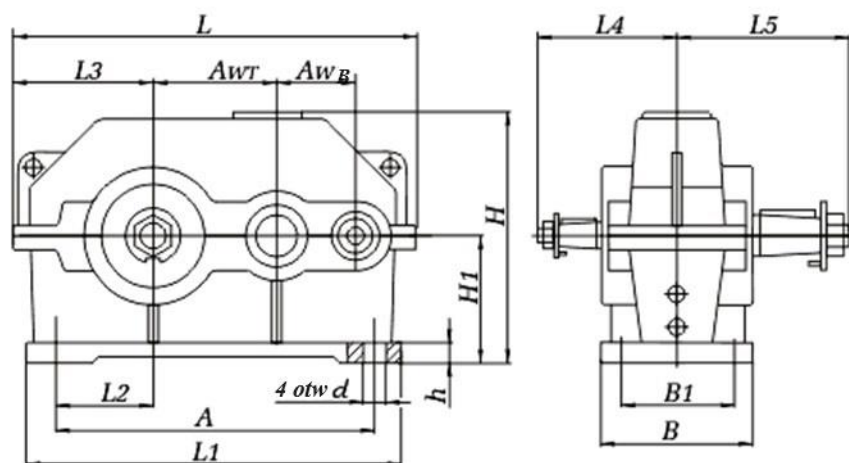
Rys. D.6. Przekładnia cylindryczna jednostopniowa 1CU

Tabela D.32. Wymiary gabarytowe i przyłączeniowe przekładni 1CU

Przekładnia	$A_w$	$A$	$A_1$	$B$	$B_1$	$H$	$H_1$	$h$	$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$d$
1CU-100	100	224	95	140	132	224	112	22	315	265	85	132	136	155	15
1CU-160	160	355	125	185	175	335	170	28	475	405	136	195	218	218	24
1CU-200	200	437	165	212	200	425	212	36	670	580	165	236	230	265	24
1CU-250	250	545	185	265	250	530	265	40	710	615	212	290	280	315	28

Tabela D.33. Cylindryczne przekładnie dwustopniowe

Charakterystyka techniczna		Typ przekładni				
		1C2U-100	1C2U-125	1C2U-160	1C2U-200	1C2U-250
Przełożenie		8; 10; 12,5; 16; 20; 25; 31,5; 40				
Dopuszczalne promieniowe obciążenie wspornika, N	na wale szybkobieżnym	500	750	1000	2240	3150
	na wale cichobieżnym	4500	6300	9000	12500	18000
Znamionowy moment obrotowy na wale cichobieżnym, Nm		315	630	1250	2500	5000
Prędkość obrotowa wału szybkobieżnego (nie więcej), min <sup>-1</sup>		1500				
Sprawność		0,97				
Masa, kg		20	32	95	170	320



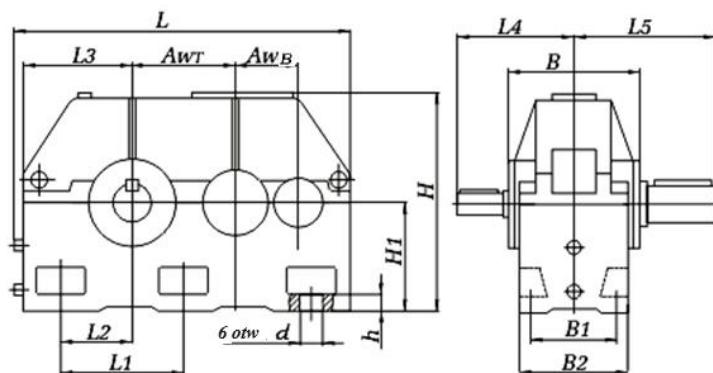
Rys. D.7. Cylindryczna przekładnia dwustopniowa 1C2U

Tabela D.34. Wymiary gabarytowe i przełączeniowe przekładni 1C2U

Przekładnia	$A_{WT}$	$A_{WB}$	$A_1$	$B$	$B_1$	$H$	$H_1$	$h$	$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$d$
1C2U-100	100	80	290	145	109	225	112	20	386	325	85	132	136	165	15
1C2U-125	125	80	335	165	125	270	132	22	440	375	106	155	145	206	19
1C2U-160	160	100	425	195	140	335	170	24	545	475	135	195	170	224	24
1C2U-200	200	125	515	230	165	420	212	30	670	580	165	236	212	280	24
1C2U-250	250	160	670	280	218	515	265	32	825	730	212	290	265	335	28

Tabela D.35. Cylindryczne przekładnie dwustopniowe (z odległością międzyosiową stopnia cichobieżnego do 500 mm)

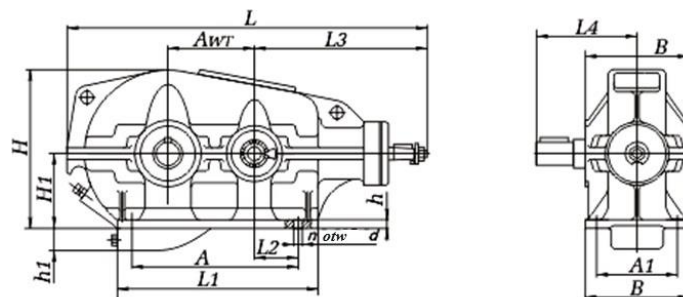
Charakterystyka techniczna		Typy przekładni				
		1C2U-315	1C2U-355	1C2U-400	1C2U-450	1C2U-500
Przełożenie		8; 10; 12,5; 16; 20; 25; 31,5; 40;50				
Dopuszczalne promieniowe obciążenie wspornika, N	na wale szybkobieżnym	3500	4200	4800	8200	10000
	na wale cichobieżnym	30000	40000	45000	71000	10000
Znamionowy moment obrotowy na wale cichobieżnym, Nm		14000	20000	28000	40000	56000
Prędkość obrotowa wału szybkobieżnego (nie więcej), min <sup>-1</sup>		1500				
Sprawność		0,98			0,97	
Masa, kg		510	700	930	1530	2090



Rys. D8. Cylindryczne przekładnie dwustopniowe 1C2Y, 1C2N

Tabela D.36. Wymiary gabarytowe i przyłączeniowe przekładni 1C2U

Przekładnia	$A_{WT}$	$A_{WB}$	$A_1$	$B$	$B_1$	$H$	$H_1$	$h$	$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$d$
1C2U-315	315	200	395	260	318	685	335	35	1030	370	215	360	300	420	28
1C2U-355	355	225	435	280	360	740	375	35	1160	425	250	400	320	440	28
1C2U-400	400	250	475	330	420	835	425	42	1300	475	280	450	380	500	35
1C2U-450	450	280	630	515	590	955	475	50	1460	530	310	500	500	650	35
1C2U-500	500	315	700	580	650	1055	530	60	1650	615	360	565	530	690	42



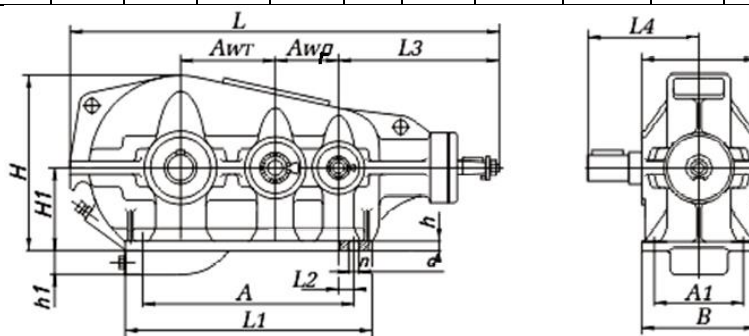
Rys. D.9. Przekładnie stożkowo-cylindryczne dwustopniowe typu KC1

Tabela D.37. Przekładnie stożkowo-cylindryczne dwustopniowe

Charakterystyka techniczna	Typy przekładni				
	KC1-200	KC1-250	KC1-300	KC1-400	KC1-500
Przełożenie	6,3; 10; 14; 20; 28				
Dopuszczalne promienne obciążenie wspornika, N	5100	7000	12000	18000	25000
Znamionowy moment obrotowy na wale cichobieżnym, Nm	520	1200	2100	5300	9000
Sprawność	0,94				
Masa, kg	186	391	474	980	1740

