Wiesław Wójcik

Uniwersalność matematyki w ujęciu historycznym

Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy w Częstochowie

Wiesław Wójcik

Uniwersalność matematyki w ujęciu historycznym

Częstochowa 2021

Recenzent
prof. dr hab. Krzysztof ŚLEZIŃSKI

Redaktor Naczelna Wydawnictwa
Paulina PIASECKA-FLORCZYK

Korekta
Dariusz JAWORSKI

Redakcja techniczna
Piotr GOSPODAREK

Projekt okładki
Sławomir SADOWSKI

ISBN 978-83-66536-55-5

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego
im. Jana Długosza w Częstochowie
42-200 Częstochowa, ul. Waszyngtona 4/8
tel. (34) 378-43-28, faks (34) 378-43-19
www.ujd.edu.pl
e-mail: wydawnictwo@ujd.edu.pl

Spis treści

Wstęp

Głównym problemem poruszanym w pracy jest uniwersalność matematyki. Pokazuję jej różne wymiary, które odsłaniały się w kolejnych etapach dziejów. Kolejnym zagadnieniem jest ukazanie, że rozwój matematyki (i odkrycia dokonywane w jej ramach) leży u podstaw przemian kulturowych i cywilizacyjnych. Pokazuję, poprzez analizę wybranych odkryć matematycznych, że matematyka umożliwiała cywilizacji wejście na wyższy stopień rozwoju. Dzięki odkryciom matematycznym odsłaniały się i stawały się dostępne dla człowieka kolejne obszary (aspekty) rzeczywistości.

Uniwersalność matematyki była obecna od początku rozwoju cywilizacji, a została dostrzeżona już przez niektórych myślicieli starożytnej Grecji. Jednym z elementów tej uniwersalności stała się niezbędność nauczania matematyki dla kształtowania właściwych postaw intelektualnych, moralnych i społecznych. Metody dowodzenia stosowane w matematyce stały się wzorem ścisłej i racjonalnej argumentacji. Okazało się też, że sprzeczności dostrzegane w świecie przyrody i w kulturze mogą być rozwiązywane przez rozwój matematyki. Nawet sprzeczności i paradoksy, które zdawały się dotykać samą matematykę, były przez nią samą rozwiązywane i stały się impulsem do pojawiania się nowych teorii i metod badawczych oraz odkrywania nowych obszarów rzeczywistości dostępnych dla człowieka.

Okazuje się, że jednym z ważniejszych aspektów uniwersalności matematyki jest to, iż dokonywane w jej ramach odkrycia stają się kluczowe dla przemian cywilizacyjnych, a niektóre z nich doprowadzają do przełomów, a nawet do rewolucji w kulturze. Istotne dla tych przełomów są nowe inicjatywy edukacyjne inspirowane działalnością matematyczną. Głównie poprzez nowe formy edukacyjne następuje przenikanie matematyki do kultury. Kolejnym elementem jest technika naukowa, możliwa dzięki matematycznemu aparatowi pojęciowemu i metodom. Najistotniejsze były takie trzy okresy rozwoju techniki naukowej: w czasach hellenistycznych w III wieku p.n.e., w czasach nowożytnych – okres zwany rewolucją przemysłową, oraz współczesny nazwany rewolucją informacyjną. Te matematyczne odkrycia są ukazane jako klucz pozwalający na głębsze czytanie dziejów i ukazanie ich racjonalnego charakteru. Oddziaływanie idei matematycznych na kulturę jest bezsporne. Wielu uczonych i artystów czerpało swoje intuicje z własności różnych obiektów matematycznych. Wiele nurtów w sztuce, religii, mistyce (np. mistyka liczb) oraz koncepcje człowieka i państwa miały swoje matematyczne inspiracje. Najbardziej znana jest teoria proporcji matematycznej (w tym tak zwana boska proporcja), która stała się podstawą opracowania kanonów architektury śródziemnomorskiej i teorii harmonii muzycznej. Odniesienia do matematyki są również kluczowe w rozumieniu i stosowaniu takich pojęć, jak: miara, analogia, perspektywa, dowód, względność, nieskończoność, metoda, algorytm, podobieństwo, odpowiedniość, relacja, symetria, ciągłość, harmonia, sprawiedliwość, związek przyczynowo-skutkowy i wiele innych. Dzięki matematyce jest ciągle ubogacany i rozszerzany świat wartości – chodzi o takie wartości, jak piękno, porządek, harmonia, precyzja myślenia, ścisłość czy racjonalność, a również o różnorodne wartości społeczne oraz etyczne[1]. Możemy przyjąć, że bez tych inspiracji i odniesień nie powstałaby kultura europejska w takiej postaci, w jakiej jest nam znana.

Fenomenem, na który szczególnie zwracam w książce uwagę, jest pojawiający się cyklicznie problem utraty matematyki, niszczenia dzieł matematycznych i blokowania rozwoju matematyki przez różne działania destrukcyjne. I ma to miejsce, mimo – wydawałoby się – bardzo widocznego wpływu matematyki na podnoszenie poziomu cywilizacyjnego i jakości życia. Te elementy destrukcyjne i barbarzyńskie nie doprowadziły do całkowitego zniszczenia nauki, jednak przyczyniły się do chwilowego przerwania ciągłości rozwoju myśli naukowej i upadku cywilizacyjnego. W kolejnych okresach trzeba było, często z mozołem, odzyskiwać utracone prace i wyniki. Pokazuję, że na kolejnych etapach rozwoju matematyki (cywilizacji) ma miejsce ścieranie się racjonalnych metod matematycznych z siłami irracjonalnymi, które próbują rozsadzić kulturę od wewnątrz. Te ataki wewnętrzne są groźniejsze niż barbarzyńskie uderzenia z zewnątrz, bo czasem zachowują pozory rozwoju cywilizacyjnego. Na szczęście racjonalizm matematyki wychodził z tego starcia zwycięsko i możemy mówić *de facto* o ciągłym rozwoju matematyki i kumulowaniu jej wyników.

W okresie średniowiecza, nowożytności, aż do czasów współczesnych, antyczny dorobek matematyczny jest stopniowo odzyskiwany (tak w sensie materialnym, jak i merytorycznym). Przyspieszenie rozwoju w późniejszym okresie wiązało się głównie z odnajdywaniem kolejnych dzieł matematyków antycznych i ich przyswojeniem (przeczytaniem, zrozumieniem, skomento-

[1] Por. M.C. Ghyka, *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, Universitas, Kraków 2001.

waniem, uzupełnieniem i rozwinięciem). Już pod koniec średniowiecza zaczęły pojawiać się nowe obszary badań matematycznych, jednak poziom matematyki antycznej został osiągnięty dopiero w XIX wieku. Później nastąpiło ogromne przyśpieszenie, które wiązało się ze znaczną absorpcją poznanych osiągnięć matematyków starożytnych, połączoną z odkryciem nowych obszarów badawczych. Była to wielka synteza matematyki abstrakcyjnej i ogólnej, uzupełnionej matematyką ciągłościową i relacyjną okresu nowożytnego.

Na tle wielkich osiągnięć matematyki antycznej opisuję trzy, w dużej mierze konkurencyjne, wielkie projekty matematyki (Platona, Archytasa i Archimedesa), w których zostaje w odmienny sposób ukazana uniwersalność matematyki, oraz ogólny projekt wiedzy Arystotelesa, gdzie matematyka miała swoje ustalone miejsce i nie miała charakteru uniwersalnego (taki charakter przyjmowała jego logika). Projekt Arystotelesa zdominował w znacznym stopniu system nauczania od czasów aleksandryjskich aż do końca średniowiecza. Odegrał jednak pozytywną rolę, gdyż pokazał możliwość rozwoju innych pozamatematycznych (wówczas) nauk (w tym logiki i nauk przyrodniczych). Był zwalczany konsekwentnie od XIV wieku, gdy zdobywano kolejne obszary dla aktywności matematycznej (matematyczna refleksja nad ruchem, ciągłością, nieskończonością, funkcją). W drugiej połowie XIX wieku następuje swoista synteza tych wizji uniwersalności, gdy budowana jest logika matematyczna i teoria mnogości.

Charakterystyczne dla czasów nowożytnych jest – z jednej strony – odcinanie się od matematyki antycznej i średniowiecznej i pokazywanie absolutnej nowości budowanej wówczas matematyki, a z drugiej – konsekwentne odzyskiwanie wyników i metod starożytnych oraz ich rozwijanie. To odzyskiwanie stanowi istotny impuls rozwojowy. Powstają jednak całkiem nowe obszary i narzędzia badań związane z nieskończonością (ciągi, granice, szeregi nieskończone, całki), ciągłością, funkcją. Kluczowe okazało się dopełnienie matematyki algorytmicznej poprzez ostateczne wprowadzenie symboliki matematycznej. Dzięki temu oraz nowym teoriom (teoria logarytmów, rachunek różniczkowy i całkowy, i inne) znacząco wzrosła moc obliczeniowa ludzkości. Powstaje język, przy pomocy którego matematyk nawiązuje racjonalny dialog z przyrodą i z drugim człowiekiem (w ramach nowych akademii i stowarzyszeń naukowych). Język matematyki staje się językiem uniwersalnym, a matematyka staje się narzędziem badań przyrodniczych oraz nauką o naukach przyrodniczych (ustala metody nauk, jako wzorzec metodologiczny i kryterium prawdziwości, uzasadnienie praw przyrody ma miejsce w ramach modeli matematycznych).

Przedstawiam też dopełniające się wizje uniwersalności matematyki Kartezjusza i Pascala, w których przyjmowane jest istnienie światła naturalnego (rozumu), pozwalającego dotrzeć do podstawowych oczywistości, na których możemy budować gmach wiedzy i docierać do świata. Pojawia się nowe podejście do rzeczywistości, którą nie „usprawiedliwiamy", wyjaśniamy, dzięki budowanym teoriom i modelom matematycznym, lecz badamy bezpośrednio, a matematykę możemy stosować do wszystkich obszarów rzeczywistości i do wszystkich rodzajów nauk. Formułuje Kartezjusz charakterystyczne określenie matematyki jako wiedzy, której przedmiot może być dowolny; dlatego nie przedmiot badań określa matematykę, lecz sposób badania, który polega na poszukiwaniu miary i porządku w badanej rzeczywistości.

Dokonany w XVII wieku przełom nowożytny w naukach matematycznych był ostatnim jak na razie przełomem, którego konsekwencje cały czas są naszym udziałem. Doświadczamy jednak współcześnie symptomów zbliżającego się kolejnego przełomu, którego główne cechy były zawarte już w propozycjach *ars combinatoria* Leibniza. Analizuję nowe teorie matematyczne (w tym teorię kategorii, teorię gier, geometrię fraktalną, metamatematykę) jako zwiastuny zbliżającego się przełomu.

Efektem przeprowadzonych analiz historycznych jest opracowanie pewnej koncepcji historiozoficznej pokazującej odkrycia i wynalazki matematyczne jako klucz do interpretacji dziejów. Przeważnie „kluczem interpretacyjnym" przy pisaniu prac z tzw. historii powszechnej są wydarzenia polityczno-wojskowe, czasami odkrycia techniczne i rozwój środków produkcji.

Ciekawą propozycją, idącą pod prąd utartym wzorcom interpretacyjnym dziejów, jest koncepcja Marshalla McLuhana, w której kluczem rozumienia dziejów staje się rozwój środków komunikacji. Momentami węzłowymi stają się: wynalezienie alfabetu fonetycznego (przejście od epoki plemiennej, akustycznej do prywatnej, wizualnej, gdzie umiejętność czytania staje się głównym sposobem zdobywania wiedzy i informacji), druku (epoka pełnego indywidualizmu, upowszechnienie czytania) oraz wynalezienie mediów elektronicznych (natychmiastowa komunikacja, świat jako globalna wioska, budowanie ponownie przestrzeni akustycznej jak w epoce pierwszej)[2]. Według McLuhana alfabet fonetyczny ustanowił linearny sposób organizacji życia. Ten liniowy zapis wyznaczył sposób rozumowania obecny od czasów starożytnych w matematyce, logice i innych naukach. Jednak w ostatniej epoce logika linearna przestała obowiązywać i tym samym potrzebny jest inny

[2] M. McLuhan, Q. Fiore, *The Medium is the Massage*, Random House, New York 1967.

sposób komunikowania, oparty na innych zasadach. Warto jednak zauważyć, że zanim powstał alfabet, istniały już zapisy matematyczne mające bardziej uniwersalny charakter. Leżały one u podstaw idei alfabetu, jak również innych metod komunikacji z drugim człowiekiem i ze światem.

Problemem jest to, iż w minimalnym stopniu ukazuje się wydarzenia z dziejów nauki jako decydujące dla zrozumienia i interpretacji rozwoju cywilizacji. Wydaje się, że szczególnie dużą siłę eksplanacyjną ma przyjęcie odkryć matematycznych za punkt odniesienia dla badania dziejów cywilizacji. Odkrycia matematyczne leżą u podstaw wielu wynalazków, postępu technicznego i gospodarczego. Również pojawianie się kolejnych idei i umiejętności matematycznych wiąże się z rozwojem człowieka i całego gatunku ludzkiego – mogą one stanowić wyznacznik kolejnych etapów ewolucji człowieka[3].

Gdy w pewnych momentach dziejów wpływ nauki był szczególnie widoczny, wtedy łatwiejsze stawało się też czytanie dziejów poprzez odkrycia naukowe. Tak było na przykład w czasach hellenistycznych, gdy w III wieku p.n.e. miała miejsce rewolucja kulturowa. Znacząca zmiana mentalności społecznej i sposobu życia dokonała się dzięki rozwojowi techniki, do czego przyczyniła się matematyka grecka, w tym szczególnie geometria i astronomia, ale też optyka, mechanika i hydrostatyka[4]. Podobnie stało się na początku czasów nowożytnych. Upowszechnienie w Europie Zachodniej cyfr arabskich, systemu dziesiątkowego, wynalezienie logarytmów[5] oraz konstruowanie tablic kwadratów liczb, tablic trygonometrycznych czy logarytmicznych znacznie uprościło rachunki, niezbędne w wielu operacjach handlowych i administracyjnych, i przyczyniło się do szybkiego rozwoju gospodarczego. Również odkrycie operacji nieskończonościowych, matematyzacja pojęcia ruchu, wprowadzenie pojęcia całki, granicy, ciągłości czy szeregów nieskończonych doprowadziło do powstania nowych działów matema-

---

3 Ten sposób badania dziejów cywilizacji ukazany jest przykładowo w książkach: H.L. Resnikoff, R.O. Wells, Jr., *Mathematics and Civilization*, Dover Publications, New York 1973; L. Russo, *Zapomniana rewolucja. Grecka myśl naukowa a nauka nowoczesna,* tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2005; M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Penguin Books, New York 1953.

4 W. Wójcik, *Przełom czy rewolucja – znaczenie matematyki dla wystąpienia rewolucji kulturowej*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2007, s. 83–93.

5 Wynalazek logarytmów skracał wielokrotnie czas potrzebny na wykonywanie obliczeń i aż do czasu wynalezienia komputera wzmocnił moc obliczeniową ludzkości w największym stopniu. Tego wynalazku dokonał John Napier (1550–1617), szkocki matematyk. Logarytmy pozwalały na zastępowanie mnożenia dodawaniem. Wynaleziony przez Edmunda Guntera (1620) i Williama Oughtreda (1632) przyrząd do technicznego wykonywania obliczeń (nazwany suwakiem logarytmicznym) był wykorzystywany aż do lat 80. XX wieku.

tyki, w tym rachunku różniczkowego i całkowego (Calculus), analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego, które stały się podstawą i głównym narzędziem fizyki, chemii, nauk technicznych i innych, skutkiem czego doszło do gwałtownych przemian gospodarczych i kulturowych.

W dziejach matematyki możemy zaobserwować ciągnące się przez wiele wieków linie rozwojowe. Znaczenie szczególne mają dwie, które trwają nieprzerwanie od początków dziejów cywilizacji, a są to: wzrost zdolności obliczeniowych człowieka oraz rozpoznawanie geometrycznej natury rzeczywistości. Połączenie tych ścieżek w jednej aktywności matematycznej sprawia, że pojawiają się praktyczne zastosowania i wzrasta (z czasem znacząco) zdolność do badania, kontrolowania i modelowania rzeczywistości. Kiedy bowiem odkrywane są coraz bardziej złożone obiekty geometryczne, do ich pomiarów wymagany jest rozwój coraz bardziej zaawansowanych metod obliczeniowych. Podobnie rozwój technik obliczeniowych pozwala na konstrukcje coraz bardziej złożonych obiektów geometrycznych i dostrzeganie ich w rzeczywistości.

Są też inne, krótsze ścieżki rozwoju matematyki, rozpoczynające się od momentu odkrycia nowych obiektów i teorii matematycznych (pomiar, konstrukcja, działanie, dowód, forma algebraiczna, algorytm, funkcja, nieskończoność, forma logiczna, dedukcja).

Ponadto trzeba zauważyć, że matematyka zajmuje specyficzne miejsce w kulturze. Nie jest po prostu nauką ani sztuką, lecz zarazem należy do obu tych dziedzin. Sztuka często stanowi motywację dla pracy matematyków, a same konstrukcje matematyczne, struktury, dowody oparte są w dużej mierze na kryteriach estetycznych. Niektóre dojrzałe teorie matematyczne znajdują zastosowanie w naukach technicznych, przyrodniczych czy społecznych. Nauki te wykorzystują matematykę, jednak trudno określić dokładną granicę, gdzie rozpoczynają się te nauki, a kończy matematyka. Ponieważ w wielu przypadkach to zrośnięcie matematyki i innych nauk jest bardzo ścisłe, można mówić o jednym bloku nauk matematyczno-przyrodniczych lub nawet matematyczno-przyrodniczo-technicznych. Oczywiście, rozwój nauk matematycznych, jak i matematyzowalność nauk i kultury, ciągle trwa, trudno więc zdefiniować samą matematykę i zakres jej oddziaływania.

