

Konstruowalność niezależnych zbiorów generatorów filtrów w algebrach Boole'a¹

Joanna Grygiel

Abstract

W pracy poniższej zajmujemy się problemem konstruowalności za pomocą operacji boolowskich niezależnego zbioru generatorów danego filtra F w algebrze Boole'a z dowolnego zbioru generatorów tego filtra. Okazuje się, że wykonalność takiej konstrukcji zależy, podobnie jak to było w przypadku istnienia niezależnego zbioru generatorów [por.3], od minimalnej mocy zbioru generatorów danego filtra.

Niech $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$ będzie niezdegenerowaną algebrą Boole'a.

Podzbiór A zbioru B jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy przy dowolnym wyborze różnych elementów $a_1, \dots, a_n$ ze zbioru A zachodzi

$$\varepsilon a_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon a_n \neq 0,$$

przy czym $\varepsilon a \in \{a, -a\}$ dla dowolnego $a \in B$.

Zbiory niezależne były wielokrotnie badane, zarówno w algebrze ogólnej (m.in. przez Sikorskiego [6]) jak i w topologii (np. [1]). Wiążą się one ściśle z pojęciem algebr wolnych, ponieważ każdy zbiór niezależny generuje pewną wolną algebrę Boole'a.

Problem rozważany w tej pracy dotyczy jednak nie tyle samych zbiorów niezależnych, ile konstruowalności za pomocą operatorów boolowskich niezależnych zbiorów generatorów dla filtrów w algebrach Boole'a.

Niech F będzie filtrem algebry $\mathcal{B}$. Przypomnijmy, że zbiór G jest zbiorem generatorów filtra F jeśli dla dowolnego elementu $x \in F$ istnieją elementy $g_1, \dots, g_m \in G$ takie, że

$$g_1 \wedge \dots \wedge g_m \leq x.$$

¹Pełna wersja poniższej pracy ukaże się w terminie późniejszym

Piszemy wtedy $F = [G]$.

Jeżeli istnieje niezależny zbiór G taki, że $F = [G]$, to powiemy, że F jest niezależnie generowany.

Zbiór generatorów filtra nie musi być i najczęściej nie jest zbiorem generatorów dla całej algebry, powyżej zdefiniowane pojęcie generowania filtra – posiadające logiczny rodowód – różni się zasadniczo od algebraicznego pojęcia generowania algebry. Zatem fakty dotyczące konstruowalności niezależnych zbiorów generatorów dla algebr Boole'a nie dają się przełożyć na odpowiednie twierdzenia związane z konstruowalnością niezależnych zbiorów generatorów filtrów w danej algebrze.

Konstruowalność niezależnego zbioru generatorów danego filtra F w algebrze $\mathcal{B}$ okazuje się zależeć nie tyle od kształtu całej algebry $\mathcal{B}$ ile od samego filtra F , a w szczególności istotnym parametrem dla rozważanej kwestii jest minimalna moc zbioru generatorów filtra F .

Jeśli istnieje jednoelementowy zbiór generatorów filtra F , to F nazywamy filtrem głównym. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku filtr F jest niezależnie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy F jest filtrem właściwym, tzn. $F \neq \mathcal{B}$ oraz $F \neq \{1\}$.

Jeśli filtr F nie jest filtrem głównym i istnieje przeliczalny zbiór generatorów F , to F nazywamy przeliczalnie generowanym.

Jeśli minimalna moc zbioru generatorów filtra F jest nieprzeliczalną i regularną liczbą kardynalną, to powiemy, że filtr F jest regularnie generowany.

Dla danego filtra F przez $m(F)$ będziemy oznaczać minimalną moc zbioru generatorów tego filtra.

Problem istnienia i konstruowalności niezależnych zbiorów generatorów filtrów w algebrach Boole'a wyniknął z rozważań dotyczących zastosowania pojęcia algebraicznej niezależności w logice. Jest ono bowiem naturalnym wzmocnieniem pojęcia logicznej niezależności, która z kolei, algebraicznie rzecz biorąc, odpowiada tzw. niezależności filtrowej.

Równoważnikiem istnienia logicznie niezależnej aksjomatyki dla teorii T w logice klasycznej jest istnienia filtrowo niezależnego zbioru generatorów filtra odpowiadającego teorii T w algebrze Tarskiego – Lindenbauma. Tym samym, teoria T będzie algebraicznie niezależnie aksjomatyzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej filtr algebry Lindenbauma będzie niezależnie generowany. Zatem pytanie o możliwość konstruowania niezależnych zbiorów generatorów danego filtra za pomocą operacji boolowskich z dowolnego innego zbioru generatorów tego filtra ma swą genezę w pytaniu o możliwość skonstruowania algebraicznie (a więc silnie) niezależnej aksjomatyki danej teorii klasycznej T za pomocą podstawowych spójników logicznych i dowolnie obranej aksjomatyki tej teorii.

Jedną z podstawowych obserwacji dotyczących możliwości konstruowania za pomocą operacji boolowskich niezależnych zbiorów generatorów jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 *Jeżeli L jest nieskończonym łańcuchem malejącym elementów algebry Boole'a $\mathcal{B}$, to filtr $[L]$ nie ma niezależnego zbioru generatorów zbudowanych z kombinacji boolowskich elementów tego łańcucha.*

Prawdziwość powyższego faktu wynika między innymi z tego, że w superatomowych algebrach Boole'a (a taką jest każda algebra Boole'a generowana przez dowolny łańcuch) nie istnieją nieskończone zbiory niezależne ([2],[4]).