Tabela D.38. Wymiary gabarytowe i przyłączeniowe przekładni typu KC1

Przekładnia	$A_{wT}$	$A$	$A_1$	$B$	$H$	$H_1$	$h$	$h_1$	$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$d$	$n$
KC1-200	200	375	250	300	435	225	20	-	900	480	85	460	247	17	4
KC1-250	250	480	325	375	515	265	25	-	1170	600	120	625	320	22	4
KC1-300	300	545	350	450	607	315	25	-	1275	680	120	625	385	22	6
KC1-400	400	810	450	526	705	320	35	95	1705	930	212	848	452	26	8
KC1-500	500	990	550	630	877	400	40	100	2085	1160	250	1030	544	33	8



Rys. D.10. Stożkowo-cylindryczne przekładnie trzystopniowe typu KC2

Tabela D.39. Stożkowo-cylindryczne przekładnie trzystopniowe

Charakterystyka techniczna	Typy przekładni			
	KC2-500	KC2-750	KC2-1000	KC2-1300
Przełożenie	28; 45; 71; 112; 180			
Dopuszczalne promieniowe obciążenie wspornika, N	11500	1150	28000	75000
Znamionowy moment obrotowy na wale cichobieżnym, N · m	2300	6750	16500	37500
Sprawność	0,91			
Masa, kg	490	1240	2658	5100

Tabela D.40. Wymiary gabarytowe i przyłączeniowe stożkowo-cylindrycznej przekładni trzystopniowej

Przekładnia	$A_{WT}$	$A_{WP}$	$A$	$A_1$	$B$	$H$	$H_1$	$h$	$h_1$	$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$d$	$n$
KC2-500	300	200	705	300	350	600	315	25	-	1300	830	90	460	327	22	6
KC2-750	450	300	1120	470	550	765	335	35	130	1883	1260	120	625	464	33	10
KC2-1000	600	400	1530	600	690	956	400	40	200	2482	1700	165	848	615	33	10
KC2-1300	800	500	2020	740	850	1282	530	50	240	3178	2200	220	1030	790	39	10

Tabela D.41. Mechaniczne charakterystyki wybranych gatunków stali, stosowanych do produkcji wałów

Stal	Średnica półproduktu mm nie mniej	Twardość HB, nie mniej	$R_m$	$R_e$	$\tau_{pl}$	$R_{-1}$	$k_s$	Obrobka cieplna*
			MPa					
45	Dowolny	200	560	280	150	250	150	N
	120	240	800	550	300	350	210	N
	80	270	900	650	390	380	230	N
40H	Dowolny	200	730	500	280	320	200	N
	200	240	800	650	390	360	210	N
	120	270	900	750	450	410	240	N
40HN	Dowolny	240	820	650	390	360	210	N
	200	270	920	750	450	420	250	N
20H	120	240	850	630	240	420	240	Naw, H, ON
12HN3A	120	260	950	700	490	420	210	Naw, H, ON

Uwaga. \* przyjęte oznaczenia: N – normalizowanie; Naw – nawęglanie; H – hartowanie; ON – odpuszczanie niskie

Tabela D.42. Uśrednione wartości dopuszczalnych naprężeń dla wałów i osi, MPa

Materiał wału	$R_m$	$k_{0g}$	$k_{-1g}$
Stal węglowa	400	70	40
	500	75	45
	600	95	55
	700	110	65
Stal stopowa	800	130	75
	1000	150	90

Tabela D.43. Podstawowe wymiary cylindrycznych końców wałów (ISO/R 775:1969), mm

Średnica $d$ dla rzędu		Długość $l$ dla wykonania		$r_1$	$c$
1-go	2-go	1	2		
10, 11	-	23	20	0,6	0,4
12, 14	-	30	25	1,0	0,6
16, 18	19	40	28	1,0	0,6
20, 22	24	50	36	1,6	1,0
25, 28	-	60	42	1,6	1,0
32, 36	30, (35), 38	80	58	2,0	1,6
40, 45	42 48	110	82	2,0	1,6
50, 55	(52), (56)	110	82	2,5	2,0
60, 70	63, 65, (71), 75	140	105	2,5	2,0
80, 90	85,95	170	130	3,0	2,5
100, 110, 125	120	210	165	3,0	2,5
140	130, 150	250	200	4,0	3,0
160, 180	170	300	240	4,0	3,0
200, 220	190	350	280	5,0	4,0
250	240, 260	410	330	5,0	4,0
280, 320	300	470	380	5,0	4,0

Uwaga. W nawiasach podano nierekomendowane wartości

Tabela D.44. Wartości  $[p]$  i  $[p\nu]$  dla łożysk ślizgowych

Materiał wkładu	$\nu$ , m/s	$[p]$ , MPa	$[p\nu]$ , MPa·m/s	Zastosowanie
EN-GJL-HB200	2	0,05	0,1	Do pracy z zahartowanymi i normalizowanymi wałami
	0,2	9	1,8	
EN-GJL-HB250	3	0,1	0,3	
	0,75	6,0	4,5	
EN-GJL-HB300	3	0,1	0,3	Do pracy z niezahartowanymi wałami

Materiał wkładu	$v$ , m/s	$[p]$ , MPa	$[pv]$ , MPa·m/s	Zastosowanie
	0,75	6	4,5	
EN-GJS-400-15	5	0,5	2,5	Do pracy z zahartowanymi i normalizowanymi wałami
	1	12	12	
Żeliwo sferoidalne EN-GJS-500-7	5	0,5	2,5	Do pracy z niezahartowanymi wałami
	1	12	12	
CuSn10F1	10	15	15	Maszyny do cięcia metalu, pompy, urządzenia do walcowania, przekładnie
CuAl9Fe	8	15	12	
CuSn6Zn6Sn3	8	4 ÷ 6	4 ÷ 6	
CuSn30	10 ÷ 12	20	30 ÷ 90	Duże obciążenia zmienne, niedoskonałe smarowanie.
CuSn16Cd3Pb3	2	12	10	Dźwigi, kolej, koparki, kruszarki, wykładziny nośników żużla, nośniki żeliwne, wrzeciona maszyn do cięcia metalu
Babbitt B83, Babbitt B89	60	25	200 ÷ 100	Duże obciążenia. Turbiny parowe, maszyny elektryczne, turbosprężarki, napędy walcarek
Babbitt B16	6	15	10 ÷ 50	Duże obciążenia. Pompy odśrodkowe, skrzynie biegów, stojaki przekładniowe walcarek, maszyny do cięcia metalu, silniki elektryczne – o mocy 250 ÷ 750 kW, kompresory

Tabela D.45. Wartości współczynnika bezpieczeństwa  $K_b$  w zależności od charakteru obciążenia i zastosowania łożysk tocznych

Charakter obciążenia	$K_b$	Zastosowanie
Lekkie bicie; krótkoterminowe przeciążenia do 125% znamionowego (obliczonego) obciążenia	1,0 ÷ 1,2	Precyzyjne koła zębate. Maszyny do cięcia metalu (z wyjątkiem strugarek, dłutownic i szlifierek), hydroskopy. Dźwigowe mechanizmy podnoszące. Elektryczne wciągarki i wózki jednoszynowe. Wciągarki napędzane mechanicznie. Silniki elektryczne małej i średniej mocy. Lekkie wentylatory i dmuchawy.
Bicie umiarkowane; obciążenia wibracyjne; krótkoterminowe przeciążenia 150% znamionowego (obliczonego) obciążenia	1,2 ÷ 1,5	Przekładnie zębate. Przekładnie wszystkich typów. Maźnice dla taboru kolejowego. Mechanizmy do przemieszczania wózków i dźwigów. Mechanizmy do obracania żurawi, a także zmiany zasięgu wysięgnika. Wrzeciona szlifierek. Wrzeciona elektryczne. Koła samochodów, autobusów, motocykli, skuterów. Maszyny rolnicze.
To samo, w warunkach zwiększonej niezawodności	1,5 ÷ 1,8	Wirówki i separatory. Osie i silniki trakcyjne lokomotyw elektrycznych. Mechanizmy ruchu dźwigów. Koła samochodów ciężarowych, ciągników, traktorów, lokomotyw, dźwigów i maszyn drogowych. Maszyny elektryczne dużej mocy. Urządzenia elektroenergetyczne.