Inspiracją dla prowadzonych analiz historycznych była praca Józefa Marii Hoene-Wrońskiego (1776–1853) *Wstęp do wykładu matematyki* wydana w 1821 roku[6]. Przedstawiona przez niego periodyzacja dziejów matematyki

[6] J.M. Hoene-Wroński, *A Course of Mathematics,* Wyd. Samuel Bagster, Londyn 1821; idem, *Wstęp do wykładu matematyki,* tłum. L. Niedźwiecki, Biblioteka Polska, Paryż 1880.

miała na celu ukazanie podstawy i możliwość rozwoju wiedzy ludzkiej w kolejnych latach rozwoju cywilizacji. Autor zauważał, że umiejętności matematyczne są podstawą postępu ludzkości, a nauka zawdzięcza swoją siłę i pewność metodzie matematycznej. Zauważał, że można podzielić całe dzieje matematyki na pięć okresów:

I. W pierwszym okresie dziejów matematykę uprawiano *in concreto*. Najważniejsze dla tego okresu rozwoju matematyki było wskazanie na ścisły związek matematyki ze światem fizycznym. Najwyższy swój rozwój osiągnęła ona w świecie starożytnego Wschodu (Babilonia, Egipt).

II. W drugim okresie (greckim – od Talesa z Miletu do Szkoły Aleksandryjskiej) obiekty matematyki zostały oddzielone od rzeczy fizycznych. Matematyka stała się wiedzą abstrakcyjną. Według Wrońskiego ówczesna wiedza nie osiągnęła odpowiedniego poziomu ogólności. Odkrywane prawdy były prawdami szczegółowymi. Jako przykład podaje Wroński teorię stożkowych Apoloniusza, w której odkryte stożkowe (koło, elipsa, parabola i hiperbola) nie wynikają z ogólnego prawa.

III. Trzeci okres jest czasem formułowania prawd ogólnych i rozwoju algebry (Cardano, Bombeli, Fermat, Kartezjusz, Kepler, Cavalerie i Wallis).

IV. W czwartym okresie rozpoczyna się generowanie przez matematykę rzeczywistości. Początek tego okresu to powstanie rachunku różniczkowego, a kluczowe jest uniwersalne zastosowanie szeregów nieskończonych.

V. Piąty okres rozpoczyna się w czasach Wrońskiego i będzie on polegał na poszukiwaniu jednej najwyższej zasady, z której wszystkie prawa matematyki będą wynikały. Wroński formułuje Prawo Najwyższe[7] i próbuje ukazać jego uniwersalne i absolutne znaczenie, m.in. w oparciu o to prawo formułuje uniwersalny wzór na rozwiązanie równań dowolnych stopni[8].

Ten sposób podejścia do dziejów pozwala mi ukazać ciągłość rozwoju matematyki. Nawet jeśli w pewnych okresach mieliśmy do czynienia z osłabieniem aktywności matematycznej, to przy bardziej sprzyjających okolicznościach matematyka się odradzała i nawiązywała kontakt z odkryciami

---

[7] Ibidem, s. 7–17.

[8] Dokładniejszą analizę koncepcji Hoene-Wrońskiego przedstawiłem w pracy *Józefa Hoene-Wrońskiego projekt reformy matematyki*, „Antiquitates Mathematicae”, Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Matematycznego, vol. 1, Warszawa 2007, s. 199–212. Pokazałem tam, między innymi, jak w oparciu o historiozofię Wrońskiego można śledzić rozwój pojęć matematycznych na przykładzie pojęć: szeregu nieskończonego, proporcji, odległości i wielkości niewspółmiernych.

epok poprzednich. Charakterystyczne dla okresu matematyki średniowiecznej, a szczególnie nowożytnej, jest mozolne odczytywanie i odzyskiwanie osiągnięć matematyki antycznej, której prace były w dużej mierze zagubione, zniszczone czy w inny jeszcze sposób utracone.

Pojawia się w pracy również polemika z koncepcją rewolucji naukowych, która przyjmuje, że w pewnych momentach dziejów nauki następuje przerwanie ciągłości jej rozwoju i wejście w inny paradygmat. Pojęciem „przełomu w rozwoju nauki" zastępuję pojęcie „rewolucji naukowej". Przełom w naukach nie dokonuje się nagle, lecz jest rozpoczęciem procesu trwającego wiele wieków, którego etapami są: nawiązanie do odkryć poprzednich epok, ich przyswojenie i zasymilowanie, dostrzeżenie sprzeczności w istniejącej strukturze wiedzy w kulturze, wytworzenie metod badawczych, które neutralizują wskazane sprzeczności, wejście nauki (w tym matematyki) w edukację, przyspieszenie rozwoju cywilizacyjnego prowadzące często do gwałtownych przemian społecznych, gospodarczych i kulturowych (pojawienie się techniki naukowej w III wieku p.n.e., rewolucja przemysłowa przełomu XVIII i XIX wieku, rewolucja informatyczna wieku XX). Uważam, że w matematyce obowiązuje jeden paradygmat, chociaż można wskazać kilka nurtów i wiele programów badawczych. Nie zgadzam się więc z wyróżnieniem przez Tadeusza Batoga dwóch paradygmatów w matematyce[9]: euklidesowego i teoriomnogościowego. Ten drugi ma zasadniczo odróżniać matematykę współczesną od klasycznej (powstałej w czasach antycznych). Jednak wyróżnienie różnych paradygmatów w matematyce zakłada, że porozumienie między poszczególnymi paradygmatami jest znacznie utrudnione, a raczej wręcz niemożliwe. W czasach nowożytnych powstało wiele całkiem nowych działów matematyki (m.in. teoria mnogości czy logika matematyczna), jednak dobre opanowanie danej teorii matematycznej (czyli wejście do jaskini jej paradygmatu) nie uniemożliwia poznania całkiem innych działów matematyki, a wręcz takie poznanie ułatwia. Sugeruje to, że warsztat matematyka jest właściwie jeden, mimo różnorodnych metod – jeden jest więc paradygmat matematyki.

Jednym z dodatkowych celów pracy jest próba zrozumienia czasów współczesnych poprzez analizę dziejów matematyki. Widząc analogię przemian dokonujących się współcześnie do okresów poprzednich, możemy dostrzec kształtowanie się nowej epoki. Aktualnie, w ramach kolejnego od początku dziejów przełomu, który dokonuje się w matematyce, widać powstające nowe idee i teorie matematyczne. Pojawia się kolejna odsłona uniwer-

---

[9] T. Batóg, *Dwa paradygmaty matematyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.

salności matematyki, która pozwoli niwelować występujące sprzeczności kulturowe i budować zręby nowej kultury.

Analiza poszczególnych przełomów w matematyce i otwierających się kolejnych aspektów jej uniwersalności pozwala na uchwycenie czterech pojęć podstawowych, które są obecne w matematyce od początku jej dziejów jako ogólne idee oraz matematyczne realizacje. Tymi pojęciami są: odpowiedniość, harmonia, podobieństwo oraz symetria. Jako pojęcia (idee) tkwiące w podstawach matematyki są nieustannym źródłem inspiracji w tworzeniu nowych teorii i stanowią kanały łączące matematykę z kulturą. Wraz z rozwojem matematyki (i całej kultury) dochodzą do nich kolejne treści. Do tych pojęć podstawowych można też dotrzeć, analizując strukturę najważniejszych obiektów matematycznych. Robię to w ostatnim fragmencie pracy, biorąc do analizy pojęcie krzywej. W odsłanianej w ten sposób strukturze obiektów matematycznych zawierają się w pewnym sensie całe dzieje matematyki i widać, jak „pracują" w kształtowaniu się tych obiektów pojęcia podstawowe. Dlatego dostrzeżenie i uwzględnianie tych pojęć jest istotne dla badań historii matematyki i pozwala, między innymi, brać udział w toczących się poprzez dzieje dyskusjach filozoficznych oraz wyznaczać kanony różnych wartości, w tym społecznych, poznawczych, etycznych i estetycznych.

Rozdział I
Rozwój matematyki konkretnej w kontekście greckiej paidei

1. Matematyka przedgrecka

Przed powstaniem nauki greckiej istniało kilka cywilizacji i kultur, w których pojawiła się zaawansowana matematyka. Przede wszystkim w Mezopotamii, w dorzeczu Tygrysu i Eufratu, gdzie rozwinęła się od czwartego tysiąclecia p.n.e. cywilizacja sumeryjska, a potem babilońska, w dorzeczu Nilu – egipska, a na Dalekim Wschodzie – w Indiach i Chinach.

W dorzeczu Tygrysu i Eufratu Sumerowie pojawili się około połowy piątego tysiąclecia p.n.e. i po pewnym czasie stworzyli wspaniałą kulturę istniejącą w południowej Mezopotamii przez ok. 2500 lat. Mieli rozwiniętą kulturę, naukę (szczególnie matematykę i astronomię), rozbudowany system wierzeń religijnych. Wznieśli wiele wspaniałych budowli, rozwinęli system pisma – od obrazkowego po ideograficzno-symboliczny. Posługiwali się językiem sumeryjskim, który zaniknął jako język mówiony w drugim tysiącleciu p.n.e., a przez jeszcze kilkanaście wieków używany był jako język nauki, literatury i obrzędów religijnych (aż do I wieku p.n.e.). Język sumeryjski jest najstarszym znanym językiem pisanym. Pod koniec trzeciego tysiąclecia Sumerowie zostali podbici przez Akadyjczyków, którzy przejęli ich kulturę (w tym pismo, zachowując jednak własny język) i cały dorobek cywilizacyjny. Na przełomie trzeciego i drugiego tysiąclecia p.n.e. zostali podbici i wchłonięci przez Babilończyków. Dziedzictwo akadyjsko-sumeryjskie było przejęte i rozwijane w Babilonie i Asyrii. Dorobek matematyczny i astronomiczny przypisywany Babilończykom pochodzi w dużym stopniu od Sumerów. Imperium Babilońskie istniało aż do 538 roku p.n.e., kiedy zostało podbite przez Persję, którą znów podbił Aleksander Wielki w roku 327 p.n.e. Jeden z wodzów Aleksandra, Seleukos, założył dynastię Seleucydów i utworzył państwo hellenistyczne, w którym matematyka sumeryjsko-babilońska była rozwijana aż do podboju przez Rzym w roku 63 p.n.e.

Już w III tys. p.n.e. Sumerowie wprowadzili znaki do oznaczania liczb. Najpierw pojawiły się tylko dwa podstawowe znaki: klin 𒁹 (cyfra jeden) oraz hak 𒌋 (cyfra dziesięć). Ten system liczbowy był systemem sześćdziesiątkowym (podstawą była liczba 60), wspomaganym systemem dziesiątkowym. Analogicznie do systemu rzymskiego, liczby od 1 do 59 były zapisywane poprzez kombinacje dwóch podstawowych cyfr, np. 41 wyglądało tak: 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹. Od 60 w górę zapis był zapisem pozycyjnym i podobnie jak w systemie używanym współcześnie rząd wzrastał od strony prawej zapisu do lewej, czyli zapis 𒁹 𒁹 oznaczał liczbę 61, a 𒁹 𒁹 𒁹 – 3661. Zapis pozycyjny umożliwiał wykonywanie w stosunkowo prosty sposób działań arytmetycznych na dużych liczbach (od 60). Systemu pozycyjnego nie używali ani Egipcjanie, ani Grecy, ani Rzymianie. Sumerowie natomiast stosowali znak okręgu do oznaczania zera, chociaż ten znak nie był u nich cyfrą, pełnił jedynie rolę zastępczą, gdy pojawiały się niejasności zapisu. Mieli również rozwiniętą wiedzę geometryczną, w tym znajomość sporządzania map, mierzenia powierzchni i objętości, znali tzw. twierdzenie Pitagorasa i badali wielokąty foremne. Już z okresu babilońskiego (1800–1600 p.n.e.) pochodzą tabliczki z rozwiązaniami równań pierwszego, drugiego, a nawet trzeciego stopnia[1].

W podobnym okresie (od początku drugiego tysiąclecia p.n.e.) rozwijała się matematyka w Egipcie. Była jednak na niższym poziomie niż matematyka sumeryjsko-babilońska. W obu cywilizacjach miała charakter przeważnie praktyczny, a do wyników dochodzono w sposób empiryczny (tak się przynajmniej wydaje). Pojawiały się problemy, które później zostały przypisane do arytmetyki, geometrii, trygonometrii czy algebry. Tu jednak nie nastąpiło jeszcze metodologiczne rozdzielenie tych dyscyplin matematycznych. Pojawiło się to dopiero w Grecji.

Co interesujące, pamięć o Sumerach zaginęła na przełomie starej i nowej ery. Nie było żadnych wzmianek w pismach greckich, babilońskich, perskich, egipskich i innych aż do wieku XIX, gdy w dokonywanych wykopaliskach wyłaniała się wspaniała cywilizacja i stopniowo odkrywane były kolejne budowle, przedmioty i tabliczki gliniane zapisane pismem sumeryjskim. Do tej pory odnajdywane są kolejne, coraz bardziej świadczące o potędze kultury i nauki Sumerów[2].

Wiedza matematyczna wypracowana przez Sumerów nie zaginęła jednak w starożytności. Była przejęta i rozwijana przez Babilończyków (a również Akadyjczyków i Chaldejczyków), a potem Greków. Sumerowie mieli więc istotny

[1] Por. H.L. Resnikoff, R.O. Wells, *Mathematics in civilization*, s. 23–28.

[2] Informacje na temat nauki i kultury Sumerów można znaleźć w następujących pracach: M.L. Bielicki, *Zapomniany świat Sumerów*, wyd. 4, PIW, Warszawa 1996; A. Mierzejewski, *Tajemnice glinianych tabliczek*, Wydawnictwo Iskry, Warszawa 1981; C.W. Ceram, *Bogowie, groby i uczeni*, wyd. 5, PIW, Warszawa 1975, s. 280–312.

wpływ na rozwój matematyki. Greccy uczeni często wspominali o wyjazdach do Egiptu i Azji, gdzie zdobywali wiedzę astronomiczną i matematyczną.

Już w tych cywilizacjach objawiła matematyka swój uniwersalny charakter jako idealne narzędzie do rozwiązywania praktycznych problemów, związanych z obserwacjami astronomicznymi, wymianą handlową, pomiarem gruntów, obliczaniem odpowiednich parametrów wznoszonych budowli. Dzięki precyzji matematycznych metod powstały odpowiednie narzędzia, imponujące konstrukcje i budowle. Matematyka rozwijała się, odpowiadając na potrzeby życia, i była w stanie na te potrzeby odpowiedzieć. Ponadto świat natury i świat tworów ludzkich dawały się ze sobą, dzięki matematyce, zharmonizować. Wraz z rozwojem człowieka kształtowały się i precyzowały idee matematyczne, pokazując kolejne obszary zastosowań. Do najważniejszych można zaliczyć idee wyodrębniania poszczególnych przedmiotów, odróżniania ich od siebie oraz określania ich własności jako wspólnych dla różnych, odrębnych przedmiotów, a przede wszystkim ideę odpowiedniości (konkretnym grupom przedmiotów odpowiadają liczby, liczbom cyfry, figurom geometrycznym fizyczne kształty, itd.). Szczególnie ważny jest związek między liczbą a cyfrą, a dzieje tego związku ukazują relację, jaka zachodzi między daną myślą, ideą a jej zapisem. Jak zauważa G. Ifrah, metoda liczenia za pomocą kamyków stała się podstawą pierwszego w historii systemu zapisu liczb, a potem pojawiły się coraz bardziej wygodne w użyciu – aż do znaków całkiem formalnych[3].

> Jest zrozumiałe, że historia powstawania cyfr przebiegała bardzo podobnie do dziejów pisma, choć oczywiście nie całkiem tak samo, bo pismo wymyślono nie tylko po to, by stworzyć graficzny obraz myśli utrwalić ją (taką potrzebę odczuwa każdy człowiek żyjący w społeczności na wyższym stopniu rozwoju), ale także i przede wszystkim po to, by zapisać artykułowaną umowę[4].

---

[3] Pierwszymi urządzeniami służącymi do zapisywania liczb były patyki czy kości, na których dokonywano odpowiednich nacięć, albo sznurki, gdzie kolejne liczby zaznaczano przy pomocy węzełków. W oparciu o te „urządzenia" dokonywano też prostych obliczeń. Ogromną pomocą w wykonywaniu działań arytmetycznych był abakus, wynaleziony najprawdopodobniej w Babilonii i używany przez Greków, Rzymian i narody Europy aż do XVIII wieku. Była to prostokątna tablica z wyrytymi pionowymi rowkami. W rowkach tych umieszczone były kamyczki – kamyczek w pierwszym rowku oznaczał 1, natomiast kamyczki w następnych rowkach – kolejne potęgi liczby 10. Urządzenie to wykorzystuje ideę systemu pozycyjnego, chociaż nie od razu został on rozpoznany w sposób abstrakcyjny. Odkrycie tego systemu stanowiło ogromny postęp w rozwoju cywilizacji. Dokonało się jednak w sposób pełny dopiero w kolejnym okresie dziejów.

[4] G. Ifrah, *Historia powszechna cyfr*, t. 1, tłum. K. Marczewska, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa 2006, s. 23.

Według Ifraha, wynalazek cyfry był jednym z największych w historii człowieka i pozwolił na dokonanie kolejnych wynalazków umożliwiających utrwalanie danych myśli. Wynalezienie alfabetu i pisma (co miało miejsce, jak wspomnieliśmy, po raz pierwszy u Sumerów) było więc naturalną konsekwencją odkrycia tego prostszego, bardziej podstawowego, związku między liczbą i cyfrą. Generalnie, tworzone idee matematyczne pozwalały na utrwalanie myśli i odkrytych idei oraz na kontrolę rzeczywistości, „panowanie" nad nią, ale w sposób harmonijny. Dla człowieka dostępne stały się niezmienne, trwałe i stałe wartości danych przedmiotów, np. ich wartość pomiarowa (wyrażona w liczbach) geometrycznie wielkość lub kształt czy wartość ekonomiczna, handlowa (też ujęta liczbowo).