W powyższym twierdzeniu nie zakładaliśmy nic o mocy łańcucha L (poza tym, że jest on nieskończony), zatem w przypadku filtrów przeliczalnie generowanych możemy wnioskować, że:

Wniosek 1 *Jeżeli F jest filtrem przeliczalnie generowanym, to istnieje taki zbiór generatorów filtra F , z których nie da się przy pomocy operacji boolowskich skonstruować niezależnego zbioru generatorów tego filtra.*

Istotnie, jeśli F nie ma niezależnego zbioru generatorów, to teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\{a_1, a_2, \dots\}$ jest niezależnym zbiorem generatorów filtra F . Wtedy $L = \{a_1, a_1 \wedge a_2, a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, \dots\}$ jest nieskończonym łańcuchem malejącym, który generuje filtr F , a zatem zgodnie z twierdzeniem 1 nie istnieje niezależny zbiór generatorów filtra F zbudowanych z kombinacji boolowskich elementów łańcucha L .

Wniosek analogiczny do powyższego nie jest prawdziwy dla filtrów regularnie generowanych.

Twierdzenie 2 *Niech F będzie regularnie generowanym filtrem algebry Boole'a $\mathcal{B}$ mającym niezależny zbiór generatorów. Wtedy dla dowolnego zbioru generatorów Y filtra F :*

- (a) *ze zbioru wszystkich skończonych iloczynów elementów zbioru Y można wybrać podzbiór niezależny mocy $m(F)$.*
- (b) *z elementów zbioru Y można za pomocą operacji boolowskich skonstruować niezależny zbiór generatorów filtra F .*

Dowód twierdzenia 2 opiera się w dużej mierze na następującym teoriiomnogościowym twierdzeniu [4]:

Twierdzenie 3 (Twierdzenie o Δ -systemie) *Jeśli λ jest liczbą kardynalną regularną i nieprzeliczalną, $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ jest rodziną zbiorów*

skończonych, to istnieje podrodzina $\mathcal{B}$ rodziny $\mathcal{A}$ i skończony zbiór Δ takie, że $\text{card } \mathcal{A} = \text{card } \mathcal{B}$ oraz $A_i \cap A_j = \Delta$ dla dowolnych różnych zbiorów $A_i, A_j \in \mathcal{B}$.

Twierdzenie 2 okazuje się również być prawdziwe, gdy $m(F)$ jest singularną liczbą kardynalną o nieprzeliczalnej kofinalności:

Twierdzenie 4 Niech F będzie niezależnie generowanym filtrem algebry Boole'a $\mathcal{B}$ takim, że $m(F) = \kappa$, gdzie κ jest singularną liczbą kardynalną i $\text{cf } \kappa > \omega$. Wtedy z dowolnego zbioru generatorów filtra F można za pomocą operacji boolowskich skonstruować niezależny zbiór generatorów tego filtra.

Dowód w tym przypadku jest dość analogiczny do dowodu twierdzenia 2, ale tym razem w oparciu o następujący fakt [5]:

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o podwójnym Δ -systemie) Niech κ będzie singularną liczbą kardynalną, taką, że $\text{cf } \kappa > \omega$ i niech $\langle \lambda_\alpha; \alpha < \text{cf } \kappa \rangle$ będzie ściśle rosnącym ciągiem regularnych liczb kardynalnych ograniczonym przez κ i takim, że $\lambda > \text{cf } \kappa$ dla $\alpha < \text{cf } \kappa$. Załóżmy, że $\mathcal{A} = \{A_\xi; \xi < \kappa\}$ jest rodziną zbiorów skończonych. Wtedy istnieją zbiory Γ, Δ oraz ciągi $\langle \Sigma_\alpha; \alpha \in \Gamma \rangle, \langle \Delta_\alpha; \alpha \in \Gamma \rangle$ spełniające następujące warunki:

- (a) $\langle \Sigma_\alpha; \alpha \in \Gamma \rangle$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych taką, że $\text{card } \Sigma_\alpha = \lambda_\alpha$ dla wszystkich $\alpha \in \Gamma$,
- (b) $\text{card } \Gamma = \text{cf } \kappa$,
- (c) $\langle A_\xi; \xi \in \Sigma_\alpha \rangle$ jest Δ -systemem z jądrem Δ_α dla każdego $\alpha \in \Gamma$, tzn. $A_\xi \cap A_\eta = \Delta_\alpha$ dla dowolnych różnych $\xi, \eta \in \Sigma_\alpha$,
- (d) dla różnych $\alpha, \beta \in \Gamma$ mamy $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta = \Delta$. Ponadto, jeśli $\xi \in \Sigma_\alpha$ i $\eta \in \Sigma_\beta$, to $A_\xi \cap A_\eta = \Delta$.

Pozostaje otwarte pytanie o możliwość konstruowania przy użyciu tylko operacji boolowskich niezależnych zbiorów generatorów z elementów dowolnego zbioru generatorów dla filtrów których minimalna moc zbioru generatorów jest liczbą kardynalną singularną o przeliczalnej kofinalności.

Literatura:

- [1] Balcar, B., Franek, F., Independent families in complete Boolean algebras, 1982, TAMS 274, pp. 607-618.
- [2] Grygiel, J., Absolutely independent sets of generators of filters in Boolean algebras, 1990, Reports on Mathematical Logic 24, pp. 25-35.
- [3] Grygiel, J., Freely generated filters in free Boolean algebras, 1995, Studia Logica 54, pp. 139-147.
- [4] Koppelberg, S., Free Constructions, in Handbook of Boolean algebras, edited by Monk J.D., Bonnet R., 1989, North Holland.
- [5] Monk, J.D., Independence in Boolean algebras, 1983, Periodica Mathematica Hungarica 14, pp. 269-308.
- [6] Sikorski, R., Boolean algebras, 1960, Berlin, Gottingen, Heidelberg.