Charakter obciążenia	$K_b$	Zastosowanie
Obciążenia z istotnym biciem i wibracjami; przeciążenia 200% znamionowego (obliczonego) obciążenia	1,8 ÷ 2,5	Koła zębate. Kruszarki i koła zębate. Mechanizmy korbowe. Młyny kulowe i udarowe. Walcarki walcujące. Potężne wentylatory i wyciągi.
Obciążenia z mocnym biciem i krótkotermi-nowym przeciążeniem 300% znamionowego (obliczonego) obciążenia	2,5 ÷ 3,0	Ciężkie maszyny kuźnicze. Ramy tartaczne. Sprzęt chłodniczy. Robocze przenośniki rolkowe do ciężkich młynów sekcyjnych, blooming i slabbing. Młyny młotkowe, kruszarki.

Tabela D.46. Wartości współczynnika temperaturowego  $K_T$

Robocza temperatura łożyska °C	≤ 100	125	150	175	200	225	250	350
Współczynnik temperaturowy $K_T$	1,0	1,05	1,10	1,15	1,25	1,35	1,40	1,45

Uwaga. W temperaturze  $t > 120$  °C z powodu zmian strukturalnych w metalu niezbędne jest zastosowanie specjalnych materiałów do produkcji łożysk

Tabela D.47. Zalecane wartości podstawowej żywotności łożysk tocznych  $L_{10ah}$  dla różnych rodzajów maszyn

Typ maszyny i charakter pracy	$L_{10ah}$ , h
Urządzenia i mechanizmy używane okresowo, maszyny rolnicze, urządzenia gospodarstwa domowego	500 ÷ 4000
Mechanizmy używane przez krótki czas, dźwigi montażowe, maszyny budowlane	4000 ÷ 8000
Mechanizmy precyzyjne, które działają sporadycznie (mechanizmy pomocnicze w elektrowniach, przenośniki do produkcji przepływowej, windy, rzadko używane maszyny do obróbki metali).	8000 ÷ 12000
Maszyny do pracy jednoczynowej z częściowym obciążeniem (stacjonarne silniki elektryczne, przekładnie, kruszarki)	12000 ÷ 20000
Maszyny do pracy jednoczynowej z pełnym obciążeniem (maszyny do cięcia metalu, maszyny do obróbki drewna, sprzęt ogólnotechniczny, dźwigi, wentylatory, separatory, wirówki, sprzęt drukarski)	20000 ÷ 30000
Maszyny do użytku całodobowego (sprężarki, pompy, wyciągi kopalniane, stacjonarne maszyny elektryczne, napędy okrętowe, walcownie, maszyny włókiennicze)	40000 ÷ 50000
Elektrownie wodne, piece obrotowe, silniki okrętowe	60000 ÷ 100000
Maszyny pracujące w trybie ciągłym z dużymi obciążeniami (urządzenia papiernicze, elektrownie, pompy kopalniane, wały grzybkowe statków morskich)	100000



Tabela D.48. Wartości X i Y dla łożysk

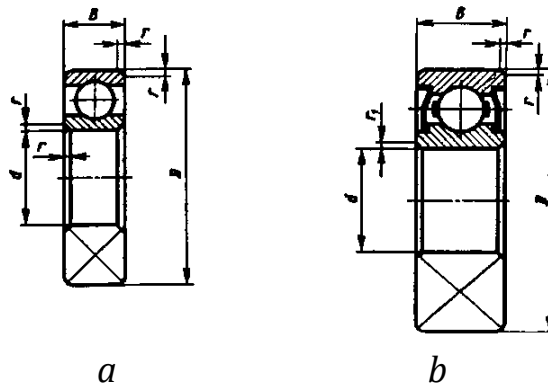
<i>Kulkowe promieniowe jedno- i dwurzędowe</i>													
$F_a/C_0$	$F_a/VF_r \leq e$				$F_a/VF_r \geq e$				$e$				
	X		Y		X		Y						
0,014	1	0	0,56							2,30	0,19		
0,028										1,99	0,22		
0,056										1,71	0,26		
0,084										1,55	0,28		
0,11										1,45	0,30		
0,17										1,31	0,34		
0,28										1,15	0,38		
0,42										1,04	0,42		
0,56										1,00	0,44		
<i>Rolkowe łożyska skośne, stożkowe i samoustawialne</i>													
jednorzędowe						dwurzędowe				$e$			
$F_a/VF_r \leq e$		$F_a/VF_r \geq e$		$F_a/VF_r \geq e$		$F_a/VF_r \leq e$							
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y						
1	0	0,4	$0,4 \cdot \text{ctg}\alpha$	1	$0,45 \cdot \text{ctg}\alpha$	0,67	$0,67 \cdot \text{ctg}\alpha$	$1,5 \cdot \text{tg}\alpha$					
<i>Kulkowe łożyska skośne</i>													
$\alpha$	$i \cdot F_a/C_0$	jednorzędowe				dwurzędowe				$e$			
		$F_a/VF_r \leq e$		$F_a/VF_r \geq e$		$F_a/VF_r \geq e$		$F_a/VF_r \leq e$					
		X	Y	X	Y	X	Y	X	Y				
12	0,014	1	0	0,45	1	1	0,74			1,81	2,08	2,94	0,30
	0,029									1,62	1,84	2,63	0,34
	0,057									1,46	1,60	2,37	0,37
	0,086									1,34	1,52	2,18	0,41
	0,11									1,22	1,39	1,98	0,45
	0,17									1,13	1,30	1,84	0,48
	0,29									1,04	1,20	1,69	0,52
	0,43									1,01	1,16	1,64	0,54
	0,57									1,00	1,16	1,62	0,54
15	0,015	1	0	0,44	1	1	0,72			1,47	1,65	2,39	0,38
	0,029									1,40	1,57	2,28	0,40
	0,058									1,30	1,46	2,11	0,43
	0,087									1,23	1,38	2,00	0,46
	0,12									1,19	1,34	1,93	0,47
	0,17									1,12	1,26	1,82	0,50
	0,29									1,02	1,14	1,66	0,55
	0,44									1,00	1,12	1,63	0,56
	0,58									1,00	1,12	1,63	0,56
18		1	0	0,43	1,00	1	0,70			0,02	1,63	0,57	
19										0,92			
$\alpha$	$i \cdot F_a/C_0$	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	$e$			
24				0,41	0,87			0,67	1,44	0,68			
25													
26													
30													
35, 36											0,39	0,76	0,78
40	0,37	0,66	0,66	0,60	1,07	0,95							
	0,35	0,57	0,55	0,57	0,93	1,14							

Uwaga.  $i$  – liczba rzędów ciał tocznych

Tabela D.49. Zalecenia doboru promieniowych łożysk kulkowych

Stosunek $F_a/F_{rmax}$	Oznaczenie i kąt styku	Osiowa składowa obciążeniowa promieniowego $S$ w ułamkach od $F_{rmax}$	Uwaga
0,35 ÷ 0,8	36000; $\alpha = 12^\circ$	0,3 $F_{rmax}$	Dopuszcza się stosowanie serii lekkiej i ponadlekkiej Przy bardzo wysokich prędkościach przeważnie seria lekka Dla wysokich prędkości łożysko z podanym kątem styku jest nieodpowiednie
0,81 ÷ 1,2	46000; $\alpha = 26^\circ$	0,6 $F_{rmax}$	
od 1,2	66000; $\alpha = 36^\circ$	0,9 $F_{rmax}$	

Uwaga. Przy  $F_a/F_{rmax} < 0,35$  stosuje się jednorzędowe promieniowe łożyska kulkowe



Rys. D.11. Łożyska kulkowe promieniowe jednorzędowe:

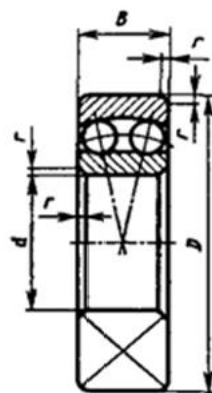
*a* – 100-200-300-400 (ISO 5753:2009); *b* – 80100-80200 (ISO 5753:2009)