Zanim jednak powstały takie cywilizacje, jak wspomniana sumeryjska czy egipska, podstawowe idee matematyczne i intuicje matematyczne rozwijały się już wcześniej przez wiele tysiącleci. Był to okres przygotowawczy, umożliwiający powstanie wspomnianych cywilizacji. Spójrzmy teraz, w jaki sposób przebiegało kształtowanie się tych matematycznych idei i pojęć. Wydaje się, że pierwszym odkryciem matematycznym człowieka było odkrycie (utworzenie) liczby[5]. Można powiedzieć, że to odkrycie tkwi u źródeł cywilizacji. Rodziło się ono stopniowo, będąc ściśle związane z doświadczeniem codziennego życia. Można postawić pytanie, czy było ono istotne dla przetrwanie gatunku ludzkiego? Wydaje się, że tak, ale w bardzo prymitywnej formie. Wszelkie bardziej rozwinięte formy społeczne domagają się opanowania sztuki liczenia. Przypuszcza się, że dopiero około 50 tys. lat temu w pewnych społecznościach ludzkich pojawiło się pojęcie liczby i człowiek opanował zdolność liczenia z wykorzystaniem „większych" liczb[6]. Jest to

[5] Nie rozstrzygam, czy liczby odkrywamy, czy konstruujemy. Najbliższa jest mi, zawarta w dialogu *Timajos,* koncepcja Platona, w której świat matematyczny konstruuje Demiurg, a człowiek poznaje ten matematyczny świat, mając jednak udział w konstruowaniu kolejnych obiektów matematycznych. Obiekty matematyczne nie są elementami świata idei. Jeśli używam słowa „idea" w stosunku do bytów matematycznych, mam na myśli ideę jako pomysł, koncepcję. W przypadku obiektów „podstawowych" (jak np. liczby, a właściwie ogólnej idei liczby) będę mówił o ich poznaniu, a w przypadku konkretnych rodzajów obiektów matematycznych (np. liczb wymiernych) – o konstruowaniu. Chociaż warto zaznaczyć, że u Platona nie istnieje ogólna idea liczby, a konkretne liczby są konstruowane. Por. Z. Król, *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona*, Wydawnictwo Rolewski, Nowa Wieś k. Torunia 2005, s. 109–117.

[6] Do tej pory jednak istnieją społeczności żyjące w Oceanii, Ameryce, Azji czy Afryce, które nie potrafią liczyć przy pomocy większych liczb. Potrafią w swoich językach nazwać liczby „jeden", „dwa" i „wiele". Poprzez zasadę odpowiedniości „jeden-jeden" i wykonywanie nacięć na patyczkach mogą przeliczać pewne przedmioty, jednak w ograniczonym zakresie.

bardzo późno, biorąc pod uwagę fakt, iż gatunek ludzki pojawił się na Ziemi ok. 2 miliony lat temu. Było to wydarzenie, które zmieniło diametralnie pozycję człowieka w świecie przyrody. Badania antropologiczne i psychologiczne pokazują, że na tzw. zerowym poziomie postrzegania liczby (tzn. bez treningu dotyczącego używania liczb) człowiek w sposób bezpośredni i natychmiastowy jest w stanie rozróżniać jedynie liczby 1, 2, 3 i 4. Takie pierwotne „poczucie liczby" (w zakresie kilku początkowych liczb i porównywania zbiorów elementów) posiadają również pewne gatunki zwierząt (na przykład małpy, psy czy niektóre ptaki). Rozróżnianie większych liczb domaga się opanowania sztuki liczenia i opracowania systemu znaków do zapisywania liczb. Jest to cecha typowo ludzka, związana z bardzo złożonymi procesami myślowymi, a przede wszystkim wymagająca operowania abstrakcyjnym pojęciem liczby. Ten proces musiał trwać wiele tysięcy lat, gdyż nawet „wiele współczesnych ludów pierwotnych również nie jest w stanie przyswoić sobie liczby jako pojęcia abstrakcyjnego. Czują i postrzegają liczbę, którą pojmują w sposób jakościowy, podobnie jak odbiera się zapachy, kolory, odgłosy czy też obecność jakieś osoby albo rzeczy należącej do świata zewnętrznego". Potrafią jednak w ograniczony sposób określać różne wartości liczbowe i wykonywać pewne działania[7]. Według Boyera potrzeba było wiele tysięcy lat, aby człowiek był w stanie oddzielić abstrakcyjne pojęcia od konkretnych obiektów i sytuacji, a pojęcie liczby wydaje się najprostsze i przez to pierwotne w stosunku do innych pojęć[8]. Autor zauważył nasuwającą się analogię między odkryciem liczb i wynalezieniem cyfr a odkryciem ognia (czyli rozpoznaniem go jako siły, którą można wykorzystać do swoich celów) i umiejętnością panowaniem nad nim (wydobywaniem go z przyrody, przenoszeniem do swoich domostw i wykorzystywaniem) oraz wynalezieniem technik jego wytwarzania. Oba te procesy, jako związane z rozwojem zdolności abstrakcyjnego myślenia, musiały przebiegać równolegle[9].

Potwierdzeniem tego, że bez opanowania umiejętności liczenia umysł ludzki nie sięga bezpośrednio poza liczbę „cztery", są odmiany liczb oraz liczebniki porządkowe. Na przykład w języku polskim piszemy „jeden dom", „dwa, trzy, cztery domy", natomiast dla wszystkich większych liczebników mamy uniwersalną odmianę „pięć, sześć itd. domów". W przypadku liczebników porządkowych, każdy z liczebników od 1 do 3 ma swoją charakterystyczną postać (pierwszy, drugi, trzeci; podobnie jest w języku angielskim –

[7] G. Ifrah, *Historia powszechna cyfr*, s. 45–61.

[8] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, New York 1989, s. 1–6.

[9] Ibidem, s. 3.

first, second, third), natomiast poczynając od czwórki, mamy jedną regułę tworzenia liczebników porządkowych poprzez dodanie przyrostka „ty” (czwarty, piąty, itd.[10]; analogicznie w języku angielskim przez dodania końcówki „th” – forth, fifth, sixth, itd.). Podobno wszystkie znane kultury i języki uwzględniają tę graniczną liczbę „cztery”[11].

Jedną z konsekwencji opanowania pojęcia liczby i technik ich zapisywania była możliwość rozwinięcia się wymiany handlowej. Do jej prowadzenia potrzebna jest bowiem umiejętność trwałego i ogólnego pojmowania wartości danego towaru, dodawania, odejmowania i porównywania tych wartości. Operowanie ogólnym pojęciem liczby (i opanowanie różnorodnych technik liczenia) okazało się doskonałym (i później już niezastąpionym) narzędziem usprawniającym i przyspieszającym wymianę handlową. Oczywiście, ta umiejętność okazała się przydatna również w wielu innych obszarach życia codziennego. Warto zauważyć, że rozwój cywilizacji był przez cały czas w istotny sposób związany ze wzrostem mocy obliczeniowej danej cywilizacji.

Rozwój cywilizacyjny związany był w istotny sposób z odkryciem idei formy geometrycznej, w tym przede wszystkim kolistości (koła, okręgu, kuli) oraz własności geometrycznych innych figur geometrycznych. I znowu, jak przypadku idei liczby, trudno jest wskazać moment, w którym pojawiła się idea formy geometrycznej. Czy pojawiła się ona motywowana potrzebami praktycznymi (jak uważa Herodot), czy sprawami kultu i rytuałami religijnymi (według Arystotelesa), a może kwestiami estetycznymi – trudno jest ustalić. Przychylam się do stanowiska Boyera, że bardziej istotny wydaje się motyw estetyczny. Jest to jednak podejście subiektywnie, albowiem wszystkie wspomniane czynniki mają swoje znaczenie. Początek geometrii (jak i całej matematyki) sięga bardzo głęboko w dzieje i jest starszy niż najdawniejsze cywilizacje, gdyż we wszystkich odkrytych cywilizacjach była już obecna geometria, jak i elementarna arytmetyka liczb. Potwierdzają tę tezę rysunki na ścianach i zachowane przedmioty codziennego użytku odkrywane w pracach archeologicznych. Wydaje się więc, że bez idei matematycznych nie byłby możliwy rozwój żadnej cywilizacji[12]. Podobnie jak w przypadku idei liczby, odkrycie idei formy geometrycznej[13] pociągało możliwość

10 Wprawdzie w przypadku setek i tysięcy reguła odmiany się zmienia (końcówka „-ny”) i kolejny raz zmienia się od miliona (końcówka „-wy”), jednak wiąże się to z wprowadzaniem kolejnych klas „dużych” liczb i reguły te dotyczą całych tych klas, a nie poszczególnych liczb.

11 Por. G. Ifrah, *Historia powszechna cyfr*, t. 1, s. 26–41.

12 C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 6–7.

13 Na początku operowania liczbami czy formami geometrycznymi trudno mówić o pojęciach liczby czy formy geometrycznej. Są to tylko idee, które dopiero z czasem uzyskały swoje doprecyzowanie i zostały zdefiniowanie. Nierzadko ten proces przebiegał wiele lat.

wykonywania pewnych (geometrycznych) operacji na nich (przekształcenia i konstrukcje geometryczne).

Odkrywano w rzeczywistości obecność pewnych struktur geometrycznych oraz opanowywano umiejętność ich generowania, wytwarzania, konstruowania i „umieszczania" w rzeczywistości. I tak odkrycie idei koła[14] dało możliwość konstrukcji „dobrych", symetrycznych kół, co umożliwiało sprawne przemieszczanie się i przenoszenie czy podnoszenie dużych ciężarów oraz wykonywanie precyzyjnych prac. Doprowadziło to, między innymi, do rozwoju transportu oraz rzemiosła (np. wynalazek koła jezdnego, garncarskiego, kołowrotka).

Niemożliwe zdaje się konstruowanie w sposób systematyczny różnorodnych kół bez posiadania ogólnej idei koła i jego własności. Wprawdzie kształty i ruchy kolisty występują w przyrodzie, jednak ich znaczenie i użyteczność nie jest bezpośrednio widoczna (np. kolistość gałki ocznej, tęczówki, ruch Słońca po nieboskłonie). Trzeba wznieść się do poziomu abstrakcyjnego myślenia, aby je dostrzec. Nie wystarczy obserwacja, podobnie jak bez znajomości języka nie możemy wychwycić treści zawartej w dźwiękach, które do nas docierają (jest to tylko szum).

Dzięki wynalazkowi koła jezdnego (nastąpiło to ok. 3500 lat p.n.e. w Mezopotamii) można było przy użyciu niewielkiej siły przemieszczać duże ciężary oraz zwiększyć szybkość i komfort poruszania się, a do tego istotnego znaczenia nabierało osiąganie „idealnej" symetrii koła. Koła były stopniowo doskonalone. Zaczęto ich też używać do różnych celów. Około roku 3200 p.n.e. pojawiło się również w Mezopotamii koło garncarskie, a 800 lat później – tokarka i kołowrotek. Następnie przyszedł czas na wykorzystanie koła do mielenia zboża (wynalazek ok. 500 roku p.n.e. żaren obrotowych) i niedługo później przekładni (400 lat p.n.e. w Egipcie) i kół wodnych (w 300 roku p.n.e. w Bizancjum). Umożliwiło to wynalezienie wielu urządzeń mechanicznych ułatwiających życie człowieka[15]. Ważne było to, iż pojawiającym się zastosowaniom kół w różnorodnych sytuacjach towarzyszyły analizy matematyczne własności figur geometrycznych (prowadzone przez Babilończyków, Egipcjan, Greków). Nawet jeśli użycie pierwszego koła do jakiegoś praktycznego celu nastąpiło przypadkowo, to dalsze zastosowania

---

[14] Zanim pojawiło się pojęcie koła, a więc definiujące je jednoznacznie właściwości, była tylko ogólna idea koła jako figury doskonale symetrycznej. Im większa jest „kolistość" danego skonstruowanego koła, tym sprawniej i efektywniej wykonywane są prace przy jego pomocy.

[15] B. Orłowski, Z. Płochocki, Z. Przyrowski, *Encyklopedia odkryć i wynalazków*, Wydawnictwo Wiedza Powszechna, Warszawa 1979, s. 142–148.

wynikały z systematycznych i ogólnych analiz własności geometrycznych. Odkrycie struktur (form, kształtów) geometrycznych występujących w przyrodzie wiązało się (podobnie jak w przypadku idei liczby) z rozwojem zdolności abstrakcyjnego myślenia oraz z wynalezieniem graficznych reprezentacji tych kształtów. Motywy geometryczne odkrywane na ścianach jaskiń pojawiły się już kilkadziesiąt tysięcy lat temu i poprzedziły wszelkie znaki służące do zapisu mowy. I znowu, jak w przypadku liczb, istotna jest tu prostota podstawowych kształtów geometrycznych (okrąg, trójkąt, kwadrat).

Dostrzeganie prostych zależności geometrycznych miało miejsce dzięki odkrywaniu form geometrycznych. Istotne jest jednak odkrycie stałych zależności. Jak pokazują analizy historyczne, ich odkrycie przyczyniło się do szybszego rozwoju cywilizacyjnego. Te zależności wyrażone, między innymi, w twierdzeniu Talesa oraz twierdzeniu Pitagorasa (znanym już Babilończykom) pozwoliły na rozwój astronomii, sztuki nawigacji (określania położenia na morzu, dzięki wynalezionemu przez Hipparcha astrolabium, który pozwalał na mierzenie kąta położenia gwiazd nad horyzontem) oraz umożliwiły sporządzanie kalendarzy (w oparciu o obserwacje położenia planet i gwiazd), map oraz rozwój architektury i różnorodnych technik pomiaru. Przez wybranie danego odcinka czy kwadratu (jako odpowiednio odcinka czy kwadratu jednostkowego, podstawowego) można było wyznaczać długości różnych krzywych czy powierzchni. To dzięki znajomości podstawowych zależności geometrycznych Egipcjanie, Babilończycy, Grecy i inne ludy starożytnego świata były w stanie wznieść monumentalne budowle, wykorzystać Nil do odpowiedniego nawadniania pól i konstruować różnorodne urządzenia mechaniczne. Te zastosowania matematyki nie dopuściły do realizacji pokusy (jaka pojawiła się pod koniec starożytności i na początku średniowiecza) eliminacji matematyki ze sfery kultury, chociaż, przykładowo, dostępna Grekom możliwość odbywania dalekich podróży morskich została na wiele wieków zatracona, z powodu nieprzyjęcia i braku opanowania przez Rzymian odpowiednio zaawansowanych narzędzi matematycznych[16].

2. Kierunki rozwoju matematyki i nauki greckiej

Powszechnie uznaje się, że w VI wieku p.n.e., w trzech filozoficznych szkołach: milezyjskiej, pitagorejskiej i eleackiej, rodzi się nauka europejska. Szkoły te sformułowały i przekazały kolejnym pokoleniom główne zagadnienia, problemy i idee, które od tamtej pory kształtują kulturę europejską.

---

[16] L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 251–256.

Grecy przejęli pewną liczbę odkryć od Babilończyków i Egipcjan i, poprzez dostrzeżenie ogólnego charakteru odkrytych faktów, stworzyli pierwsze dyscypliny naukowe: astronomię, geometrię i arytmetykę oraz teorię harmonii (muzycznej). Jeśli chodzi o algebrę (rozwijaną przez Sumerów i Babilończyków), to dopiero grecki matematyk Diofantos, żyjący w III wieku n.e., rozszerzył wyraźnie wcześniejszą wiedzę, wprowadzając notację algebraiczną (symbolika działań pojawiła się w czasach nowożytnych) i metody rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia (nie podając jeszcze ogólnych wzorów)[17]. Natomiast właściwy czas dla algebry jako niezależnej dyscypliny matematycznej przyszedł dopiero pod koniec średniowiecza i w czasach nowożytnych.

Dyscypliny wyżej wymienione zostały później nazwane matematyką, która oznaczała po prostu wiedzę (słowo „matematyka" wywodzi się od słowa *máthēma*, odpowiadającego ogólnie wszelkiemu przedmiotowi studiów). Równolegle zaczęto rozwijać ogólną wiedzę o świecie (nazwaną kosmologią) oraz o metodzie budowy nauki i dochodzenia do prawdy (czyli dialektykę). Te dziedziny zostały nazwane znów filozofią, czyli umiłowaniem mądrości.

Z biegiem czasu tak zakres matematyki, jak i filozofii rozszerzał się, obejmując kolejno mechanikę, optykę, hydrostatykę, a później trygonometrię i algebrę (w ramach matematyki) oraz ontologię, epistemologię, antropologię, psychologię, etykę i politykę (w ramach filozofii). Rozwijane przez Greków były również inne dziedziny wiedzy: gramatyka i retoryka (nazwane później naukami humanistycznymi) oraz medycyna (mająca swoją naukową podbudowę w koncepcjach greckich kosmologów i przyrodników) i prawo (mające swoje źródło w prawodawstwie miast-państw greckich oraz w filozofii społecznej), które później do stanu doskonałości doprowadzili Rzymianie).

Początek greckiej matematyki pokrywa się więc z początkiem rozwoju wszelkiej ogólnej wiedzy i myślę, że nie jest to przypadek. Wszystkie podstawowe metody naukowe albo odkryte zostały w matematyce, albo przez nią najpełniej uchwycone i wykorzystane. Również najważniejsze idee kształtujące kulturę starożytnej Grecji miały swoje źródło w matematyce.

Przyjrzyjmy się najpierw temu, co wydarzyło się u początków greckiej matematyki w szkołach jońskiej (milezyjskiej) i pitagorejskiej, które reprezentują odpowiednio Tales z Miletu i Pitagoras z Samos. Szkoły te powstały na początku VI wieku p.n.e. i w pewnym stopniu dominowały przez wiek VI i V. Powstałe w późniejszym okresie kolejne szkoły i ośrodki naukowe

---

[17] *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, tłum. S. Dobrzycki, t. 1, PWN, Warszawa 1975, s. 157–165.

(szkoła eleatów, atomistów, Akademia Platona czy Likejon Arystotelesa) korzystały w znacznym stopniu z dorobku tych pierwszych szkół.

Mimo że nie ma żadnych zachowanych znaczących matematycznych (i innych naukowych) dokumentów – aż do czasów Platona w IV wieku, to dokonane w okresie od VI do początku IV wieku odkrycia wyznaczyły cały późniejszy rozwój matematyki. Była to praca duchowa, nieomal heroiczna, gdyż otwierano całkiem nowe obszary wiedzy, przy braku szerszego poparcia. Dokonane odkrycia wzbudzały z czasem coraz większe zainteresowanie. Tych odkryć dokonała nieliczna grupa matematyków (filozofów), z których najważniejsi to (nie licząc Talesa i Pitagorasa): Filolaos i Archytas z Tarentu, Hippazos z Metapontu, Demokryt z Abdery, Hippiasz z Elidy, Hipokrates z Chios, Anaksagoras z Kladzomen oraz Zenon z Elei[18]. Zostały odkryte i sformułowane paradoksy i problemy, które zdawały się podważać wartość matematycznej metody badań, a z drugiej – wyznaczyły kierunek badań matematycznych i były impulsem do dalszego jej rozwoju. Matematyka bowiem, odnosząc się do postawionych trudności, rozwinęła swoją strukturę, metody badawcze i wygenerowała wiele zastosowań technicznych. Matematyka stała się też przedmiotem refleksji filozoficznej, a budowane klasyfikacje nauk przyznawały matematyce przeważnie rolę podstawową. Stała się w końcu wzorem prawdziwej wiedzy.

2.1. Matematyka w szkole milezyjskiej

Nieprzypadkowo Tales z Miletu, żyjący na przełomie VII i VI wieku p.n.e., uznawany jest za ojca zarówno filozofii, jak i matematyki europejskiej. Połączenie tych dziedzin wiedzy jest nie tylko symboliczne, łatwo bowiem zauważyć trwający przez całe wieki ich związek. Ten związek jest już widoczny na przykładzie centralnej idee filozoficznej Talesa, przedstawiającej wodę jako arche. Tales, poszukując elementu niewyczerpalnego, z którego wszystko powstało i ciągle powstaje, który jest zasadą świata i mechanizmem jego funkcjonowania, dostrzega i rozpoznaje właśnie wodę. Argumentami przemawiającymi za jej wyborem są: powszechność jej występowania, zdolność do przemiany i występowania w różnych stanach (stałym, ciekłym i gazowym) oraz fakt, że wszystko, co żyje i wzrasta, potrzebuje wody. Myślę, że za wyborem wody jako arche przemawiały również „mocniejsze” argumenty, a były one natury matematycznej.

Talesowi przypisywanych jest kilka odkryć matematycznych. Tales jednak nie pisał, trudno więc poznać wprost tok jego rozumowania. Można je

[18] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 73–93.

poznać jedynie pośrednio, poprzez analizę koncepcji rozwijanych przez jego następców czy opinii wygłaszanych na temat jego osiągnięć naukowych. O Talesie pisali przede wszystkim Eudemos z Rodos (żyjący na przełomie IV i III wieku p.n.e. uczeń Arystotelesa), w swojej historii geometrii i astronomii – i, dużo później, Proklos (412–485), w *Komentarzu do pierwszej księgi Elementów Euklidesa*, oraz Diogenes Laertios w *Żywotach słynnych filozofów* (III wiek n.e.). Wspomniani Autorzy przypisują Talesowi następujące twierdzenia[19]:

(1) Okrąg jest podzielony na połowę przez swoją średnicę.
(2) Kąty przy podstawie dowolnego trójkąta równoramiennego są podobne (równe).
(3) Jeśli dwie proste równoległe są przecięte trzecią, to kąty odpowiadające są równe.
(4) Jeśli dwa trójkąty mają odpowiednio dwa kąty i jeden bok równe, to są równe (przystające).
(5) Kąt oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Ponadto przypisuje mu się dowodzenie przynajmniej niektórych z tych twierdzeń w sposób czysto abstrakcyjny. Nawet jeśli matematyczne dowody zostały wykonane dopiero przez następców Talesa, to widoczne jest, że w tym okresie rodzi się potrzeba dowodzenia w sposób dedukcyjny, pozaempiryczny twierdzeń matematycznych. Matematyka odkrywa swój abstrakcyjny wymiar. A na zarzut niepraktyczności takich rozważań i wyników pokazywał podobno Tales ich zastosowania (obliczał wysokość piramid i odległość okrętu na morzu od brzegu). Uzasadniał, że abstrakcyjny charakter matematyki jeszcze zwiększa jej praktyczne możliwości.

Poza geometrią i filozofią (kosmologią) istnieje jeszcze trzecia dziedzina wiedzy, którą zajmował się Tales i jego uczniowie – jest nią astronomia (jest również uznawany za pierwszego greckiego astronoma). Jej związek z matematyką jest bardzo ścisły. Przez wiele wieków uznawana była za dziedzinę matematyki i to właśnie z matematycznych analiz związanych z astronomią narodziła się trygonometria. Jednak dopiero w pracach Hipparcha, żyjącego w II wieku p.n.e., astronomia uzyskała status dyscypliny w pełni naukowej, a trygonometria rozpoczęła rozwój jako samodzielny dział matematyki.

Uczeń Talesa, Anaksymander (ok. 610–546 p.n.e.), jest znany jako autor pierwszej pracy naukowej o przyrodzie. Praca ta była czytana i komentowana przez kilka pokoleń greckich uczonych, jednak z czasem zaginęła. Praca ta jest przykładem pasji racjonalnego badania świata, która go całko-

[19] T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 1, Dover Publication, New York 1981, s. 128–140.

wicie pochłonęła. Wprowadził bardzo interesującą koncepcję kosmologiczną. Według niego Ziemia jest krótkim walcem, a my żyjemy na jednej z jego podstaw. Jest swobodnie zawieszona w środku wszechświata, bez żadnego podparcia, a utrzymywana jest w równowadze dzięki równej odległości od punktów ekstremalnych i od innych otaczających ją ciał niebieskich.

Grecy znali zegary słoneczne od Babilończyków i Egipcjan, podobnie nauczyli się od nich konstruować mapy. Anaksymander jednak skonstruował mapę całego świata, a nie tylko poszczególnych rejonów (jak Egipcjanie), zaznaczając kształty i granice lądów i mórz (odważna ekstrapolacja), natomiast jego zegar miał bardzo „rozbudowane" funkcje: pokazywał nie tylko czas w ciągu dnia, ale również pory roku, dni przesilenia i równonocy[20]. Zajmował się też problemem kwadratury koła (znalezienie kwadratu o polu równym polu danego koła) i próbował dać czysto abstrakcyjne rozwiązanie tego zagadnienia.

Można więc powiedzieć, że w szkole milezyjskiej pojawiły się dwie abstrakcyjne dziedziny wiedzy, mające swoją autonomię (i rodzące się stopniowo wraz z nimi metody badawcze) – były to geometria i kosmologia (filozoficzna). W znaczącym stopniu oparte były na wiedzy babilońskiej czy egipskiej, jednak osiągnęły niespotykany wcześniej poziom abstrakcji i niezależności od bezpośrednich zastosowań praktycznych. Jak zauważyłem, takie zastosowania miały jednak miejsce, chociaż były one „produktem ubocznym" rozwoju teorii. Dzięki wzrastającej niezależności od konkretnych doświadczeń, ścisłości pojęć, abstrakcyjności i uniwersalnemu charakterowi dowodów wzrastała liczba zastosowań matematyki.

Zauważmy, że w przypisywanych Talesowi (i jego szkole) twierdzeniach zawarte były idee, które stały się częścią kultury greckiej. Tymi ideami są: idea podobieństwa (związana z twierdzeniem o proporcjonalności odcinków utworzonych na ramionach kąta przez proste równoległe) oraz idea symetrii (związana z twierdzeniem mówiącym, że każda średnica dzieli okrąg na połowy, czyli identyczne części – ukazuje ono doskonałą symetrię okręgu). W szkole milezyjskiej pojawia się jeszcze idea rozumowania dedukcyjnego, pozwalającego w oparciu o pierwotne „oczywistości" budować w sposób czysto racjonalny wiedzę o świecie i osiągać pewność wyprowadzanych wniosków, niespotykaną przy innych metodach. W przypadku rozumowania indukcyjnego czy poprzez analogię, nawet jeśli fakty, na których oparte jest wnioskowanie, są całkowicie pewne, poprawnie zaobserwowane i opisane, to i tak wnioski nie muszą być pewne. Natomiast w rozumowaniu

[20] Ibidem, s. 139–140.

dedukcyjnym mamy taki sposób wyprowadzenia z faktów akceptowanych nowych stwierdzeń, że czujemy się „przymuszeni" do uznania ich prawdziwości. Siła przekonywania i skuteczności rozumowania dedukcyjnego wydaje się nieprawdopodobna i pokazuje ogromne możliwości w rozbudowie posiadanej wiedzy. Kategoria (kryterium) oczywistości pojawia się tutaj w dwóch postaciach i miejscach: jako oczywistość prostych przesłanek, na których oparte jest rozumowanie, oraz oczywistość samego procesu wynikania (dedukowania). Metoda dedukcji pokazuje, że mamy dostęp do tego, co pewne (prawdziwe), i ten obszar pewności możemy w sposób czysto aprioryczny rozbudowywać. Jednak w metodzie dedukcyjnej tkwi też pewne ryzyko. W wielu przypadkach wystarczające są metody przybliżone, nie jest potrzebna absolutna pewność (wystarczy duży stopień prawdopodobieństwa), aby dojść do właściwych wyników. Wszystkie formuły i reguły, których nie dało się dedukcyjnie wyprowadzić, były przez Greków w konsekwencji odrzucane[21]. To bardzo zubożyło matematykę (i inne obszary wiedzy) w stosunku do matematyki rozwiniętej w Egipcie czy Babilonie. Z czasem jednak pozwoliło na rzeczywisty i znaczący przyrost wiedzy, przekraczający wiedzę zdobytą jedynie w oparciu o doświadczenie empiryczne i motywowaną potrzebami życia.

Wspomniane idee wrastają stopniowo w kulturę starożytnej Grecji i stają się z czasem jej nieodzownym składnikiem – tak w ramach różnorodnych nauk, jak i w literaturze, sztuce oraz przy budowie struktur społecznych. Omówię te kwestie dokładniej w dalszej części.

2.2. Matematyka w szkole pitagorejskiej

Założona na Półwyspie Apenińskim (w tzw. Wielkiej Grecji w połowie VI wieku p.n.e.) przez Pitagorasa z Samos (zmarł w Metaponcie ok. 500 r. p.n.e.) szkoła zajmowała się matematyką, filozofią, muzyką, astronomią i mistyką. Wszystkie te dziedziny były ze sobą powiązane i tworzyły wiedzę o doskonałym i harmonijnym świecie, nazwanym przez pitagorejczyków Kosmosem. Mieli znaczne osiągnięcia w zakresie geometrii, astronomii oraz kosmologii (filozofii przyrody). W ich badaniach szczególnego znaczenia nabrała arytmetyka i to właśnie oni uczynili z niej – z jednej strony – nową dziedzinę wiedzy abstrakcyjnej, a z drugiej – wiedzę ezoteryczną i mistyczną. Pitagorejska teoria liczb, jak również mistyka liczb stanowiły i stanowią niesłabnącą inspirację dla kolejnych epok. Odkryli oni i rozwijali ponadto nową dziedzinę matematyki – teorię harmonii muzycznej – która przez całe wieki

21 M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, s. 42–45.

zaliczana była do obowiązkowego kanonu wykształcenia (i ciągle jest obecna w wykształceniu muzycznym).

To w znacznej mierze dzięki pitagorejczykom matematyka uległa całkowitemu przeobrażeniu. Przede wszystkim stała się nauką *par excellence*, uzyskała jedność w oparciu o stosowaną metodę dedukcyjną (rozwinęli i udoskonalili tę metodę używaną już w szkole milezyjskiej) – nadali jej formę swobodnego kształcenia[22].

Niewiele z bogatego dorobku szkoły przetrwało. Większość zachowała się w komentarzach i częściowych odpisach u innych autorów starożytnych. Sama postać założyciela szkoły, Pitagorasa, owiana jest tajemnicą i jest na wpół legendarna. Podobno urodził się na wyspie Samos, a około roku 530 p.n.e. założył w południowej Italii, w mieście Krotona, związek pitagorejski. Pitagorejczycy zajmowali się nie tylko nauką i kwestiami filozoficzno-religijnymi, lecz również działalnością polityczną. To sprawiło, że z początku piątego wieku, po nieudanej akcji politycznej, zostali wygnani z południowej Italii i związek *de facto* się rozpadł. Część pitagorejczyków przeżyła i kontynuowała w różnych miastach greckich działalność filozoficzno-naukową. Filozofia pitagorejska była rozwijana aż do końca czwartego wieku p.n.e., a skończyła się wraz ze śmiercią jej ostatniego przedstawiciela Ksenofilosa z Aten. Natomiast zjawisko zwane pitagoreizmem było obecne przez cały okres starożytności i w pewnym sensie ciągle występuje jako żywa idea w rozważaniach nad matematyką. Do najsłynniejszych pitagorejczyków starożytności można zaliczyć: Filolaosa z Tarentu (ok. 470–399 p.n.e., rozwijał upublicznił nauki szkoły), Archytasa z Tarentu (428–347 p.n.e.), Hipokratesa z Chios (II połowa V wieku p.n.e.), Teodora z Cyreny (II połowa V wieku p.n.e.), Echekratesa z Lokroi (nauczyciel Platona), Teano (żona Pitagorasa), Nikomacha z Gerazy (II wiek n.e.).

O poglądach pitagorejczyków i samego Pitagorasa piszą różni greccy historycy, w tym Sotion z Aleksandrii (żyjący w II wieku p.n.e., *Sukcesje filozofów*), Diogenes Laertios, Herakleides z Pontu (387–312 p.n.e., *Streszczenie Sotiona*). Ten ostatni wspomina o licznych dziełach napisanych przez Pitagorasa, w tym: *O wszechświecie*, *Święty poemat*, *O duszy*, *O pobożności*. Znane są żywoty Pitagorasa napisane przez Porfiriusza (ok. 232–305), Jamblicha (250–326) i Anonima, w których rozwijają legendę Pitagorasa jako doskonałego uczonego, człowieka o nadludzkiej mocy.

Porfiriusz w swoim *Żywocie Pitagorasa* wspomina o podwójnej metodzie nauczania, jaką stosował Pitagoras – w rozwiniętych wykładach oraz

---

[22] *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 73–80.

przez symbole. Matematykami zwani byli ci, którzy zdobywali pełną wiedzę, natomiast akuzmatykami ci, którzy zapoznawali się tylko z najważniejszymi podstawami. Dla Pitagorasa badania matematyczne służyły do oglądu tego, co jest między bytami cielesnymi i niecielesnymi, i były wstępem do badań bytu rzeczywistego. Natomiast, nie będąc w stanie uchwycić pierwszych zasad,

> uciekli się do objaśnienia ich przez liczby. I tak pojęcie jedności, tożsamości i równości, jak też przyczynę przyjacielskiej zgody, wzajemnego afektu i trwania całokształtu rzeczywistości pozostającej zawsze taką samą i takim samym porządku, nazwali „jednym" (hen)[23].

Jak zauważa Jamblich, Pitagoras przyswoił wiedzę geometryczną Egipcjan, arytmetyczną Fenicjan oraz astronomiczną Egipcjan i Chaldejczyków, rozwinął ją, uporządkował, uczynił z niej wiedzę ogólną i przekazał swoim uczniom. Przekazał też nauki o dowodach, definicjach, podziałach i w krótkich symbolicznych zwrotach zawierał mnogość pojęć i zdarzeń, np. w sentencjach: „Zasadą całości jest połowa", „Wszystko jest podporządkowane liczbie", oraz w nazwach: „kosmos", „tetraktys"[24].

Jedną z najważniejszych kwestii jest ukazanie idei harmonii i jej powszechnego znaczenia – tak w różnorodnych dziedzinach nauki, jak i w całym obszarze kultury. Tę harmonię możemy poznawać i tworzyć dzięki liczbie i proporcjom liczbowym. Liczba (w znaczeniu całkowitej dodatniej) była dla nich substancją wszystkich rzeczy. Wszystko jest bowiem policzalne i uporządkowane przez liczbę, również zjawiska fizyczne możemy poznawać dzięki liczbie. Konstelacje na niebie są charakteryzowane zarazem przez liczbę tworzących je gwiazd, jak i przez ich geometryczny kształt (który też jest przedstawialny liczbowo), a ruch planet można wyrazić przez proporcje liczbowe.

Budując jedną teorię matematyki (łącząc geometrię, arytmetykę, astronomię, teorię harmonii muzycznej i ewentualnie kolejne), wskazywali na zgodność i harmonię występującą pomiędzy poszczególnymi dyscyplinami matematycznymi. Przejawem harmonii była więc matematyka, filozofia jako umiłowanie mądrości, a cały świat jako kosmos. Harmonia przejawiała się ponadto w metodzie analogii, symetrii, eurytmii (taniec) czy miłości.

---

[23] Porfiriusz, Jamblich, Anonim, *Żywoty Pitagorasa*, tłum. J. Gajda-Krynicka, Wydawnictwo Epsilon, Wrocław 1993, s. 16 i 20.

[24] Ibidem, s. 83. Tetraktys jest to trójkąt utworzony z dziesięciu punktów-liczb, mający dla pitagorejczyków symboliczne i magiczne znaczenie. Liczba 10 była dla nich liczbą doskonałą, liczbą wszechświata, jako suma wszystkich jego wymiarów: $10 = 1$ (punkt) $+ 2$ (linia prosta utworzona przez dwa punkty, odcinek) $+ 3$ (trzy punkty wyznaczające powierzchnię, trójkąt jako najmniejsza jednostka powierzchni) $+ 4$ (cztery punkty wyznaczające przestrzeń, czworościan).

Harmonia pełni u pitagorejczyków rolę arche, a matematyka pokazuje, w jaki sposób świat wyłania się z tej harmonii. Przykładowo, dla pitagorejczyków struktury matematyczne (między innymi tzw. złoty podział, czyli „boska proporcja") stały się podstawą opracowania kanonów architektury śródziemnomorskiej i ogólnie zasad sztuki, mistyki liczb, koncepcji człowieka i państwa. W ramach koncepcji pitagorejczyków realizowany jest więc projekt budowania jedności świata, człowieka i kultury w oparciu o liczby i inne obiekty matematyczne. Ten projekt realizowany jest *de facto* przez całe dzieje cywilizacji europejskiej aż do współczesności.

Dla pitagorejczyków liczba i stosunki liczbowe nie tylko pozwalają budować harmonię świata, ale sama liczba i poznanie jej zasad daje najwyższy stopień poznania. Poprzez poznanie natury liczb uczymy się łączyć sprzeczne elementy w spójną całość. Punktem wyjścia teorii liczb jest bowiem podział na dwa dychotomiczne „światy" – tego, co parzyste, i tego, co nieparzyste. Mamy więc w konsekwencji dwa rodzaje liczb, a matematyka pitagorejska polegała na poszukiwaniu przejścia i budowaniu harmonii między tymi dwoma światami (dwiema matematykami). Z jednej strony istniały dwie matematyki – liczb parzystych i liczb nieparzystych, ale najważniejsza była jednak matematyka harmonii, ukazująca liczby jako całość i przenosząca tę harmonię na całą rzeczywistość.

Ten podział liczb jest zasadą podziału bytu: po stronie liczby parzystej jest nieskończoność, chaos, nieporządek, a liczba nieparzysta wskazuje na to, co skończone, uporządkowane. W ten sposób powstaje pitagorejska nauka o przeciwieństwach – mamy dziesięć zasad, są nimi pary przeciwstawnych elementów: ograniczone – nieograniczone, prawe – lewe, dobre – złe, męskie – żeńskie, jasne – ciemne, spoczywające – poruszające się, proste – krzywe, kwadratowe – prostokątne, jedność – wielość, no i oczywiście przeciwieństwo najważniejsze: nieparzyste – parzyste.