Tabela D.50. Łożyska kulkowe promieniowe jednorzędowe (ISO 5753:2009), mm

Oznaczenia	$d$	$D$	$B$	$r$	Nośność, kN		$n_{gran}$ , tys. $min^{-1}$	
					Dyna- miczna, $C$	Statyczna, $C_0$		
<b>Seria bardzo lekka</b>								
105	—	25	47	12	1,0	11,2	5,6	10
106	—	30	55	13	1,5	13,3	6,8	10
107	—	35	62	14	1,5	15,9	8,5	8
108	80108	40	68	15	1,5	16,8	9,3	8
109	—	45	75	16	1,5	21,2	12,2	8
110	—	50	80	16	1,5	21,6	13,2	8
111	—	55	90	18	2	28,1	17	8
112	—	60	95	18	2	29,6	18,3	8
113	—	65	100	18	2	30,7	19,6	3,3
114	—	70	110	20	2	37,7	24,5	6,3
115	—	75	115	20	2	39,7	26,0	5
116	—	80	125	22	2	47,7	31,5	5

Oznaczenia		$d$	$D$	$B$	$r$	Nośność, kN		$n_{gran}$ , tys. min <sup>-1</sup>
						Dyna- miczna, $C$	Statyczna, $C_0$	
117	—	85	130	22	2	49,4	33,5	5
118	—	90	140	24	2,5	57,2	39,0	4
119	—	95	145	24	2,5	60,5	41,5	4
120	—	100	150	24	2,5	60,5	41,5	4
<b>Seria lekka</b>								
205	—	25	52	15	1,5	14,0	6,95	12,5
206	—	30	62	16	1,5	19,5	10,0	12,5
207	—	35	72	17	1,5	25,5	13,7	10
208	80208	40	80	18	2	32,0	17,8	10
209	80209	45	85	19	2	33,2	18,6	8
209A	—	45	85	19	2	36,4	20,1	8
210	—	50	90	20	2	35,1	19,8	8
211	—	55	100	21	2,5	43,6	25,0	6,3
212	80212	60	110	22	2,5	52,0	31,0	6,3
213	80213	65	120	23	2,5	56,0	34,0	5
214	—	70	125	24	2,5	61,8	37,5	5
215	80215	75	130	25	2,5	66,3	41,0	5
216	—	80	140	26	3	70,2	45,0	5
217	—	85	150	28	3	83,2	53,0	5
217A	—	85	150	28	3	89,5	56,5	5
218	80218	90	160	30	3	95,6	62,0	4
219	—	95	170	32	3,5	108,0	69,5	4
219A	—	95	170	32	3,5	115,0	74,0	4
220	80220	100	180	34	3,5	124,0	79,0	4
<b>Seria średnia</b>								
305	—	25	62	15	2	22,5	11,4	10
306	—	30	72	17	2	28,1	14,6	8
307	—	35	80	19	2	33,2	18,0	8
308	—	40	90	23	2,5	41,0	22,4	8
309	—	45	100	25	2,5	52,7	30,0	6,3
310	—	50	110	27	3	65,8	36,0	6,3
311	—	55	120	29	3	71,5	41,5	6,3
312	—	60	130	31	3,5	81,9	48,0	5
313	—	65	140	33	3,5	92,3	56,0	5
314	—	70	150	35	3,5	104,0	63,0	5
315	—	75	160	37	3,5	112,0	72,5	4
316	—	80	170	39	3,5	124,0	80,0	4
316K5	—	80	170	39	3,5	130,0	89,0	4
317	—	85	180	41	4	133,0	90,0	4
318	—	90	190	43	4	143,0	99,0	3,2
319	—	95	200	45	4	153,0	110	3,2
319K5	—	95	200	45	4	161,0	120,0	3,2
320	—	100	215	47	4	174,0	132,0	3,2
<b>Seria ciężka</b>								
405	—	25	80	21	2,5	36,4	20,4	8
406	—	30	90	23	2,5	47,0	26,7	6,3

Oznaczenia	$d$	$D$	$B$	$r$	Nośność, kN		$n_{gran}$ , tys. min <sup>-1</sup>
					Dyna- miczna, $C$	Statyczna, $C_0$	
407	35	100	25	2,5	55,3	31,6	6,3
408	40	110	27	3	63,7	36,5	6,3
409	45	120	29	3	76,1	45,5	6,3
410	50	130	31	3,5	87,1	52,0	5
411	55	140	33	3,5	100,0	63,0	5
412	60	150	35	3,5	108,0	70,0	4
413	65	160	37	3,5	119,0	78,1	4
414	70	180	42	4	143,0	105,0	4
415	75	190	45	4	155,0	115,0	4
416	80	200	48	4	163,0	125,0	4
417	85	210	52	5	174,0	135,0	4

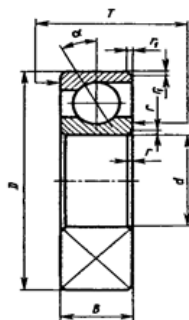


Rys. D.12. Łożyska kulkowe promieniowe sferyczne dwurzędowe (ISO 15:1998)

Tabela D.51. Parametry łożysk kulkowych promieniowych sferycznych dwurzędowych (ISO 15:1998)

Oznaczenie	$d$	$D$	$B$	$r$	Nośność, kN		$e$	$Y^*$	$Y_0$	$n_{gran}$ , tys. min <sup>-1</sup>
					$C$	$C_0$				
<b>Lekka seria wąska</b>										
1208	40	80	18	2	19,0	8,55	0,22	2,87/4,44	3,01	10
1209	45	85	19	2	21,6	9,65	0,21	2,97/4,6	3,11	8
1210	50	90	20	2	22,9	10,8	0,21	3,13/4,85	3,28	8
1211	55	100	21	2,5	26,5	13,3	0,2	3,23/5,0	3,39	6,3
1212	60	110	22	2,5	30,2	15,5	0,19	3,41/5,27	3,57	6,3
1213	65	120	23	2,5	31,2	17,2	0,17	3,71/5,73	3,68	5
1214	70	125	24	2,5	34,5	18,7	0,18	3,51/5,43	3,88	5
1215	75	130	25	2,5	39,0	21,5	0,18	3,6/5,57	3,77	5
1216	80	140	26	3	39,7	23,5	0,16	3,94/6,11	4,13	5
1217	85	150	28	3	48,8	28,5	0,17	3,69/5,71	3,87	4
1218	90	160	30	3	57,2	32,0	0,17	3,76/5,82	3,94	4
1220	100	180	34	3,5	63,7	37,0	0,17	3,68/5,69	4,81	3,2
<b>Średnia seria wąska</b>										

Oznaczenie	$d$	$D$	$B$	$r$	Nośność, kN		$e$	$Y^*$	$Y_0$	$n_{gran}$ , tys. min <sup>-1</sup>
					$C$	$C_0$				
1305	25	62	17	2,0	17,8	6,0	0,28	2,26/3,49	3,36	8
1306	30	72	19	2,0	21,2	7,7	0,26	2,46/3,8	2,58	8
1307	35	80	21	2,5	25,1	9,8	0,25	2,57/3,98	2,69	8
1308	40	90	23	2,5	29,6	12,2	0,24	2,61/4,05	2,74	8
1309	45	100	25	2,5	37,7	15,9	0,24	2,54/3,93	2,66	6,3
1310	50	110	27	3	43,6	17,5	0,24	2,69/4,14	2,8	6,3
1311	55	120	29	3	50,7	23,5	0,23	2,7/4,17	2,82	5
1312	60	130	31	3,5	57,2	26,5	0,23	2,8/4,83	2,93	5
1313	65	140	33	3,5	61,8	29,5	0,23	2,79/4,31	2,92	5
1314	70	150	35	3,5	74,1	35,5	0,22	2,81/4,35	2,95	4
1315	75	160	35	3,5	79,3	38,5	0,22	2,84/4,39	2,97	4
1316	80	170	37	3,5	88,4	42,0	0,22	2,92/4,52	3,06	4
1317	85	180	41	4	97,5	48,5	0,22	2,90/4,49	3,04	4
<b>Średnia szeroka seria</b>										
1608	40	90	33	2,5	44,9	15,7	0,43	1,46/2,25	1,52	6,3
1609	45	100	36	2,5	54,0	19,4	0,42	1,51/2,33	1,58	6,3
1610	50	110	40	3	67,7	23,6	0,43	1,48/2,29	1,55	5
1611	55	120	43	3	76,1	28,0	0,41	1,53/2,36	1,6	5
1612	60	130	46	3,5	87,1	33,0	0,4	1,56/2,41	1,63	4
1613	65	140	48	3,5	95,6	38,5	0,38	1,65/2,55	1,73	4
1614	70	150	51	3,5	111,1	44,5	0,38	1,68/2,59	1,76	4
1616	80	170	58	3,5	135,0	58,0	0,37	1,68/2,61	1,76	3,2