To pitagorejskie podejście do wiedzy i świata widać najlepiej na przykładzie ich badań w zakresie geometrii. Badali własności geometryczne nie tylko dla ich możliwych zastosowań, ale, przede wszystkim, aby udoskonalić umysł i podnieść swoje życie na wyższy poziom duchowy. Badali obiekty geometryczne, aby poznać ich naturę.

Przypisuje się pitagorejczykom twierdzenie mówiące o tym, że suma kątów w dowolnym trójkącie równa się sumie dwóch kątów prostych, oraz twierdzenie ogólniejsze dla dowolnego wielokąta o liczbie n boków (kątów). Wówczas suma kątów wewnętrznych wynosi $2n - 4$. Interesujące jest też twierdzenie mówiące, że jedynymi wielokątami foremnymi, które wypełniają przestrzeń, jeśli je umieścimy razem wokół pewnego punktu jako ich wspólnego wierzchołka, są trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny[25].

Twierdzenia te dają pewną wewnętrzną charakterystykę wielokąta i są badaniem struktury powierzchni. Podobnie jest w przypadku twierdzenia Pitagorasa. Nie chodzi im jedynie o stwierdzenia faktu zawartego we wzorze $a^2 + b^2 = c^2$ (jeśli boki trójkąta spełniają ten warunek, to jest to trójkąt prostokątny, i na odwrót), lecz o badanie własności trójkątów prostokątnych i ukazywanie zależności z innymi faktami matematycznymi. Dlatego poszukują różnych dowodów tego twierdzenia oraz znajdują ogólny wzór pozwalający otrzymywać tzw. trójki pitagorejskie (trzy liczby naturalne [*a*, *b*, *c*] spełniające powyższy warunek). Następujący wzór: $a = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $b = m, c - \frac{1}{2}(m^2 + 1)$, pozwala otrzymywać nieskończenie wiele takich trójek. Dla celów praktycznych wystarczy tylko jedna taka trójka, np. dla $m = 3$ otrzymujemy trójkę (3,4,5). Taką trójką posługiwali się np. Egipcjanie dla wyznaczania kątów prostych.

Pitagorejczykom chodziło o poznanie rzeczywistości i do tego celu stosowali liczby i stosunki między nimi. Tym samym pokazywali racjonalną i matematyczną strukturę świata oraz siłę abstrakcyjnych metod poznania. W końcu odsłaniała się harmonia między racjonalną strukturą umysłu a światem.

Podsumowując, zauważmy, że dla pitagorejczyków matematyka stała się wzorem prawdziwej wiedzy. Stąd ich filozofia, jak i mistyka oraz kanony piękna i porządku (np. społecznego) miały korzenie matematyczne. W tej wizji świat był Kosmosem, a człowiek Mikrokosmosem.

Najbardziej spektakularna jest teoria harmonii muzycznej, w której harmonia dźwięków oparta jest o proporcje liczbowe, ale duże znaczenie mają też inne próby sprowadzenia całej matematyki i innych dziedzin poznania do arytmetyki (arytmetyzacja wiedzy). Po załamaniu się programu arytmetyzacji (odkrycie wielkości niewspółmiernych) realizowali program geometryzacji wiedzy. Mimo iż ten program też nie odniósł sukcesu, to jednak otworzył drogę do zaawansowanych badań algebraicznych[26].

2.3. Szkoła eleacka i dialektyka

Parmenides, założyciel szkoły eleatów, żył na przełomie szóstego i piątego wieku (ok. 540–470 p.n.e.). Był uczniem Ksenofanesa, chociaż nie kon-

[25] T. Heath, op. cit., s. 144.

[26] Por. T. Heath, op. cit., s. 150–154, oraz *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 85–96.

tynuował jego nauki, natomiast filozofią zafascynował się dzięki pitagorejczykowi Ameiniasowi. Jako pierwszy wprowadził ogólne pojęcie Bytu, który był tylko jeden, niezmienny, wieczny, ograniczony i niepodzielny, tożsamy z Prawdą. Nazywa się go pierwszym metafizykiem, a jego filozofia jest skrajnie monistyczna, antywariabilistyczna, aprioryczna i racjonalistyczna.

Dla matematyki istotne jest odkrycie przez niego metody dialektycznej (która była podstawą myślenia i dowodzenia dedukcyjnego). Znalazła ona najpełniejszy zastosowanie w dowodzeniu matematycznym, a również w logice, stworzonej przez Arystotelesa i stoików.

Dialektyka jest metodą dochodzenia do prawdy poprzez zbijanie, odrzucanie poglądów sprzecznych. Metodę dialektyki tworzy Parmenides wraz z odkrywaniem właściwości bytu[27]. Główna teza, na której wspiera się całe rozumowanie, stwierdza, że być i być pomyślanym jest tym samym. Chodzi o to, że nie istnieje myślenie bez przedmiotu myślenia. Czy w tej tezie mamy do czynienia z utożsamieniem bytu i myślenia, czy z ich przeciwstawieniem? Może i jedno, i drugie ma miejsce, ale istotne jest to, że myśl może wyrazić to, co istnieje, i tylko to, co istnieje. Poznawaną przez myśl rzeczywistość ujmują pojęcia. Pojęcia sprzeczne nie mogą więc opisywać niczego, co istnieje. Poprzez ich odrzucanie zostają pojęcia opisujące rzeczywistość (można powiedzieć – pojęcia dobrze zdefiniowane). W konsekwencji mamy pełną odpowiedniość między językiem a rzeczywistością.

Kolejną analizowaną kwestią jest stałość pojęć. Gdyby bowiem treść pojęcia ulegała zmianie, to *de facto* zmieniałoby się samo pojęcie. Pojęcie jest tym, czym jest, niczym innym być nie może (zasada tożsamości). Ponieważ zachodzi pełny związek między pojęciami i myślami a bytem (Parmenides pierwszy postawił zagadnienie stosunku poznania do poznawanego świata), więc niemożliwa jest ciągła zmienność zjawisk. Wynika to oczywiście z tego, że nie do zrealizowania byłby związek między stałymi pojęciami – jako tworami naszego umysłu – a zmiennymi zjawiskami, które te pojęcia opisują. To napięcie między stałością pojęć a zmiennością zjawiska prowadzi do wniosku, że to, co ujmujemy i opisujemy stałymi pojęciami, też musi być stałe.

Podsumowując, zauważmy, że to, co jest (i nic ponad to), może być wyrażone myślą i ujęte w pojęcia. Z tego „językowego" punktu widzenia (a więc poprzez analizę pojęcia tego, co jest) powstające nie istniałoby, zanim powstało, i powstałoby z tego, czego nie ma. Ponieważ powstające nie istniałoby, zanim powstało zanikające, w końcu i samo musi przestać istnieć. Prze-

---

[27] Por. W. Heinrich, *Filozofia grecka do Platona* (*rozwój zagadnień*), Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Kraków 1914, s. 105–121.

cież niemożliwe jest, aby tego, co jest istniejące, nie było. Musi być więc niezniszczalne, niepodzielne, nigdy niezrodzone, bez początku i końca, równomiernie rozłożone, ciągłe, przestrzennie skończone (ma kształt kuli), niepodlegające żadnej zmianie.

Przy wyprowadzaniu cech bytu Parmenides stosuje rozumowanie czysto dialektyczne. Spójrzmy jeszcze raz, jak wygląda to rozumowanie. Nie można bez sprzeczności powiedzieć, że to, co jest, powstało z tego, co nie jest. Bo inaczej założylibyśmy, że źródło, z którego coś czerpie swoje właściwości, jest i nie jest zarazem (jako nieistniejące nie może przekazać właściwości, których nie posiada). A siła dowodzenia polega na tym, że nigdy nie może być dowiedzione istnienie nieistniejącego.

Wszystkie rzeczy zachowują związek między sobą, a zarazem utrzymują własną odrębność. „Nie odsuniesz tego, co jest, od związku z tym, co jest, ani tak, by się wszędzie zupełnie rozproszyło (we wszechświecie), ani tak, by się w kupę zbiło”[28]. Dzięki tej uniwersalnej zasadzie zależności wszystkiego, co istnieje, od siebie nawzajem, z jednoczesnym obowiązywaniem zasady tożsamości – możliwe jest rozumowanie dedukcyjne, które w ramach wewnętrznej argumentacji prowadzi do zewnętrznej rzeczywistości.

Można sformułować następującą zasadę dialektyki:

Musi istnieć to, co opisuje system niesprzecznych pojęć, a to, co opisuje system sprzecznych pojęć, nie istnieje. Jeśli więc, dokonawszy analizy pewnego układu pojęć, zauważymy, że jest on wewnętrznie sprzeczny, to będzie to znaczyło, że to, co on niby opisuje, nie istnieje.

Częścią składową i podstawą dialektyki są następujące zasady:

- zasada pełnej odpowiedniości między systemem pojęć a rzeczywistością (tym, co istnieje);
- zasada stabilności i stałości pojęć, z której wynika zasada stałości bytu;
- zasada tożsamości – tak w znaczeniu logicznym, jak i ontologicznym;
- zasada niesprzeczności: nie można bez sprzeczności pomyśleć i ująć w pojęcia to, co nie istnieje;
- zasada zależności wszystkich elementów istniejących od siebie nawzajem.

Trzeba zauważyć, że koncepcja dialektyki Parmenidesa przeciwstawia się tak koncepcji Heraklita, jak i Pitagorasa. U Parmenidesa nie ma bowiem podziału (jak u Pitagorasa np. na liczby parzyste i nieparzyste, co pociągało za sobą dychotomiczny podział całej rzeczywistości) ani zmienności (jak u Heraklita) na poziomie bytu, lecz absolutna jedność i niezmienność. Wszak Heraklit głosił absolutną jedność bytu. Przywołajmy dwie jego myśli: „Nie

[28] Ibidem, s. 115.

mnie, lecz prawa posłuchawszy, dobrze jest przyznać, że wszystko jest jednością”[29]. Kolejna pokazuje jednak, że jedność budowana jest z rzeczy różnych: „Rozbieżne zbiega się z rzeczy różnych i powstaje najpiękniejsza harmonia. Wszystko powstaje ze sporu”[30]. Można powiedzieć, że u Heraklita proces dialektyczny to nie metoda dowodzenia, dochodzenia do prawdy, lecz cecha rzeczywistości. U Heraklita rzeczywistość pozwala się poznać poprzez ukazywanie harmonii. U Parmenidesa rzeczywistość sama nie wpadnie w nasze sieci poznania, bo jest nieruchoma. To my musimy ruszyć siecią myślenia dialektycznego, co pozwoli nam ominąć pozory bytu. Jest to takie dialektyczne „potrząsanie nieruchomym”.

Wydaje się, że mamy tutaj pewną niekonsekwencję. Przecież, według Parmenidesa, tylko byt istnieje i jest nieruchomy, natomiast niebytu nie ma. Czym jest wobec tego metoda dialektyczna, o której pisze i którą stosuje Parmenides? Nie może być bytem, ale nie jest też niebytem. Jest czymś, co wyrasta ponad podział „byt – niebyt”, transcenduje go. Sama metoda dialektyczna nie podlega metodzie dialektycznej, jak i poznawanie, której jest częścią.

3. Miejsce edukacji matematycznej w greckiej koncepcji paidei

Równolegle z rozwojem greckiej filozofii i nauki kształtowała się, związana z wychowaniem i nauczaniem, idea paidei[31]. Jest ona obecna w kolejnych epokach jako niezbędny składnik koncepcji wychowania i kultury. W idei tej chodzi o kształtowanie doskonałego człowieka (jako jednostkę, ale też obywatela i członka różnych społeczności) poprzez uczenie cnót i kształtowanie sprawności moralnych. Do tego potrzebny jest odpowiednio zorganizowany system nauczania, w którym ćwiczone i rozwijane jest ciało oraz wszystkie władze duszy. Temu celowi ma służyć nauczanie muzyczne, gimnastyczne, ale też wiedza matematyczna, dialektyczna, retoryczna i literacka[32]. Istotna była też bezpośrednia relacja ucznia (wychowanka) z nauczycielem, poprzez którą uzyskiwał wartości niemożliwe do zdobycia w inny sposób. W ten sposób mogła być osiągnięta sprawność duchowa (moralna, intelektualna) podnosząca poziom i jakość egzystencji. Kolejnym składni-

[29] Ibidem, s. 91.

[30] Ibidem, s. 96.

[31] W. Jaeger, *Paideia*, tłum. H. Bednarek, M. Plezia, Fundacja Aletheia, Warszawa 2001.

[32] Z czasem ukształtował się podział na dwa bloki nauk wyzwolonych: nauki matematyczne (*quadrivium*) oraz nauki humanistyczne (*trivium*).

kiem paidei jest ukazanie i włączenie w obszar kultury ponadczasowego i uniwersalnego ideału człowieka, do którego wszyscy mieli zmierzać w procesie edukacji. Edukacja miała dotyczyć każdego, niezależnie od płci i statusu społecznego, a czuwać nad nim miały instytucje państwa (edukacja powszechna i publiczna)[33]. Miała rodzić ludzi wolnych i dobrych (dzielnych moralnie), których cechowałaby szlachetność ducha (nowy rodzaj szlacheckości, „dobrego urodzenia", *καλοκάγατια*). Założono, że bez tak rozumianej edukacji niemożliwy jest rozwój kultury. Budowana w każdym człowieku harmonia miała być przełożona na harmonię w społeczeństwie i kulturze. W ten sposób jako elementy kultury powstawały: kultura fizyczna, muzyczna, matematyczna, dialektyczna (logiczna), retoryczna, literacka i inne. Tworzyła się coraz większa zażyłość ludzi z kolejnymi, coraz szerszymi obszarami świata kultury. W kształtowaniu się tego ideału kluczowe znaczenie miały greckie szkoły filozoficzne, z których jedną z ważniejszych ról odegrała Akademia Platona. To głównie poprzez działalność Akademii została ukazana centralna rola matematyki jako narzędzia kształtującego myślenie i otwierającego drogę do prawdy[34].

3.1. Matematyka w platońskim programie nauczania i wychowania

Platoński system nauczania i wychowania był ściśle powiązany z ideą Akademii, wprowadzaną w życie w stworzonej przez siebie instytucji, w której dominującym projektem były badania matematyczne jako droga do świata idei oraz budowa systemu filozoficznego (zawierającego wizję państwa idealnego i realnego, poglądy metafizyczne, etyczne i teoriopoznawcze). Istnieją poglądy, że pisane przez Platona dialogi były używane przez niego w Akademii do nauczania. Był to rodzaj podręczników, zeszytów ćwiczeń, poprzez które filozofia była nauczana i tworzona. Możliwe też, że niektóre dialogi nie były przeznaczone do publikacji, lecz jedynie do przerabiania ich w zamkniętym gronie uczniów Akademii, np. *Parmenides* czy *Timajos*[35]. Świadczyć ma o tym ich tajemnicza, niejasna i ezoteryczna forma. Szczegóły wyjaśniał sam Platon jedynie ustnie, uważając, że są prawdy, których przekaz jest możliwy jedynie w formie bezpośredniej, w żywym dialogu „mistrz-uczeń" (*ἄγραφα δόγματα* – nauka niepisana). Informacje o tej nauce niepisanej zawarte są w niektórych publikowanych po śmierci Platona pismach czy w pracach jego uczniów, np. u Arystotelesa.

---

33 Głównymi orędownikami takiego kształcenia byli Platon oraz Izokrates.

34 Por. H.I. Marrou, *Historia wychowania w starożytności,* tłum. S. Łoś, PIW, Warszawa 1969.

35 *Plato's Academy. Its Workings and Its History*, red. P. Kalligas, Ch. Balla, E. Baziotopoulou-Valavani, V. Karasmanis, Cambridge University Press, Cambridge 2020, s. 90–91.

Akademia istniała nieprzerwanie przez 300 lat aż do zniszczenia jej przez dowódcę rzymskiego Sullę w 86 roku p.n.e. Była strażnikiem dziedzictwa myśli Platona, przechodziła różne przemiany. Miała decydujący wpływ na filozoficzne i naukowe myślenie, a szczególnie interesujący jest jej wkład w rozwój matematyki tego okresu. Dla ukształtowania się greckiej dojrzałej matematyki istotne są badania metodologiczne Platona nad matematyką i jej podstawami. To Platon doprowadził ostatecznie do wyzwolenia się matematyki z presji doświadczenia i uczynił z niej naukę abstrakcyjną. Stało się to w czwartym wieku, w czasie pierwszego czterdziestoletniego istnienia Akademii, pod rządami Platona.

> I believe that it is more likely to suppose that at the time of Plato (at least) there had already been an interrelation between mathematics and philosophy, since most of the mathematicians of that time were also philosophers (Archytas, Theaetetus, Leodamas, Leon, Eudoxus, Menaechmus, Philips of Medme, Heraclides etc.). There mathematicians, who were all related to the Academy, worked out a transformation in mathematics and led geometry to its axiomatizations[36].

Sam Platon wskazywał na zasadniczą różnicę między metodą matematyczną a filozoficzną (dialektyczną), jednak widział konieczność ich współdziałania (droga w górę i droga w dół). I w Akademii takie współdziałanie miało miejsce.

Jak zauważa Vassilis Karasmanis w cytowanym artykule, w IV wieku Akademia stała się centrum badań matematycznych. Między pokoleniem Teodora z Cyreny (u którego uczył się matematyki Platon) a kolejnym pokoleniem Teajteta nastąpiła fundamentalna zmiana. Teodor interesował się tylko matematycznymi problemami i ich rozwiązaniami, nie dążył do ich uogólnień, nie interesowała go filozofia i dialektyczne dyskusje. Natomiast Teajtet był nie tylko matematykiem, ale też filozofem, dążył do stworzenia ogólnej teorii niewspółmierności, zajmowało go formułowanie definicji używanych pojęć matematycznych, ale też szerzej badał zagadnienia logiczne, etyczne i polityczne. Matematyczne problemy stały się obecne w intelektualnej atmosferze ówczesnych Aten. Jest to ewidentny wpływ Platona i jego Akademii. Pod wpływem Platona młodzi filozofowie stali się matematykami, nie porzucając dawnych upodobań. To Platon przekonał ich, że aby rzetelnie uprawiać filozofię, należy najpierw opanować sztukę matematycznego rozumowania. Zaprosił też matematyków do uprawiania filozofii, przekonał ich, że najwyższy stopień wiedzy dają badania hipotez, założeń, pojęć, metod wnioskowania. Są to już badania ponadmatematyczne (nazwane dialek-

[36] V. Karasmanis, *Plato and the Mathematics of the Academy,* [w:] *Plato's Academy,* s. 109.

tyką), oparte jednak na matematycznych wynikach i będące ich ukoronowaniem. Matematyka stała się więc miejscem, gdzie uprawiana była filozofia, na równi z badaniami matematycznymi i samym nauczaniem. Proklos w swoim *Komentarzu do I księgi Elementów* najważniejszych matematyków IV wieku wiąże z Platonem[37].

Oczywiście, idea akademii nie była wyłącznym dziełem Platona. Wzorował się na istniejących za jego życia i wcześniej szkołach filozoficznych, szczególnie na pitagorejskiej i eleackiej. Była to jednak nie tylko swoista *summa* tamtych idei, lecz istotne *novum*, polegające na połączeniu badań matematycznych z filozoficznymi, z jednoczesną refleksją nad zagadnieniami edukacyjnymi, antropologicznymi, kosmologicznymi i społecznymi. Jej zadaniem było też wpływać na kształt życia społecznego i politycznego poprzez kształcenie i formowanie ludzi. I rzeczywiście, Akademia miała istotny wpływ na sposób budowania kultury (ówczesnych Aten, a później europejskiej i jeszcze szerzej), w tym (publicznego i powszechnego) systemu nauczania. W idei akademii mamy do czynienia ze swoistą syntezą innych idei. Trzeba jednak pamiętać, że nie wszystkie ówczesne koncepcje zostały uwzględnione w badaniach Platona. Odrzucił przede wszystkim koncepcję Demokryta o spójności między poznaniem naturalnym i zmysłowym a wiedzą matematyczną i filozoficzną (która zakładała zarazem rozdział między tymi rodzajami poznania). Wizja Demokryta była wielką konkurencyjną (wobec Platońskiej) wizją budowania nauki oraz systemu edukacyjnego i społecznego. Według niego celem życia było osiągnięcie wewnętrznej równowagi, spokoju ducha. Należy unikać wszystkiego, co niszczy uczucie zadowolenia[38]. Mimo że uczucia zadowolenia i przyjemności są subiektywne, to dobro i prawda są wspólne dla wszystkich ludzi, bo wyrastają z natury. Natura i wychowanie są do siebie podobne, jedno i drugie bowiem kształtują człowieka, wychowanie tworzy w człowieku drugą naturę, dopełniającą tę pierwszą.

Dla Demokryta cały proces wychowania musi polegać na uczeniu się budowania, w sobie i wokół siebie, harmonii (czyli dobra, które obejmuje różne rodzaje rzeczywistości). W tym budowaniu harmonii konieczne jest poznawanie tak bytu-atomu (do czego niezbędna jest matematyka), jak i niebytu-próżni (tutaj potrzebne są kolejne nauki). Demokryt uważał, że próżnia istnieje nie mniej od bytu, tak byt, jak i próżnia są u początku rzeczywistości.

---

[37] Ibidem, s. 108–117.

[38] Ukazane poniżej poglądy Demokryta na temat edukacji oraz miejsca w niej dla kształcenia matematycznego są pewną rekonstrukcją zbudowaną w oparciu o znane nam jego metafizyczne i etyczne poglądy oraz kilka zachowanych uwag na temat wychowania. Z tych fragmentów można bowiem określić demokrytejski ideał filozofa.

Proces edukacji powinien zharmonizować te dwie grupy nauk, dzięki czemu stanie się skuteczny w przekazywaniu wiedzy o pięknie i harmonii świata oraz w budowaniu dobra w wychowankach. Niewłaściwe i destrukcyjne dla tego procesu jest ukazywanie nieusuwalnej opozycji między zmiennością i stałością, bytem i nicością oraz episteme a doksa. Zamiast kategorii „przeciwstawiania", kluczowa w procesie poznawania świata i wychowywania człowieka staje się dla Demokryta kategoria „dopełniania". Człowiek, naśladując naturę, tworzy różnego rodzaju rzemiosła, natomiast dopełnia je poprzez sztukę, jako swój wkład do tego, co daje nam natura. Podobnie poznanie rozumowe (w tym matematyczne) nie jest przeciwstawiane ciemnemu i niejasnemu poznaniu zmysłowemu, lecz stanowi jego dopełnienie. To łączenie i dopełnianie jest esencją wychowania, rodzi dobroharmonię i daje szczęście. Demokryt nawołuje, aby w przeżywaniu świata i w działaniach zawsze kierować się zasadą miary. Jej realizacja prowadzi człowieka do stanu doskonałości, daje mu eudajmonię – szczęście jako efekt pełnej harmonii wewnętrznej (ciała i duszy oraz wszystkich władz umysłu) i zewnętrznej (z innymi ludźmi i światem).

Idea akademii była kształtowana i rozwijana również przez późniejsze szkoły naukowe i filozoficzne (Likejon Arystotelesa, Ogród Epikura, Stoę, Szkołę Aleksandryjską i inne). Jednak można zaobserwować bardzo wyraźny wpływ Demokryta, który w wielu przypadkach przeważał. Idea ogrodu Epikura, jako miejsca uprawiania filozofii i nauk, jest przykładem budowania harmonii między człowiekiem a przyrodą (ogród natury), między ludźmi (ogród przyjaźni) oraz między naukami, filozofią a sztuką (ogród nauk i sztuk).

W dużej mierze poprzez ideę akademii kształtuje się ideał nauki, w którym świat był rozumiany i poznawany jako Kosmos i stał się podstawowym odniesieniem przy postrzeganiu i kształtowaniu człowieka i państwa (jako Mikrokosmosu). Triada „Świat–Państwo–Człowiek" stała się podstawą do budowania analogii między elementami tej triady, na których oparty został system kształcenia, wychowania (w tym politycznego). Zwornikiem całego systemu stało się Dobro (wspólne oraz indywidualne), idea prawdy (o świecie, o człowieku) i sprawności moralne, cnoty (w tym najważniejsza cnota sprawiedliwości jako podstawa wychowania i zarazem urządzania państwa przez ludzi realizujących tę cnotę). Do realizacji tego ideału potrzebne było takie wysubtelnienie i wzmocnienie umysłu (poprzez matematykę i inne nauki), aby był on zdolny całkowicie zapanować nad sferą zmysłów, uczuć i językiem. W ten sposób mogłoby dojść do przezwyciężenia fatum i chaosu (wychowanie dzielnego człowieka i budowanie doskonałego społeczeństwa). Podstawowym kryterium skuteczności procesu wychowania stała się zdolność do bezinteresownej kontemplacji prawdy i umiejętność dostrzegania jej w sobie i w innych. Pojawia się w ten sposób połączenie elitarności z egalitaryzmem oraz uniwersalizmem w zdobywaniu wiedzy.

W platońskim projekcie nauczania na każdym etapie edukacji należy w sposób harmonijny kształtować ciało i duszę. Ważną rolę miały ćwiczenia fizyczne (gimnastyka) oraz muzyka, jednak najważniejszą rolę pełniło nauczanie matematyki. Nauczanie powinno kształtować wolnego człowieka i wobec tego nauka powinna być podejmowana nie pod przymusem, lecz jako wyraz wolnego wyboru; dlatego, według Platona, na początku ma mieć charakter zabawy, podczas której nabywane są umiejętności praktyczne, takie jak: nauka liczenia, obliczania długości, pól i objętości oraz elementów astronomii. W kolejnych etapach trzeba przechodzić stopniowo do matematyki czystej, która odrywa się od świata cieni, materii i zmysłów.

Wielką metaforą platońską, ukazującą drogę do wolności i prawdy, jest „mit o jaskini", przedstawiony przez Platona na początku VII księgi *Państwa*[39]. Księga ta poświęcona jest miejscu matematyki w nauczaniu i jej roli w tej drodze do wolności i prawdy. Poza arytmetyką, geometrią i stereometrią (którą Platon proponuje wprowadzić do nauczania), szczególną rolę odgrywają astronomia i teoria harmonii muzycznej. Obie startują od doświadczenia zmysłowego: pierwsza zaczyna od wzroku, a druga od słuchu, i badają konkretne zjawiska związane z odpowiednimi doświadczeniami zmysłowymi. „Bodaj że tak, jak oczy zostały zbudowane dla astronomii, to znowu uszy są zbudowane dla ruchu harmonicznego i te dwie gałęzie nauki są jak dwie siostry"[40]. Trzeba jednak wznieść się od tych obrazów i dźwięków do zagadnień teoretycznych i badać „które liczby harmonizują, a które nie, i dlaczego tak robią jedne i drugie"[41].

I w końcu dochodzi się do wiedzy najwyższej, do sztuki mądrych rozmów, do dialektyki. „Tak samo i wtedy, kiedy ktoś z drugim mądrze rozmawiać zacznie, a nie posługuje się przy tym żadnymi spostrzeżeniami zmysłowymi, tylko się myślą zwraca do tego, co jest Dobrem samym; wtedy staje u szczytu świata myśli, podobnie jak tamten u szczytu świata widzialnego"[42].

Od początku procesu edukacyjnego matematyka jest tym rodzajem aktywności, który najbardziej rozwija pamięć i pobudza umysł do wysiłku i sprawia, że człowiek przekracza możliwości swojej natury.

---

39 Platon, *Państwo, Prawa,* op. cit., ks. VII.

40 Ibidem, s. 238.

41 Ibidem, s. 239.

42 Ibidem, s. 239–240.

> Bo jeżeli idzie o gospodarstwo i ustrój państwowy i wszystkie umiejętności, ani jeden przedmiot z tych, których się chłopcy uczą, nie ma tak wielkiego znaczenia, jak sprawność w posługiwaniu się liczbami. A największe znaczenie ma to, że ta umiejętność zasypiającego i niezdolnego z natury budzi i robi go zdolnym do nauki, i poprawia pamięć i bystrość tak, że zaczyna on robić postępy wbrew własnej naturze, a dzięki tej boskiej umiejętności[43].

Zauważmy, że dla Platona na tej edukacyjnej drodze do Dobra (znajdującego się ponad bytem) najważniejsza staje się umiejętność pomijania tego, co nieistotne i mające, według Platona, tylko pozory istnienia. Dzięki matematyce uczymy się poruszać po świecie idei, zmierzamy do opanowania najważniejszej z nauk – dialektyki. Natomiast dla Demokryta dobro stanowi doskonałą harmonię i syntezę świata, różnych obszarów rzeczywistości, nauk, rzemiosł i sztuki. Dla Platona najważniejsza w nauczaniu jest sztuka wybierania i pomijania (idea elitaryzmu, nauczania ekskluzywnego), a dla Demokryta – sztuka łączenia i harmonizowania (idea egalitaryzmu, nauczania inkluzywnego). Droga Platona jest ponadto drogą wzwyż, wchodzenia na szczyty świata i myśli, aby dotrzeć do prawdziwego bytu, w odróżnieniu od drogi Demokryta, która jest drogą w głąb, gdzie znajduje się ukryty przed zmysłami byt, rozpoznawany jedynie przez umysł. W obu koncepcjach matematyka odgrywa kluczową rolę, jeśli jednak dla Platona jest siłą pozwalającą wyrwać się z niewoli zmysłów, to dla Demokryta rozjaśnia ciemną wiedzę zmysłową, ukazuje jej wartość poznawczą, łączy ją z wiedzą o bycie.

Należy wspomnieć o jeszcze dwóch koncepcjach edukacyjnych, które miały duże znaczenie dla utworzenia greckiej idei paidei, w których jednak rola matematyki była znacznie mniejsza. Były to koncepcje rozważane w szkołach Izokratesa oraz Arystotelesa.

Izokrates (436–338 p.n.e.), zwany ojcem humanizmu, głosił potrzebę kształcenia powszechnego. Swoją szkołę, która podobnie jak Akademia Platona miała za zadanie wpływać poprzez edukację i uprawianą naukę na życie społeczne i polityczne, założył niedaleko Likejonu. Najważniejszą z nauk stała się dla niego sztuka retoryki, do której przygotowaniem były inne nauki. Retoryka była szczytem procesu edukacji. Chodziło mu o wykształcenie dobrych polityków, umiejących wpływać na sprawy państwa i działających dla jego dobra. Ludzie ci musieli jednak posiadać szeroką wiedzę w zakresie różnych nauk, być miłośnikami i mistrzami słowa oraz kierować się mocnymi zasadami moralnymi. Podobnie jak Platon zakładał, że pomiędzy sprawnością fizyczną a kulturą umysłową musi istnieć pełna równowaga i harmonia. Wprowadził jako niezbędne w procesie edukacyjnym cztery

[43] Ibidem, s. 441.

bloki przedmiotów: blok literacki, filozoficzny (umiejętności dialektyczne i retoryczne), historyczny oraz matematyczny.

Matematyka pełniła rolę narzędzia kształtującego precyzję myślenia i wypowiadania się, dobierania odpowiednich argumentów w realizacji ustalonych celów, a ponadto uczyła systematyczności i odwagi myślenia. Bez przygotowania matematycznego (opanowania języka matematyki i metod dowodzenia) mowa nie była w stanie wykorzystać swojej mocy i służyć do budowania odpowiednich relacji społecznych[44].

3.2. Matematyka w systemie nauczania Arystotelesa

We wszystkich wspomnianych koncepcjach, tak również i u Arystotelesa (384–322 p.n.e.), celem wychowania było uczynienie człowieka szczęśliwym. Do tego potrzebne było jednak osiągnięcie doskonałości (stanu wewnętrznej, ale i zewnętrznej harmonii). Niezbędne było zatem uprawianie filozofii, różnych nauk oraz kształtowanie sprawności moralnych oraz intelektualnych. Arystoteles założył w 335 roku p.n.e. na przedmieściach Aten, przy świątyni Apollina, swoją szkołę – Likejon – która stała się centrum badań naukowych i filozoficznych. Stworzył i rozwinął wiele dyscyplin, obejmujących nauki teoretyczne, praktyczne i wytwórcze. Szczególną rolę odgrywały trzy: metafizyka (jako jedna z nauk teoretycznych, obok matematyki i fizyki, zajmująca się poznaniem bytu jako takiego), etyka (jedna z nauk praktycznych jako teoria cnót) i stworzona przez niego logika. Uprawianie tych nauk było istotnym elementem na drodze do doskonałości, dobra i szczęścia.

Jak wiadomo, dla Platona najważniejsza była dialektyka, której uprawianie pozwalało na osiągnięcie doskonałości moralnej, była ona drogą do Dobra i prawdziwej wiedzy i badała podstawy nauk (przede wszystkim matematyki). Zbudowane przez Arystotelesa logika, metafizyka oraz etyka pokazywały, jak możliwa jest sztuka dialektyki. Dopiero te trzy nauki razem pokazywały, czym jest i jak działa dialektyka.

Arystoteles zauważył bowiem, że aby budować w sobie cnoty etyczne (męstwo, umiarkowanie, wielkoduszność, sprawiedliwość, itd.), należy najpierw posiąść cnoty dianoetyczne (czyli rozumowe). Przeważnie cnota etyczna jest „złotym środkiem" pomiędzy złem niedomiaru a złem nadmiaru (np. cnota męstwa powstaje jako efekt „racjonalnego wyważenia" między tchórzostwem a brawurą). Wiedza (nauka), jako kształtująca cnoty dianoetyczne, jest więc niezbędna do osiągnięcia stanu szczęścia, czyli doskonałości.

---

[44] Por. H.I. Marrou, *Historia wychowania w starożytności*, s. 129–145.

Natomiast logika stanowiła niezbędne wprowadzenie do wszystkich nauk, miała być nauczana jako narzędzie porządkujące nauki, świat i myślenie oraz narzędzie apriorycznego uzyskiwania wiedzy. To ona, budując i ukazując porządek świata, pozwalała poznać świat jako kosmos, a w przypadku człowieka i struktur społecznych uczyła, jak ukształtować doskonałego i szczęśliwego człowieka i zrealizować państwo „optymalne", dające możliwość osiągnięcia szczęścia przez obywatela. Logika była dla Arystotelesa logosem objawiającym się w formach i strukturach języka oraz świata – była więc nie tylko środkiem, ale i idealnym celem edukacji oraz poznania[45].

Okazuje się w końcu, że ranga nauk matematycznych w całym systemie nauk nie jest taka mała. Arystoteles zauważa, że nauki matematyczne mówią również o pojęciach dobra i piękna, gdyż charakteryzują się w swojej strukturze pięknem, porządkiem, symetrią i wyrazistością, a ponadto same zajmują się badaniem tych zagadnień. Nie można więc pominąć matematyki w procesie edukacji również dlatego, że te cechy to ona właśnie najpełniej ukazuje i realizuje. Nauki matematyczne mają też ścisły związek zarówno z rzeczami zmysłowymi, jak i pojęciami ogólnymi, są więc naturalnym pośrednikiem między tymi rodzajami wiedzy i pozwalają zachować jedność nauki i procesu edukacyjnego.

Warto zauważyć, że zbudowany przez Arystotelesa Likejon był nowego rodzaju jednostką edukacyjno-naukową, wykraczającą poza ideę Akademii i zapowiadającą nowy rodzaj instytucji naukowych. Podejmowano w nim bowiem wszelkiego rodzaju badania, w tym w zakresie nauk przyrodniczych, psychologicznych i innych. Stał się swoistym centrum badawczym, gdzie wszystkie nauki mogły być reprezentowane, rozwijane i tworzone nowe. Jego szkoła funkcjonowała pod protektoratem państwowym (Aleksandra Macedońskiego), co też stało się typowe dla tego typu instytucji. Zgodnie z ideą Likejonu została utworzona krótko po śmierci Arystotelesa, pod patronatem Ptolemeuszów, władców Egiptu, Biblioteka Aleksandryjska i Musejon. Potem przez kolejne wieki powstawały dalsze tego typu instytucje. W ramach prowadzonych tam badań powoli krystalizują się osobne działy nauki. Wyłaniają się one głównie z filozofii przyrody, ale również z filozofii społecznej. Niektóre nauki rodzą się na styku różnego rodzaju badań, na przykład medycyna zaczęła się kształtować jako osobna nauka (na styku filozofii przyrody, filozofii człowieka i etyki) głównie dzięki pracom Arystotelesa i jego następców, z których najważniejszy był, żyjący na przełomie IV i III wieku p.n.e., Herofilos (prekursorem był Hipokrates z Kos, ży-

[45] Por. Arystoteles, *Topiki,* tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie,* t. 1, Warszawa 1990.

jący na przełomie V i IV wieku p.n.e.), a jednym z następców – rzymski lekarz Galen (ok. 130–216 n.e.)[46]. Naukowy charakter medycyny określony był głównie przez jej związek z filozofią przyrody, chociaż traktowana była też jako pewien rodzaj rzemiosła i sztuki. Ważny był też jej związek z etyką, czyli z filozofią praktyczną (przysięga Hipokratesa)[47].