Rys. D.12. Łożyska kulkowe promieniowo-oporowe jednorzędowe (ISO 492:2014)

Tabela D.52. Parametry łożysk kulkowych promieniowo-oporowych jednorzędowych (ISO 492:2014)

Oznaczenie	$d$	$D$	$B$	$T$	$r$	$r_1$	Nośność, kN		$n_{gran}$ , tys.min <sup>-1</sup>
							$C$	$C_0$	
<b>Lekka seria wąska <math>\alpha = 12^\circ</math></b>									
36208	40	80	18	18	2	1	38,0	23,2	10
36209	45	85	19	19	2	1	31,2	25,1	8
36210	50	90	20	20	2	1	43D	27,0	8

36211	55	100	21	21	2,5	1,2	58,4	34,2	8
36212	60	110	22	22	2,5	1,2	61,5	39,3	6,3
36214	70	125	24	24	2,5	1,2	80,2	54,8	5
36216	80	140	26	26	3	1,5	93,6	65,0	5
36217	85	150	28	28	3	1,5	101,0	70,8	4
36218	90	160	30	30	3	1,5	118,0	83,0	4
36219	95	170	32	32	3,5	2	134,0	95,0	4
<b>Średnia seria wąska <math>\alpha = 26^\circ</math></b>									
46308	40	90	23	-	2,5	1,2	50,8	31,1	6,3
6309	45	100	25	-	2,5	1,2	61,4	37,0	5
46310	50	110	27	-	3	1,5	71,8	44,0	5
46312	60	130	31	-	3,5	2	100,0	65,3	5
46313	65	140	33	-	3,5	2	113,0	75,0	4
46314	70	150	35	-	3,5	2	127,0	85,3	3,2
46316	80	170	39	-	3,5	2	136,0	99,0	3,2
46318	90	190	43	-	4	2	165,0	122,0	2,5
46320	10 0	215	47	-	4	2	213,0	177,0	2,5
<b>Ciężka seria wąska <math>\alpha = 36^\circ</math></b>									
66408	40	110	27		3	1,5	72,2	42,3	5
66409	45	120	29		3	1,5	81,6	47,3	5
66410	50	130	31		3,5	2	98,9	60,1	3,2
66412	60	150	35		3,5	2	125,0	79,5	2,5
66414	70	180	42		4	2	152,0	109,0	1,6
66418	90	225	54		5	2,5	208,0	162,0	1,25

Tabela D.53. Korygujący współczynnik niezawodności  $a_1$

Niezawodność $S\%$	90	95	96	97	98	99
Oznaczenie zasobów	$L_{10a}$	$L_{5a}$	$L_{4a}$	$L_{3a}$	$L_{2a}$	$L_{1a}$
$a_1$	1	0,62	0,53	0,44	0,33	0,21

Tabela D.54. Korygujący współczynnik materiału i smaru  $a_{23}$  (średnia wartość)

Typ łożyska	Warunki pracy		
	1	2	3
Kulkowe (oprócz sferycznych)	0,75	1,0	1,3
Rolkowe stożkowe	0,65	0,9	1,2
Rolkowe cylindryczne i kulkowe sferyczne	0,55	0,8	1,1
Rolkowe sferyczne	0,35	0,6	0,9

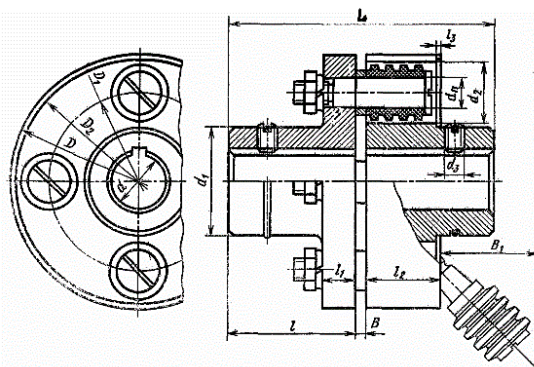
Uwaga. 1 – zwykle warunki pracy (tryb smarowania hydrodynamicznego nie jest gwarantowany, konwencjonalny materiał elementów łożyska, przy konwencjonalnej technologii produkcji, niewielkie odkształcenie pierścieni), 2 – gwarantowane jest smarowanie hydrodynamiczne i niewielkie zniekształcenia pierścienia, 3 – te same warunki smarowania i zastosowanie stali wysokiej jakości (elektrożużlowanie lub topienie próżniowe).

Tabela D.55. Stożkowe jednorzędowe łożyska rolkowe (ISO 355:2019)

Oznaczenie	$d$	$D$	$T$	$B$	$c$	$r$	$r_1$	Nośność, kN		$e$	$Y$	$Y_0$	$n_{gran}$ tys. min <sup>-1</sup>
								$C$	$C_0$				
<b>Seria lekka <math>\alpha = 12^\circ \div 18^\circ</math></b>													
7208	40	80	19,25	19	16	2,0	0,8	46,5	32,5	0,38	1,56	0,86	5
7209	45	85	20,75	20	16	2,0	0,8	50,0	33,0	0,41	1,45	0,8	5
7210	50	90	21,75	21	17	2,0	0,8	56,0	40,0	0,37	1,6	0,88	5
7211	55	100	22,75	21	18	2,5	0,8	65,0	46,0	0,41	1,46	0,8	4
7212	60	110	23,75	23	19	2,5	0,8	78,0	58,0	0,35	1,71	0,94	4
7214	70	125	25,25	26	21	2,5	0,8	96,0	82,0	0,37	1,62	0,89	3,2
7215	75	130	27,25	26	22	2,5	0,8	107,0	84,0	0,39	1,55	0,85	3,2
7216	80	140	28,25	26	22	3,0	0,8	112,0	95,2	0,42	1,43	0,78	3,2
7217	85	150	30,50	28	24	3,0	1,0	130,0	109	0,43	1,38	0,76	2,5
7218	90	160	32,50	31	26	3,0	1,0	158,0	125	0,38	1,56	0,86	2,5
7219	95	170	34,50	32	27	3,5	1,0	168,0	131	0,41	1,48	0,81	2,5
7220	100	180	37,00	34	29	3,5	1,2	185,0	146	0,41	1,49	0,82	2,5
<b>Seria średnia <math>\alpha = 10^\circ \div 14^\circ</math></b>													
7308	40	90	25,25	23	20	2,5	0,8	66	47,5	0,28	2,16	1,18	4
7309	45	100	27,25	26	22	2,5	0,8	83	60	0,28	2,16	1,19	4
7310	50	110	29,25	29	23	3,0	1,0	100	75	0,31	1,94	1,06	4
7311	55	120	31,5	29	25	3,0	1,0	107	81,5	0,33	1,8	0,99	3,2
7312	60	130	33,5	31	27	3,5	1,2	128	96,5	0,3	1,97	1,08	3,2
7313	65	140	36,0	33	28	3,5	1,2	146	112	0,3	1,97	1,08	3,2
7314	70	150	38,0	37	30	3,5	1,2	170	137	0,31	1,94	1,08	3,2
7315	75	160	40,0	37	31	3,5	1,2	180	148	0,33	1,93	1,06	2,5
7317	85	180	44,5	41	35	4,0	1,5	230	196	0,31	1,91	1,05	2
7318	90	190	46,5	43	36	4,0	1,5	250	201	0,32	1,88	1,03	2
<b>Średnia seria szeroka <math>\alpha = 11^\circ \div 16^\circ</math></b>													
7608	40	90	35,25	33	29	2,5	0,8	90	67,5	0,3	2,03	1,11	4
7609	45	100	38,25	36	31	2,5	0,8	114	90,5	0,29	2,06	1,13	4
7611	55	120	45,5	44	37	3,0	1,0	160	140	0,32	1,85	1,02	3,2
7612	60	130	48,5	47	39	3,5	1,2	186	157	0,3	1,97	1,08	3,2
7613	65	140	51,0	48	41	3,5	1,2	210	168	0,33	1,83	1,01	3,2
7614	70	150	54,0	51	43	3,5	1,2	240	186	0,35	1,71	0,94	2,5
7615	75	160	58,0	55	47	3,5	1,2	280	235	0,3	1,99	1,20	2,5
7616	85	170	61,5	59	49	3,5	1,2	310	290	0,32	1,89	1,04	2
7618	90	180	67,5	67	54	4,0	1,5	370	365	0,3	1,99	1,2	2
7620	100	215	77,5	73	61	4,0	1,5	460	460	0,31	1,91	1,65	1,6
<b>Lekka seria szeroka <math>\alpha = 12^\circ \div 16^\circ</math></b>													
7508	40	80	24,75	24	20	2,0	0,8	56,0	44,0	0,38	1,57	0,87	4
7509	45	85	24,75	24	20	2,0	0,8	60,0	46,0	0,42	1,44	0,79	4
7510	50	90	24,75	24	20	2,0	0,8	62,0	54,0	0,42	1,43	0,78	4
7511	55	100	26,75	25	21	2,5	0,8	80,0	61,0	0,36	1,67	0,92	3,2
7512	60	110	29,75	28	24	2,5	0,8	94,0	75,0	0,39	1,53	0,84	3,2
7513	65	120	32,75	31	27	2,5	0,8	110	98,0	0,37	1,62	0,89	3,2
7514	70	125	33,25	31	27	2,5	0,8	125	101	0,39	1,55	0,85	3,2
7515	75	130	33,25	31	27	2,5	0,8	130	108	0,41	1,48	0,81	2,5
7516	80	140	35,25	33	28	3,0	1,0	143	126	0,40	1,49	0,82	2,5
7517	85	150	38,50	36	30	3,0	1,0	162	141	0,39	1,58	0,85	2
7518	90	160	42,5	40	34	3,0	1,0	190	171	0,39	1,55	0,85	2
7519	95	170	45,5	46	37	3,5	1,2	230	225	0,38	1,56	0,85	2

Oznaczenie	d	D	T	B	c	r	r <sub>1</sub>	Nośność, kN		e	Y	Y <sub>0</sub>	n <sub>gran</sub> tys. min <sup>-1</sup>
								C	C <sub>0</sub>				
7520	100	180	49,0	46	39	3,5	1,2	250	236	0,41	1,49	0,82	1,6
<b>Lekka seria szeroka <math>\alpha = 12^\circ \div 16^\circ</math></b>													
7511A	55	100	26,75	25	21	2,5	0,8	99,0	80,0	0,4	1,5	0,8	3,2
7512A	60	110	29,75	28	24	2,5	0,8	120,0	100	0,4	1,5	0,8	3,2
7513A	65	120	32,75	31	27	2,5	0,8	142,0	120	0,4	1,5	0,8	3,2
7515A	75	130	33,25	31	27	2,5	0,8	157	130	0,43	1,4	0,8	3,2
7516A	80	140	35,25	33	28	3,0	1,0	176	155	0,43	1,4	0,8	2,5
7517A	85	150	38,5	36	30	3,0	1,0	201	180	0,41	1,4	0,8	2
7520A	100	180	49,0	46	39	3,5	1,2	297	280	0,35	1,7	0,9	1,6

Uwaga.  $X_0 = 0,5$ .



Rys. D.13. Złączka sprężysta tuleja-palec (ISO-R775)

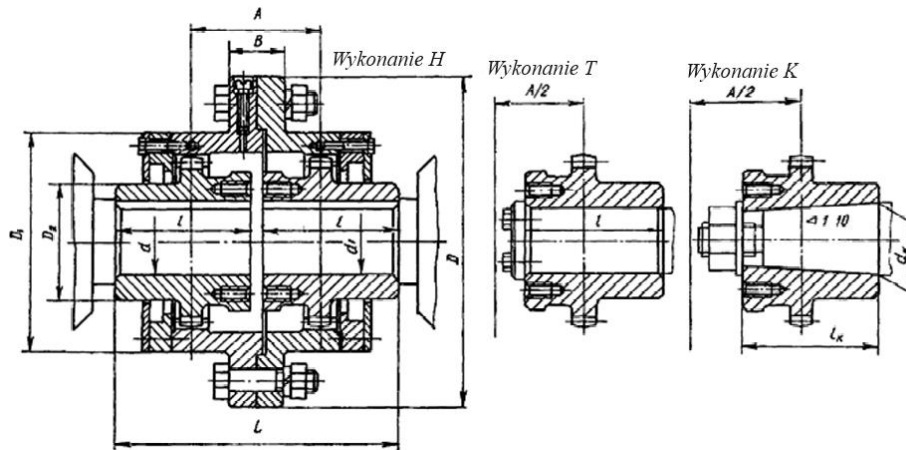
Tabela D.56. Parametry złączek sprężystych tuleja-palec (ISO-R775)

T Nm	n <sub>max</sub> min <sup>-1</sup>	Wymiary, mm										
		d		D nie większe	L nie większe				l			
		1 szereg	2 szereg		wykonanie							
				1	2	3	4	1	2	3	4	
6,3	8800	9		71	43		43	-	20	-	13	-
		10,11			49	43	49	-	23	20	16	-
16	7600	12,14		75	63	53	63	-	30	25	20	
		16			83	59	83	59	40	28	30	18
31,5	6350	16,18		90	84	60	84	60				
63	5770	20,22		100	104	76	104	76	50	36	38	24
125	4600	25,28	30	120	125	89	125	89	60	42	44	38
					165	121	165	121	80	58	60	38
250	3800	32,36	35,38	140	225	169	225	169	110	82	85	56
		40,45	42									
500	3600	40,45	42	170								
710	3000	45,50	48,55	190	226	170	226	170	140	105	107	72
		56										
1000	2850	50,56	55	220	286	216	286	216	170	130	135	95
		63	60,65,70									
2000	2300	63,71	65,70,75	250	348	268	348	268	210	170	170	125
		80,90	85									
4000	1580	80,90	85,95	320	350	270	350	270				
8000	1450	100,110	120	400	432	352	432	352	210	170	170	125
		125										
16000	1150	125	120	500	435	355	432	352	250	200	205	155
		140	130,150									



T Nm	$n_{max}$ min <sup>-1</sup>	Wymiary, mm											
		d		D nie większe	L nie większe				l				
					wykonanie								
		1 szereg	2 szereg	1	2	3	4	1	2	3	4		
		160	-			615	495	615	495	300	240	245	185

Uwaga 1. Półzłączki mogą być wykonane: 1, 2 – z cylindrycznymi otworami na długie i krótkie końce wałów; 3, 4 – z otworami stożkowymi na długie i krótkie końce wałów.



Rys. D.14. Złączki zębate (ISO-R773)

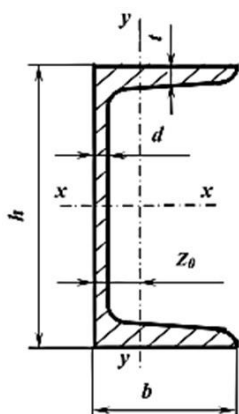
Tabela D.57. Podstawowe parametry złączek zębatych (ISO-R773)

Numer złączki	T, Nm	mm										$n_{max}$ , min <sup>-1</sup>
		d	$d_k$	$d_1$	D	$D_1$	L		l	$l_k$	A, nie mniej	
							PB	PP				
1	710	40	38	60	170	110	115	115	55	55	49	6300
2	1400	40÷50	55	70	185	125	145	145	70	80	75	5000
3	3150	40÷60	55	90	220	150	170	175	85	80	95	4000
4	5600	45÷75	75	100	250	175	215	215	105	105	125	3350
5	8000	50÷90	95	120	290	200	265	240	115	130	145	2800
6	11800	60÷105	-	130	320	230	255	260	125	-	160	2500
7	19000	65÷120	120	150	350	260	285	290	140	165	185	2120
8	23600	80÷140	150	170	380	290	325	330	160	200	210	1900
9	30000	80÷160	-	190	430	330	335	340	165	-	220	1700
10	50000	80÷180	-	210	490	390	365	370	180	-	245	1400

Uwaga 1. Typ złączki *PB* – dla bezpośredniego łączenia wałów; *PP* – dla połączenia wałów z zastosowaniem wału pośredniego;

Uwaga 2. Wykonanie półzłączek: *H* – bez mocowania na końcach wału; *T* – z mocowaniem na końcach wału; *K* – z otworem stożkowym;

Uwaga 3. Średnicę wału *d* z zakresów pośrednich przyjmuje się zgodnie z D.20 albo D.43.