---

[46] Rozwijana była przykładowo teoria humoralna Hipokratesa (w organizmie istnieją cztery soki – krew, śluz, żółć i żółć czarna – a zdrowie polega na utrzymywaniu odpowiedniej równowagi tych płynów), oparta na koncepcji czterech żywiołów (wody, powietrza, ognia i wody) Empedoklesa. Herofilos, którego dzieła zaginęły (cytowany jest przez następców, głównie przez Galena), uznawany jest za twórcę medycyny naukowej. Wykonywał liczne sekcje zwłok, poznawał anatomię i fizjologię człowieka, opisał dokładnie pracę serca, płuc, tętnicy, układ trawienny (w tym szczegółowo dwunastnicę) oraz stwierdził, że mózg jest centrum układu nerwowego, który był też przedmiotem jego badań.

[47] J. Brun, *Arystoteles i Liceum*, tłum. H. Igalson-Tygielska, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Rozdział II
Matematyka abstrakcyjna

1. Matematyka w kontekście sprzeczności kulturowych. Paradoksy, antynomie i aporie starożytnych

Rodzące się cywilizacje i kultury przyjmowały, że u początku świata był chaos, który musiał zostać przezwyciężony, aby świat mógł powstać (mit pierwotnego chaosu). Paul Ricoeur zauważył, że poza tym mitem można wskazać jeszcze trzy, które w różnej postaci są przywoływane we wszystkich kulturach: mit upadku (jakiegoś irracjonalnego wydarzenia, które uniemożliwia korzystanie przez człowieka ze skarbów i doskonałości świata), mit tragicznego losu (fatum, który z nieuchronną koniecznością kieruje losem człowieka i świata, sprawia, że wolność staje się czymś iluzorycznym) oraz mit duszy wygnanej (świat, w którym człowiek żyje, nie jest jego prawdziwym domem, jego ziemią, musi je dopiero zbudować czy odnaleźć)[1].

Każda cywilizacja, w momencie swoich narodzin (ale i przez cały czas trwania), musi mierzyć się z zagrożeniami przedstawionymi (w sposób poetycki) w tych mitach. Te zagrożenia nazywam sprzecznościami kulturowymi, ponieważ kultura zakłada i głosi hasła przeciwne, które stara się wprowadzać w życie: nie chaos, tylko porządek, nie fatum, lecz wolność (przynajmniej dla niektórych), nie upadek, lecz rozwój, i nie wygnanie, ale miejsce schronienia i zamieszkania. Możliwością pokonania tych zagrożeń jest ich przezwyciężenie poprzez budowanie odpowiednich kategorii, pojęć i struktur.

Jedną z możliwości przezwyciężenia chaosu, jaką zaoferowała kultura i nauka grecka, było pojęcie kosmosu (i inne realizacje „harmonii"). Metody dowodzenia, analizy, poznawania, konstrukcji (w tym metody dialektyki, pojęcie matematycznego czy logicznego dowodu) pokazują, jak przezwyciężyć fatum. Rozwój teorii naukowych, otrzymywanie nowych elementów, realizacja określonych celów przebiega pod kontrolą i za sprawą człowieka – dzięki stosowanej metodzie naukowej. Idea edukacji znów ukazuje możliwość osobistego i społecznego rozwoju człowieka i przezwycięża groźbę

---

1 P. Ricoeur, *Symbolika zła,* Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1986, s. 166–289.

upadku i degeneracji. Idea akademii (Akademia Platońska, Likejon, Ogród Epikura, Stoa, Musejon Aleksandryjski i inne ośrodki naukowych spotkań i badań) pozwala budować takie miejsca, w których przebywa się, aby tworzyć, rozwijać z innymi, podobnie myślącymi i odczuwającymi, rzeczy ważne, piękne, szlachetne, dobre (i je zachowywać).

Pierwszym wstrząsem dla rozwijającej się kultury greckiej, w której centralną rolę zaczęła pełnić matematyka, było odkrycie pod koniec piątego wieku przez samych pitagorejczyków zjawiska niewspółmierności. Liczba była dla nich narzędziem liczenia i dokonywania wszelkich pomiarów (w tym obliczania długości, powierzchni czy objętości). Stąd jednostka pomiaru musiała być stabilna, pozostawać zawsze ta sama i nie dzielić się na mniejsze jednostki. Tą jednostką była dla nich jedynka (Monada), z której złożone były wszystkie liczby. Główna idea, która leżała u podstaw ówczesnej geometrii, stwierdzała, że wszystko można zmierzyć, czyli że możemy dobrać uniwersalną jednostkę pomiaru (w przypadku jednostką długości byłby odcinek jednostkowy, któremu przypisujemy liczbę 1), która pozwala nam zmierzyć dowolny obiekt. Jednostka pomiaru byłaby taką geometryczną Monadą, pozwalającą wygenerować dowolne inne obiekty (wielkości) tego samego typu. Przykładowo, mając jednostkę długości, powinniśmy móc, przy pomocy tej jednostki, skonstruować (lub przynajmniej zmierzyć) dowolną linię. Przyjmując, że a jest przyjętą jednostką, dla dowolnej wielkości b powinny istnieć liczby m i n takie, że $ma = nb$. Podobnie przy pomocy jednostki powierzchni (najbardziej naturalny wydaje się tutaj najprostszy trójkąt prostokątny lub jednostkowy kwadrat) powinno dać się wyliczyć dowolną inną powierzchnię.

Okazuje się jednak, że tak rozumiany pomiar jest niemożliwy. I problem nie polega tylko na tym, że wielkości geometryczne są podzielne w nieskończoność i nie ma na tyle małej wielkości, aby nie istniała wielkość mniejsza od niej.

Dowolną figurę ograniczoną odcinkami można otrzymać jako sumę kwadratów. Jednak w przypadku koła taka operacja nie jest możliwa, bo nie jest możliwa kwadratura koła, chociaż takie próby były czynione przez wieki.

Podobnie w przypadku najprostszego przypadku – długości – widać niemożliwość istnienia uniwersalnej jednostki miary. Obierając jednostkę długości, możemy łatwo skonstruować odcinek niewspółmierny z tą obraną jednostką. Wystarczy utworzyć kwadrat, którego bok jest tą przyjętą jednostką długości. Wówczas przekątna tego kwadratu jest niewspółmierna z jego bokiem. Jest to odkrycie pitagorejczyków pokazujące, że bok kwadratu i jego przekątna są zawsze niewspółmierne. Oznacza to, że istnieją wielkości, dla których nie można dobrać wspólnej jednostki miary. Podważało to również możliwość stosowania arytmetyki do pomiarów.

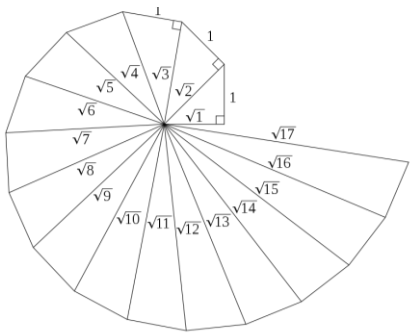
Okazało się ponadto, że takich „niemierzalnych" odcinków jest dowolnie dużo – wystarczy wziąć kwadrat, którego pole wyraża się liczbą n niebędącą kwadratem żadnej liczby naturalnej. Wówczas bok tego kwadratu nie jest współmierny z odcinkiem jednostkowym. Już kwadrat o polu równym 2 ma tę własność. Podobno Teodor z Cyreny, żyjący pod koniec V wieku p.n.e., umiał tego dowieść dla wszystkich liczb $n \leq 17$ (czyli dla liczb 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17), natomiast Teajtet (ok. 408–355 p.n.e.), grecki matematyk i astronom, podał dowód dla wszystkich liczb. Pisze o tym Platon w dialogu *Teajtet*: „O kwadratach coś nam Teodor pisał i o tym, co miał trzy stopy kw., oraz o tym, co miał pięć stóp kwadratowych powierzchni, dowodził nam, że co do długości boku nie są współmierne z jednostopowym i tak po jednym każdy kwadrat brał pod uwagę aż do siedemnastostopowego; na tym się jakoś zatrzymał. Nam więc coś takiego na myśl wpadło, bo wydawało się, że tych kwadratów jest nieograniczona ilość, żeby spróbować jakoś je zebrać w jedno i tym jednym wszystkie kwadraty oznaczać"[2]. Słowa te wypowiada sam Teajtet.

Są różne hipotezy przypuszczające, dlaczego Teodor w dowodzie twierdzenia Teajteta zatrzymał się na liczbie 17. Jean Itard (1902–1979) w swojej książce *Les livres arithmétiques d'Euclide* wykazał, że Teodor korzystał jedynie z nauki o liczbach parzystych i nieparzystych i metoda ta zawodzi na liczbie 17, a sprawdza się na poprzednich. Możliwe też, że zastosował algorytm Euklidesa, pozwalający znajdować wspólny dzielnik dla liczb i wspólną miarę dla odcinków (dzielimy wielkość większą przez mniejszą, następnie dzielnik przez resztę z dzielenia i procedurę tę powtarzamy aż otrzymamy resztę zero; ostatnia niezerowa reszta jest tym wspólnym dzielnikiem). W przypadku liczb taki wspólny dzielnik zawsze istnieje, natomiast w przypadku niektórych par wielkości geometrycznych taka procedura nigdy się nie zakończy. I wtedy mamy do czynienia z wielkościami niewspółmiernymi[3].

Można też przyjąć bardzo praktyczną hipotezę. Teodor, konstruując kolejne liczby niewymierne (jak na poniższym rysunku), zatrzymał się na $\sqrt{17}$ z powodu braku miejsca. W ten sposób otrzymał tzw. ślimak Teodorosa.

2 Platon, *Teajtet*, 147 D.

3 Por. *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 81–85.



Źródło: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4171437

Arpad Szabo w swojej książce *The Beginnings of Greek Mathematics*[4] stawia interesującą hipotezę, za słusznością której przytacza kilka argumentów.

Pojęcie *dynamis* jest kluczem do zrozumienia konstrukcji przeprowadzonej przez Teodora, a opisanej przez Platona w dialogu *Teajtet*. Jest to pojęcie matematyczne, którego pochodzenie oraz znaczenie musi być zrozumiane przed interpretacją odpowiedniego fragmentu z Platona. Warto zauważyć, że greckie słowo *dynamis* należy etymologicznie wiązać z władzą i siłą. Była to pewna tajemnicza moc, pierwotnie magiczna, którą posiadali niektórzy ludzie, ale też święte miejsca czy przedmioty. W pojęciu tym mieści się wiele znaczeń, w tym moc, możność, siła słowa, zdolność wywoływania ruchu, potęga matematyczna, moc boska żywiołów, cuda[5]. Nas szczególnie interesuje kontekst związany z matematyką i przyrodą (moc przyrody, logiczna niesprzeczność, moc generacyjna pewnych bytów matematycznych – np. kwadraty równoważne prostokątom), ale ważny jest również kontekst praktyczny odnoszący się do działania i poznawania. Te dwa konteksty zostały rozwinięte w greckiej filozofii (Anaksymander, Anaksymenes, Platon, Arystoteles).

Słowa Platona implikują, że Teodor musiał pierwszy skonstruować te *dynameis* (kwadraty) poprzez przekształcenie pewnych prostokątów w kwadraty o tym samym polu (kwadratura prostokąta), i że do tego celu użył teorii proporcji (twierdzenie VI.13 i 17 *Elementów*). Teodor badał liczby od 3 do 17 i skonstruował kwadraty, których pola równe są tym liczbom. Trzeba założyć, że korzystał z ówczesnej matematyki pitagorejskiej, a liczby były reprezentowane przez odpowiednie prostokąty (np. dla liczby 3 prostokąt o bokach 1 i 3).

---

4 A. Szabo, *The Beginnings of Greek Mathematics*, Synhese Historical Library, vol. 17, Dordrecht 1878.

5 Por. P. Makowski, *Dynamis. Metafizyczne pojęcie możności i jego rola w filozofii praktycznej Arystotelesa*, „Diametros" 2012, nr 33, s. 79–80.

Teodor nie musiał przekształcać wszystkich liczb od 3 do 17 w kwadraty. Wystarczy, że na kilku przykładach zademonstrował ogólną metodę przekształcania prostokątów w kwadraty poprzez konstrukcję średniej geometrycznej boków prostokąta. Wówczas otrzymujemy niewspółmierność boku kwadratu z bokiem kwadratu jednostkowego. Metoda pozwalała, przez prostą analogię, na konstrukcję kwadratów również dla liczb większych od 17. Znaczy to, że Teodor najprawdopodobniej znał twierdzenie Teajteta i przeprowadził dowód.

Teajtet, jako młody człowiek, uchwycił tę ogólną ideę dowodu oraz ogólną ideę niewymierności (podane przez Teodora), co pozwoliło mu stworzyć ogólną teorię niewymiernych.

Wydaje się, że Teodor referował znane już wyniki. Zakłada się bowiem, bez żadnego uzasadnienia, że przed Teodorem znano tylko niewymierność $\sqrt{2}$ (liniową niewspółmierność przekątnej kwadratu i jego boku). Dowód niewymierności przeprowadzony przez Teodora polegał na odnalezieniu metody, która była analogiczna do innych metod stosowanych wówczas przez Greków.

Jak wobec tego mógł wyglądać ten dowód? Teodor brał kolejne liczby od 3 do 17 (z wyjątkiem oczywiście liczb kwadratowych 4, 9, 16) i pokazał, że żadnej z nich nie można rozłożyć na dwa czynniki, które byłyby podobnymi płaskimi liczbami[6]. Przykładowo dla liczby 3 mamy $3 = 1 \times 3$, mamy prostokąt o bokach 1 i 3. Konstruujemy kwadrat odpowiadający temu prostokątowi o boku *a*, w ten sposób, że bok a jest średnią geometryczną boków 1 i 3, czyli $a^2 = 1 \times 3$. Jednak liczby 1 i 3 nie są podobne, natomiast twierdzenie VIII 18 i 20 z *Elementów* stwierdza, że średnia geometryczna może istnieć tylko między liczbami podobnymi. Z tego wynika, że bok skonstruowanego *dynamis* nie może być liczbą, co oznacza, że jest wielkością niewspółmierną z odcinkiem jednostkowym[7]. W konsekwencji odkryto i udowodniono, że długość boku kwadratu, którego pole nie jest kwadratem liczby naturalnej, jest liczbą niewymierną (mówiąc językiem współczesnym). Przedstawione powyżej rozumowanie jest tylko szkicowym dowodem. Nie zachował się jednak oryginalny dowód matematyków starożytnych tego ogólnego faktu. Chciałem teraz podać prosty dowód twierdzenia Teajteta, który jest maksymalnie prosty, odwołuje się tylko do środków znanym starożytnym w cza-

6 Liczba jest płaska, jeśli jest iloczynem dwóch liczb naturalnych. Natomiast dwie liczby płaskie a i b są podobne, jeśli ich czynniki są do siebie proporcjonalne, tzn., jeśli $a = pq$, $b = rs$, to $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$.

7 A. Szabo, *The Beginnings...,* s. 55–61.

sach Teodora i Teajteta, lecz sformułowany jest w języku współczesnym. Głównym środkiem dowodowym jest podstawowe twierdzenie o podzielności, które brzmi: liczba pierwsza dzieli iloczyn dwóch liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli co najmniej jeden z tych czynników.

Twierdzenie Teodora-Teajteta. Bok kwadratu, o polu wyrażającym się liczbą naturalną niebędącą kwadratem żadnej liczby naturalnej, nie jest współmierny z odcinkiem jednostkowym. Innymi słowy, jeśli n nie jest kwadratem liczby naturalnej, to $\sqrt{n}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dany jest kwadrat o polu n, przy czym $n \neq l^2$, dla dowolnych liczb naturalnych l, którego bok a jest współmierny z odcinkiem jednostkowym. Znaczy to, że istnieją liczby naturalne p i q takie, że $a = \frac{p}{q}$. Możemy założyć, że p i q są względnie pierwsze, tzn., nie mają wspólnego dzielnika poza jedynką oraz że $q \neq 1$. Otrzymujemy więc $n = a^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, a stąd $nq^2 = p^2$. Niech s $(s \geq 2)$ będzie największą liczbą pierwszą, która dzieli n (s/n), a więc $n = sk$, dla pewnego k (oczywiście liczba s nie dzieli liczby k). Z tego wynika, że s dzieli p^2, a więc również p (na podstawie podstawowego twierdzenia o podzielności). Mamy więc $p = sl$, dla pewnej liczby naturalnej l. Po podstawieniu do równania otrzymujemy $skq^2 = (sl)^2 = s^2l^2$, a po uproszczeniu $kq^2 = sl^2$. I znowu na podstawie podstawowego twierdzenia o podzielności s musi dzielić liczbę q. Liczba s jest więc wspólnym dzielnikiem liczb p i q, co jest sprzeczne z założeniem, że te liczby są względnie pierwsze.

Teajtet nie poprzestał na powyższym twierdzeniu. Opracował też ogólną teorię podzielności, ważną dla dowodzenia niewymierności kolejnych klas liczb. Nazwał liczby występujące w jego twierdzeniu liczbami pierwszej klasy niewymierności, tzn.: $\sqrt{N}$, gdzie N nie jest kwadratem liczby naturalnej. Teajtet jednak wprowadził kolejne klasy niewymierności: niewymiernych w trzeciej potędze $\sqrt[3]{N}$ (N nie jest sześcianem żadnej liczby naturalnej). Teajtet interesował się dalszym rozszerzaniem tych klas, idąc w bardzo zaawansowane abstrakcje. Ta rozbudowana klasyfikacja jest umieszczona w X księdze *Elementów* Euklidesa[8].