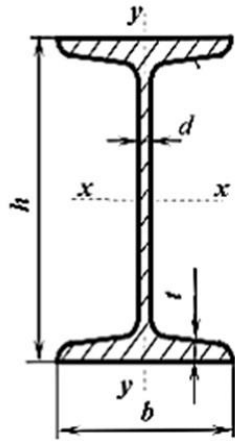
#### Oznaczenia

- $h$  – wysokość profilu
- $b$  – szerokość półki
- $d$  – grubość ścianki
- $t$  – średnia grubość półki
- $F$  – pole przekroju
- $J$  – moment bezwładności
- $W$  – wskaźnik wytrzymałości
- $i$  – promień bezwładności
- $S$  – statyczny moment półprzekroju
- $Z_0$  – odległość od osi  $y$  do ścianki zewnętrznej

Rys. D.15. Ceownik stalowy walcowany na gorąco (ISO-657-11-1980)

Tabela D.58. Podstawowe parametry ceowników stalowych walcowanych na gorąco (ISO-657-11-1980)

Nr profilu	Podstawowe wymiary, mm				$F$ cm <sup>2</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$Z_0$ cm
	$h$	$b$	$d$	$t$									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	24,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



#### Oznaczenia

$h$  – wysokość profilu

$b$  – szerokość półki

$d$  – grubość ścianki

$t$  – średnia grubość półki

$F$  – pole przekroju

$J$  – moment bezwładności

$W$  – wskaźnik wytrzymałości

$i$  – promień bezwładności

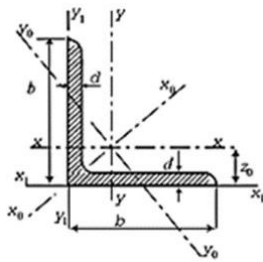
$S$  – statyczny moment półprzekroju

$Z_0$  – odległość od osi  $y$  do ścianki zewnętrznej

Rys. D.16. Dwuteownik walcowany na gorąco (ISO 657/13)

Tabela D.59. Dwuteowniki walcowane na gorąco (ISO 657/13)

Nr profilu	Podstawowe wymiary, mm				$F$ cm <sup>2</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm
	$h$	$b$	$d$	$t$								
10	10	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	0790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	250	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	43,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



Oznaczenia:

b – szerokość półki

d – grubość ścianki

J – moment bezwładności

i – promień bezwładności

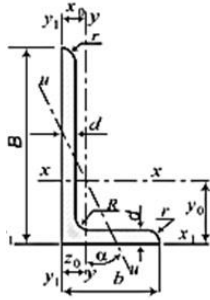
z<sub>0</sub> – odległość od środka ciężkości do zewnętrznych granic półek

Rys. D.16. Stalowy kątownik walcowany na gorąco (ISO 657-1:1989)

Tabela D.60. Podstawowe parametry stalowych kątowników walcowanych na gorąco (ISO 657-1:1989)

Numer profilu	b	d	Pole przekroju cm <sup>2</sup>	Dodatkowe wartości dla osi								Masa 1m kg
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , cm	
				J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> cm	J <sub>x0max</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x0max</sub> cm	J <sub>y0min</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>y0min</sub> cm			
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,53	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,2	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	-	0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	-	0,89	1,78
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,4	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	-	0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	-	1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	-	1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	-	1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90

Numer profilu	b	d	Pole przekroju cm <sup>2</sup>	Dodatkowe wartości dla osi								Masa 1m kg
				x-x		X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>		Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , cm	
	J <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> cm		J <sub>x0max</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x0max</sub> cm	J <sub>y0min</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>y0min</sub> cm	J <sub>x1</sub> cm <sup>4</sup>				
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	469	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	93	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	961	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4



Oznaczenia:

$B$  – szerokość większego ramienia

$b$  – szerokość mniejszego ramienia

$d$  – grubość ścianki

$J$  – moment bezwładności

$i$  – promień bezwładności

$x_0, y_0$  – odległość od środka ciężkości do zewnętrznych granic półek

Rys. D.17. Stalowy kątownik walcowany na gorąco nierównoramienny

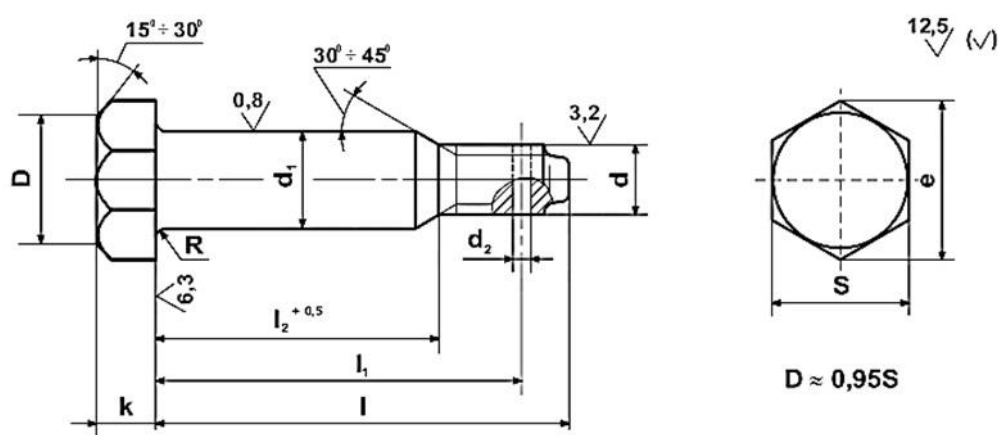
Tabela D.61. Podstawowe parametry stalowych kątowników walcowanych na gorąco nierównoramiennych (ISO/R 657-2:1968)

Nr profilu	Wymiary mm			Przekrój cm <sup>2</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	$i_x$ cm	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$i_y$ cm	$J_u$ min cm <sup>4</sup>	$i_u$ min cm <sup>4</sup>	Kąt pochyle- nia $u$ tg $\alpha$	$J_{x1}$ cm <sup>4</sup>	$J_{y1}$ cm <sup>4</sup>	$x_0$ cm	$y_0$ cm	Masa 1m kg
	$B$	$b$	$d$													
2.5/1.6	25	16	3	1,16	0,7	0,78	0,22	0,44	0,13	0,3	0,392			0,42	0,86	0,91
3.2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,382			0,49	1,08	1,17
			4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,374			0,53	1,12	1,52
4/2.5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,7	0,56	0,54	0,385			0,59	1,32	1,48
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,381			0,63	1,37	1,94
			5	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,374			0,66	1,41	2,37
5/3.2	50	32	3	2,42	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,403			0,72	1,6	1,9
5.6/3.6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6.3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4.5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7.5/5	75	50	6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5.6	90	56	5.5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	48,7	1,36	3,04	8,77
10/6.3	100	63	6	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	87,5	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6.5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
12.5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,4
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
18/11	180	100	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
20/12.5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,90	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1

Tabela D.62. Okrągłe profile stalowe walcowane na gorąco (EN 10060:2003)

Średnica <i>d</i> , mm	Pole przekroju poprzecznego, cm <sup>2</sup>	Masa 1 m długości walcówki, kg	Średnica <i>d</i> , mm	Pole przekroju poprzecznego, cm <sup>2</sup>	Masa 1 m długości walcówki, kg
5,0	0,196	0,154	29,0	6,605	5,185
5,5	0,238	0,187	30,0	7,069	5,549
6,0	0,283	0,222	31,0	7,548	5,925
6,3	0,312	0,245	32,0	8,043	6,313
6,5	0,332	0,261	33,0	8,553	6,714
7,0	0,385	0,302	34,0	9,079	7,127
8,0	0,503	0,395	35,0	9,621	7,553
9,0	0,636	0,499	36,0	10,179	7,990
10,0	0,785	0,617	37,0	10,752	8,440
11,0	0,950	0,746	38,0	11,341	8,903
12,0	1,131	0,888	39,0	11,946	9,378
13,0	1,327	1,042	40,0	12,566	9,865
14,0	1,539	1,208	41,0	13,203	10,364
15,0	1,767	1,387	42,0	13,854	10,876
16,0	2,011	1,578	43,0	14,522	11,400
17,0	2,270	1,782	44,0	15,205	11,936
18,0	2,545	1,998	45,0	15,904	12,485
19,0	2,835	2,226	46,0	16,619	13,046
20,0	3,142	2,466	47,0	17,349	13,619
21,0	3,464	2,719	48,0	18,096	14,205
22,0	3,801	2,984	50,0	19,635	15,413
23,0	4,155	3,262	52,0	21,237	16,671
24,0	4,524	3,551	53,0	22,062	17,319
25,0	4,909	3,853	54,0	22,902	17,978
26,0	5,309	4,168	55,0	23,758	18,650
27,0	5,726	4,495	56,0	24,630	19,335
28,0	6,158	4,834	58,0	26,421	20,740
60,0	28,274	22,195	140,0	153,938	120,841
62,0	30,191	23,700	145,0	165,130	129,627
63,0	31,173	24,470	150,0	176,715	138,721
65,0	33,183	26,049	155,0	188,692	148,123
67,0	35,257	27,676	160,0	201,062	157,834
68,0	36,317	28,509	165,0	213,825	167,852
70,0	38,485	30,210	170,0	226,980	178,179
72,0	40,715	31,961	175,0	240,528	188,815
73,0	41,854	32,855	180,0	254,469	199,758
75,0	44,179	34,680	185,0	268,803	211,010
78,0	47,784	37,510	190,0	283,529	222,570
80,0	50,266	39,458	195,0	298,648	234,438
82,0	52,810	41,456	200,0	314,159	246,615
85,0	56,745	44,545	210,0	346,361	271,893
87,0	59,447	46,666	220,0	380,133	298,404
90,0	63,617	49,940	230,0	415,476	326,148
92,0	66,476	52,184	240,0	452,389	355,126
95,0	70,882	55,643	250,0	490,874	385,336

Średnica $d$ , mm	Pole przekroju poprzecznego, $\text{cm}^2$	Masa 1 m długości walcówki, kg	Średnica $d$ , mm	Pole przekroju poprzecznego, $\text{cm}^2$	Masa 1 m długości walcówki, kg
97,0	73,898	58,010	260,0	530,929	416,779
100,0	78,540	61,654	270,0	572,555	449,456
105,0	86,590	67,973	-	-	-
110,0	95,033	74,601	-	-	-
115,0	103,869	81,537	-	-	-
120,0	113,097	88,781	-	-	-
125,0	122,719	96,334	-	-	-
130,0	132,732	104,195	-	-	-
135,0	143,139	112,364	-	-	-



Rys. D.18. Śruba z łbem sześciokątnym

Tabela D.63. Śruby z łbem sześciokątnym, klasa dokładności A, do rozwiercania otworów (ISO 898-1)

Nominalna średnica gwintu $d$	6	8	10	12	(14)	16	(18)	20	(22)	24	(27)	30	36	42	48
Skok gwintu	zwykły	1	1,25	1,5	1,75	2		2,5		3	3,5	4	4,5	5	
	drobno-zwojny	-	1	1,25		1,5				2		3			
Średnica pręta $d_1$	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	28	32	38	44	50
Wymiar pod klucz $S$	10	12	14	17	19	22	24	27	30	32	36	41	50	60	70

Uwaga. Wymiary śrub w nawiasach nie są rekomendowane do stosowania.



## LISTA REKOMEDOWANEJ LITERATURY

1. Anuriev V.I. , *Podręcznik projektanta budowy maszyn, wyd. 3, dop., red. I.N. Zhesto-kovej, Moskwa, Mashynostroenie, 2006.*
2. Baier A. , Gendarz P., Gwiazda A., Knosala A., *Podstawy konstrukcji maszyn- ćwiczenia*, PWN, Warszawa, 2018.
3. Baskhar K., Varadan T.K., *Strength of Materials: A Concise Textbook*, Springer Nature, 2022.
4. Biały W. , *Wybrane zagadnienia z wytrzymałości materiałów*, PWN, Warszawa, 2021.
5. Borozenets G.M., Pavlov V.M., Semak I.V., *Części maszyn: skrypt*, Kijów, Kondor, 2021..
6. *Katalog części, zespołów, mechanizmów, narzędzi itp.* URL: <https://galp.com.ua/category/products> (dostęp. 06.01.2023).
7. Dias da Silva V., *Mechanics and Strength of Materials*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2005.
8. [Dyląg Z.](#), [Jakubowicz A.](#), [Orłoś Z.](#), *Wytrzymałość materiałów*, T1 i T2, WNT, Warszawa, 2012.
9. *Silnik elektryczny*. URL: <https://kahovka.all.biz/uk/zagalnopromyslovi-elektrovyguny-mcg486> (dostęp. 03.01.2023).
10. Fedulina A.I., *Mechanika teoretyczna: skrypt*, Kijów, Vyscha shkola, 2005.
11. Gaidamaka A.V., *Części maszyn. Podstawy teorii i obliczeń: skrypt dla studentów kierunku budowy maszyn wszystkich form kształcenia*, Charków: NTU „ChPI”, 2020.
12. Kirkach N.F., Balasanian R.A., *Obliczenia i projektowanie części maszyn, wyd. 3, pop. i dop.*, Charków, Osnova, 1991.
13. Konovaliuk D.M., Kovalchuk R.M., Baibula V.O., *Części maszyn. Praktykum: skrypt dla uczelni wyższych*, Kijów, Kondor, 2009.
14. Konovaliuk D.M., Kovalchuk R.M., *Części maszyn: podręcznik*, Kijów, Kondor, 2004.
15. Kovtyn V.V., Pavlov O.A., Dorofeiev O.A., *Wytrzymałość materiałów. Prace obliczeniowe*, Lwów, Afisha, 2002.
16. Leyko J. , *Mechanika ogólna. Statyka i kinematyka*, T1, PWN, Warszawa 2005.
17. Mendes G., Lago B., *Strength of Materials*, Nova Science Publishers Inc, 2010.
18. Miniajlo A.V. i in., *Części maszyn: podręcznik*, Kijów, Agroosvita,, 2013.

19. Misiak J., *Mechanika Techniczna. Statyka i wytrzymałość materiałów T1*, WNT, Warszawa, 2024.
20. Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*, WNT, Warszawa, 2012.
21. NTC „Reduktor”. *Katalogi reduktorów, miftów, silników elektrycznych, części, zespołów, mechanizmów, narzędzi itp.*. URL: <https://reduktorntc-k.com.ua> (acc. 06.01.2023).
22. Ogorodnikov V.A, Grushko O.V., Poberezhny M.I., *Wytrzymałość materiałów. Obliczeniowo-graficzne zadania z przykładami obliczeń. Część 1: skrypt*, Winnica, VNTU, 2003.
23. Ogorodnikov V.A., *Wytrzymałość materiałów. Obliczeniowo-graficzne zadania z przykładami obliczeń. Część 2: skrypt* / V.A. Ogorodnikov, O.V. Grushko, M.I. Poberezhny, Winnica, VNTU, 2011.
24. Osiński Z., *Podstawy konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa 2024.
25. Pavliche V.T., *Podstawy konstrukcji i obliczenia części maszyn: podręcznik*, wyd. 2-e, poprawione, Lwów, Afisha, 2003.
26. Pavlovski M.A., *Mechanika teoretyczna: podręcznik*, Kijów, Tehnika, 2002.
27. Poliakov V.S., Barabash I.D., Riahovtsev O.A., *Podręcznik złączek*, Moskwa, Mashynostroenie, 1975.
28. Pysarenko G.S., Iakovlev A.P., Matveiev V.V., *Podręcznik z wytrzymałości materiałów*, wyd. 2, pop. i dop., Kijów, Na-uk. dumka, 1988.
29. Pysarenko G.S., Kvitka O.L., Umanski S.S., *Wytrzymałość materiałów: podręcznik red. G.S. Pysarenki*, Kijów: Vyscha shkola, 2004.
30. Rhagu Kumar A., *Strength of Materials*, Crc Pr Inc, 2022.
31. Rogowski B., Kamiński M., *Mechanika Techniczna*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2009.
32. Romanowicz R., Szybiński B., Pałac M., *Podstawy projektowania elementów maszyn*, PWN, Warszawa, 2024.
33. Ryzhkova S.A., *Mechanika teoretyczna. Praktykum: skrypt*, Kijów, Lybid, 1992.
34. Shevchenko S.B., *Części maszyn. Obliczenia, konstrukcja, zadania: skrypt*, Kijów, Kondor, 2008.

---

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Jana Długosza  
w Częstochowie  
42-200 Częstochowa, al. Armii Krajowej 36A  
[www.ujd.edu.pl](http://www.ujd.edu.pl)  
e-mail: [wydawnictwo@ujd.edu.pl](mailto:wydawnictwo@ujd.edu.pl)