Najprawdopodobniej Teajtet zastosował algorytm Euklidesa jako kryterium do wyznaczania odcinków niewspółmiernych. Dzięki temu algorytmowi można znaleźć dla dowolnych dwóch liczb w skończonej liczbie kroków ich największy wspólny dzielnik. W przypadku dowolnych odcinków w ten sam sposób poszukujemy ich największej wspólnej miary. W przy-

---

8 *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 82–85.

padku odcinków niewspółmiernych ta procedura nigdy się nie skończy (algorytm okaże się nieskończony). W oparciu o to kryterium rozpoczął prace nad ogólną teorią stosunków. Teoria ta pozwalała wykonywać operacje arytmetyczne nie tylko na liczbach (naturalnych), ale też ich stosunkach, a również na dowolnych (porównywalnych) wielkościach i ich stosunkach[9].

Z twierdzenia Teodora-Teajteta i z dalszych badań nad niewymiernością wynikają przynajmniej dwa wnioski mające również znaczenie ogólnokulturowe (nie tylko dla matematyki). Oczywisty fakt współmierności dowolnych dwóch liczb naturalnych (w każdym przypadku tę najmniejszą wspólną miarą jest jedynka) jest rzadko spotykany wśród wielkości geometrycznych. Pomiar, a więc ważny aspekt matematycznego ujęcia rzeczywistości, może się więc okazać generalnie niemożliwy.

Po udowodnieniu, że istnieją odcinki niewspółmierne (a wręcz, że jest ich bardzo wiele), stało się jasne, że liczby naturalne i ich stosunki (czyli liczby wymierne) nie są wystarczające do ujęcia wielkości geometrycznych. Pojawiła się tym samym znacząca dychotomia między dwoma głównymi działami matematyki, tzn. między arytmetyką i geometrią.

Nie ma wątpliwości, że pojęcia współmierności i niewspółmierności mogły się pojawić dopiero w matematyce, gdy stała się wiedzą abstrakcyjną. Odkrycie istnienia wielkości niewspółmiernych wymagało bowiem dedukcyjnych i pojęciowych ram greckiej matematyki. Żadna pozamatematyczna refleksja nie może odkryć liniowej niewspółmierności. Dla myślenia „praktycznego" nie ma problemu, gdyż wystarczy obrać odpowiednio małą jednostkę, aby z pewnym przybliżeniem stała się wspólną miarą dwóch wielkości.

Odkrycie niewspółmierności wywołało „zdziwienie" u matematyków, a od zdziwienia rozpoczyna się każda prawdziwa wiedza; jak zauważa Arystoteles:

> Bo początkowo wydaje się dziwne tym wszystkim, którzy nie dostrzegli tego, że istnieje rzecz, która nie może być mierzona nawet najmniejszą jednostką miary. Trzeba jednak, żeby to się przerodziło, zgodnie z przysłowiem, w coś przeciwnego i lepszego, jak to ma miejsce w tych przypadkach, gdy się rzeczy dobrze zrozumiało[10].

To odkrycie i to zdziwienie, wraz z odkrytymi wcześniej ideami i pojęciami matematycznymi (w tym wspólnej miary, niewspółmierności), rozpoczyna drogę naukowego myślenia.

Matematyka starożytna wyszła z tych trudności zwycięsko i otworzyła nowy rozdział w historii myślenia. Te „niemierzalne" obiekty domagały się bowiem nowych metod matematycznych, i takie metody zostały wówczas

---

[9] T. Heath, *A History of Greek Mathematics,* t. 1, s. 209–212.

[10] Arystoteles, *Metafizyka*, ks. A (I), 983a.

odkryte. Jedna z nich wiąże się z wykorzystaniem algorytmu Euklidesa, który służy, między innymi, do znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb. Druga, zwana teorią stosunków, została opracowana przez Eudoksosa. Jest również trzecia – opracowana również przez Eudoksosa – jest to metoda wyczerpywania Archimedesa (nazwana została imieniem Archimedesa, gdyż to on właśnie uczynił z niej narzędzie dowodzenia wielu kluczowych twierdzeń geometrycznych). W paragrafie 1 rozdziału 3 pokażę, w jaki sposób te metody pozwalają na rozwiązanie problemów wygenerowanych przez odkrycie niewspółmierności. Najpierw chciałbym jednak przedstawić analizę paradoksów Zenona z Elei, ukazujących antynomiczność samej idei pomiaru i racjonalnej rekonstrukcji obserwowanego świata. Te paradoksy (antynomie) dały podobnie wielki impuls dla rozwoju nowych metod matematycznych i racjonalnego myślenia, jak odkrycie niewspółmierności.

Zenon z Elei (ok. 490–430 p.n.e.) był uczniem Parmenidesa, przedstawicielem szkoły eleackiej, przez Arystotelesa uznany za twórcę metody dialektycznej. Wydaje się jednak, że metoda ta jest dziełem całej szkoły, a Zenon z całą pewnością ją dopracował i był mistrzem w jej stosowaniu. Jest autorem całego szeregu paradoksów. Z jednej strony wydaje się, że bronią one monistycznego stanowiska szkoły. Są wśród nich argumenty przeciwko wielości, wielkości, przeciwko ruchowi. Można je również traktować jako argumenty ukazujące zwodniczość potocznej, zdroworozsądkowej wiedzy. Słowo paradoks to przecież *para doxis* (przeciw mniemaniom). Ponadto, i to jest najważniejsze, są argumentami atakującymi „naiwną" matematykę, jaka była uprawiana w szkole milezyjskiej i pitagorejskiej w tym czasie. Zenon pokazuje niemożliwość stosowania matematyki do opisu zjawisk, ciał fizycznych i przestrzennych. Paradoksy te pozwoliły wyzwolić się matematyce z „wieku dziecięcego". Oczywiście miały też znaczenie dla rozwoju filozofii.

Paradoks wielości (czyli argument przeciw wielości) uderza w możliwość stosowania liczby do „przeliczania rzeczy dostępnych zmysłami". Przytacza ten argument **Symplicjusz z Cylicji** (490–560 n.e.), uczony bizantyjski, który w swoim komentarzu do I księgi *Fizyki* Arystotelesa zauważa, że jeśli istnieje wiele rzeczy, to są one skończenie i nieskończenie liczne zarazem[11]. A więc przypuszczenie, że istnieje wiele rzeczy, prowadzi do sprzeczności.

Rozumowanie wygląda następująco: jeśli jest wiele rzeczy, to musi ich być tak wiele, jak jest. Jeśli jest tak wiele rzeczy, jak jest, to musi być ich skończenie wiele; z drugiej strony, jeśli jest wiele rzeczy, to istnieją dwie rzeczy

[11] Simplicius, *On Aristotle Physics*, tłum. P. Huby, C.C.W. Taylor, Ancient Commentators on Aristotle, Richard Sorabji, Bristol Classical Press, London 2011, s. 15–58.

różne od siebie. A będzie to możliwe, jeśli między nimi będzie inna rzecz. To rozumowanie można powtarzać w nieskończoność, a więc między dowolnymi dwiema różnymi rzeczami będzie nieskończenie wiele innych rzeczy. Stąd wynika, że jeśli jest wiele rzeczy, to musi być ich nieskończenie wiele. Rzeczy jest więc skończenie i nieskończenie wiele zarazem.

Kolejna jest antynomia wielkości, która pokazuje, że jeśli coś ma wielkość, to musi być ona i duża (właściwie nieograniczona), i mała zarazem (nieskończenie mała, bez żadnej wielkości). Można ją rozumieć jako sprzeczność pojęcia miary i dowód niemożliwości pomiaru jako takiego. Idea ta bowiem polega na tym, że dla wszystkich wielkości, a przynajmniej dla pewnej liczby wielkości, które poddajemy pomiarom, możemy dobrać jednostkę miary. Jeśli coś ma wielkość, to może być dzielone i albo ten proces podziału nigdy się nie skończy, albo otrzymamy części niepodzielne. Gdyby proces podziału był nieskończony (dla każdej wielkości), to nie dałoby się podać jednostki miary (chyba że konwencjonalnie zatrzymalibyśmy się na pewnym poziomie podziału, ale wtedy istniałyby wielkości mniejsze, których zmierzyć by się nie dało). Sprowadzałoby się to do tego, że żadna część danej wielkości (obiektu) nie miałaby wielkości[12]. Jeśli by znowu podział zakończył się na częściach niepodzielnych, to te części także nie posiadałyby żadnej wielkości. Jednak to, co nie ma ani wielkości, ani grubości, ani masy, w ogóle by nie istniało. Zenon argumentuje, że gdyby zostało dodane do innego przedmiotu, nie uczyniłby go większym; albowiem skoro nie ma wielkości, to po dodaniu nie może być żadnego wzrostu wielkości. A więc to, co zostało dodane, byłoby niczym[13]. Z tego wynika, że wielkość utworzona z takich części bez wielkości byłaby niczym, a więc nie byłaby wielkością.

Czy jest możliwe jednak, aby części niepodzielne, otrzymane jako wynik podziału pierwotnej wielkości, miały wielkość? Czy są one tego samego rodzaju, czy nie, czy jest ich skończenie, czy nieskończenie wiele?

Wydaje się, że sprzeczność pojawia się tylko wtedy, gdy te niepodzielne części są wielkościami (tego samego rodzaju, co wielkość rozpatrywanego

[12] Nie musimy jednak posiadać najmniejszej wielkości jako jednostki miary. Jednostką miary długości jest współcześnie metr. Wszystkie wielkości mniejsze możemy bez problemu zmierzyć przy pomocy metra, biorąc odpowiednią część ułamkową np. $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ itd. Dzięki używanemu systemowi pozycyjnemu mamy do dyspozycji potencjalnie dowolnie małe (jak i dowolnie duże) jednostki. Grecy nie dysponowali systemem pozycyjnym. Ważne jest ponadto, aby mieć do dyspozycji obiekty realizujące minimalne jednostki pomiarowe, wystarczające dla mierzonych obiektów. Współcześnie takimi obiektami są długości fal elektromagnetycznych, np. długość fali gamma wynosi od 300 do 0,03 pikometrów ($10^{-12}m$). Jeszcze mniejszą długość mają fale promieniowania kosmicznego.

[13] *Historia matematyki,* red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 98–99.

obiektu) i jest ich nieskończenie wiele. Wówczas bowiem ich suma (a więc ta pierwotna wielkość) byłaby nieskończona. Jeśli jednak te niepodzielne byłyby wielkościami innego rodzaju (zarodki Anaksagorasa, atomy Demokryta) albo byłoby ich skończenie wiele (elementy Empedoklesa), to sprzeczności nie ma.

Przyjrzyjmy się teraz czterem argumentom Zenona: dychotomii, strzały, Achillesa i stadionu, traktując je łącznie jako argumenty przemawiające za paradoksalnością czasu i przestrzeni oraz niemożliwością ich formalnego ujęcia i pomiaru.

Paradoks dychotomii w swoim podstawowym sformułowaniu i argumentacji pokazuje, że ruch i wielkość są niemożliwe. Gdyby istniała wielkość, przykładowo odcinek AB, to możliwe byłoby przejście od punktu A do punktu B w pewnym skończonym czasie. Jednak najpierw konieczne byłoby przejście połowę tej drogi (do punktu B_1). Po osiągnięciu punktu B_1 należałoby znów osiągnąć punkt B_2 znajdujący się połowie drogi między punktem B_1 i B. Osiągnięcie punktu B_2 wiązałoby się znowu z koniecznością osiągnięcia punktu B_3, leżącego w połowie między B_2 i B. Nigdy nie skończą się kolejne połówki reszty drogi, które musimy pokonać. Po osiągnięciu punktu B_n, zawsze będzie do osiągnięcia kolejny punkt B_{n+1}. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ nieograniczoną liczbę punktów trzeba by osiągnąć w skończonym czasie. Nie jest więc możliwe przejście z jednego punktu do drugiego, a więc ruch generalnie jest niemożliwy.

A B_1 B_2 B_3 B

Najczęściej paradoks dychotomii jest „rozwiązywany” poprzez wykorzystanie teorii szeregów i pokazanie, że szereg nieskończony może mieć sumę skończoną. To uzasadnienie nie ma jednak żadnego istotnego związku z istotą argumentu Zenona[14]. Problem polega bowiem na uzasadnieniu możliwości pokonania, a właściwie podziału (zmierzenia) dowolnego odcinka *AB*. W tym celu musimy jednak pokonać (zmierzyć) inny odcinek (na przykład AB_1, gdzie A_1 jest środkiem odcinka AB lub jakimś punktem pomiędzy *A* i *B*). Musimy założyć, że odcinek AB_1 jest mniejszy (inny) od odcinka *AB*, aby uniknąć „błędnego koła” (aby pokonać-zmierzyć odcinek, musimy pokonać-zmierzyć odcinek). Jest to przesuwanie problemu, jaki mamy z jednym obiektem, na inny, licząc, że w końcu pojawi się odcinek dla nas „uchwytny”,

[14] Dokładniejszą analizę tego paradoksu przedstawiam w książce: *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów*, s. 57–59.

możliwy do zmierzenia. Prowadzi to jednak do wygenerowania niekończącego się ciągu coraz mniejszych odcinków.

Ten paradoks ma też swoją drugą wersję, która wydaje się mocniejsza. Zaczynamy podobnie, przyjmując istnienie odcinka AB. Gdyby ruch i wielkość były możliwe, to możliwe byłoby przejście od punktu A do punktu B w pewnym skończonym czasie. Jednak najpierw należało by przejść połowę tej drogi (do punktu A_1) w skończonym czasie. Zanim jednak zostałby osiągnięty punkt A_1, należałoby osiągnąć połowę drogi AA_1 (czyli punkt A_2), następnie połowę drogi AA_2 (punkt A_3), itd., i to wszystko w skończonym czasie. Łatwo zauważyć, że zawsze, zanim osiągniemy punkt A_n, będzie do osiągnięcia punkt A_{n+1}. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ nieograniczoną liczbę punktów trzeba by osiągnąć w skończonym czasie. Nie jest więc możliwe przejście z jednego punktu do drugiego, a więc ruch generalnie jest niemożliwy. Przyglądając się dokładniej zagadnieniu, widać, że problem nie tyle polega na osiągnięciu nieskończonej ilości punktów w skończonym czasie, lecz na rozpoczęciu ruchu, czyli osiągnięciu pierwszego punktu, po którym nastąpiłyby kolejne. Tego pierwszego punktu po punkcie A zwyczajnie nie ma. W tym przypadku więc pułapką staje się nie tylko odcinek AB, lecz już sam punkt A.

Zauważmy, że paradoksalność oparta jest na założeniu o nieskończonej podzielności przestrzeni lub o niezmienniczości struktury przestrzeni ze względu na skalowanie. Wtedy wnętrze odcinka AB staje się „pułapką” dla poruszającego się z punktu A do punktu B (nie jest on w stanie opuścić wnętrza tego odcinka).

Jeśli natomiast przyjmiemy założenie, że przestrzeń składa się ze skończonej liczby wielkości niepodzielnych, rozumowanie nie prowadzi do sprzeczności – jeśli znajdziemy się na tyle blisko punktu B, że żadna niepodzielna część nie będzie się już mieścić w reszcie, którą mamy jeszcze pokonać, to musimy osiągnąć punkt B. Można więc argument dychotomii traktować jako dowód tego, że przestrzeń ma strukturę dyskretną.

Paradoks strzały stwierdza, że strzała lecąca do celu w każdej chwili swojego lotu spoczywa. To, co się bowiem porusza, musi znajdować się w każdej chwili w konkretnym miejscu. W każdej poszczególnej chwili t swojego lotu strzała zajmuje miejsce odpowiadające swojej długości, a to oznacza, że jest przeciwko temu, co jest równe. Lecz, cokolwiek jest przeciwko temu, co jest równe, spoczywa. Z tego wynika, że strzała spoczywa w chwili *t*. Ale chwila *t* niczym nie różni się od innych chwil lotu, więc to samo, co w chwili *t* dzieje się ze strzałą w każdej innej chwili jej lotu. Stąd wnioskujemy, że strzała spoczywa w każdej chwili swojego lotu, więc jest nieruchoma.

Zauważmy, że paradoks strzały można traktować jako argument za tym, że przestrzeń składająca się ze skończonej liczby niepodzielnych części jest logicznie sprzeczna. Gdyby bowiem przestrzeń składała się ze skończonej liczby niepodzielnych części, to strzała „poruszająca się" od punktu *A* do *B* „gubiłaby" informację o tym, czy się porusza, czy nie – nie ma więc różnicy między strzałą poruszającą się i nieporuszającą się w każdej z takich części. Transmisja ruchu musiałaby się dokonywać pomiędzy tymi niepodzielnymi częściami, które ze swej istoty ruchu nie mogą realizować (ruch bowiem jako zmiana położenia dokonuje się tylko w odniesieniu do tego, co rozciągłe). Jednak ponieważ cała przestrzeń składa się z niepodzielnych części (i tylko z nich), które „przylegają" do siebie, nie ma niczego pomiędzy nimi. Oczywiście istniałaby możliwość zachowania pamięci ruchu, gdyby przestrzeń była rozciągła. Ruch mógłby być wtedy określony poprzez „różnicę" między kolejnymi elementami otrzymanymi przy pomocy wewnętrznego podziału rozpatrywanej części. W konsekwencji ten argument prowadzi do wniosku, że przestrzeń musi być nieskończenie podzielna.

Połączenie argumentów dychotomii i strzały ukazuje wewnętrzną logiczną sprzeczność struktury przestrzeni oraz brak możliwości jej pomiaru.

Zauważmy, że w tych rozumowaniach nie uwzględniliśmy drugiego poza przestrzenią parametru, przy pomocy którego badamy zjawisko ruchu i wielkości – jest nim czas. Występuje wprawdzie w rozumowaniu, lecz nie jest podważana jego realność, racjonalność. Z argumentu dychotomii nie wynika jednak, że czas musi mieć strukturę dyskretną, tak jak przestrzeń, ponieważ czas pokonywania kolejnych odcinków drogi może być dowolnie dobrany i nie musi być związany z przestrzenią. W paradoksie zakładamy, że mamy określony odcinek drogi, który mamy pokonać. Z założenia nie wynika, że znamy też określony z góry interwał czasu, w jakim osiągniemy punkt B. Jest wprawdzie mowa o „pewnym skończonym czasie", w jakim osiągniemy punkt B, ale to oznacza tylko tyle, że ten punkt osiągniemy. Inna sytuacja jest w argumencie Achillesa.

Argument ten stwierdza, że Achilles, który jest w pewnej odległości od żółwia, nigdy go nie dogoni, nawet jeśli biegnie od niego znacznie szybciej, pod warunkiem, że żółw się cały czas porusza. Jeśli bowiem Achilles dobiegnie do miejsca, w którym wcześniej znajdował się żółw, ten będzie już dalej i znowu będzie w pewnej odległości od Achillesa. Sytuacja za każdym razem będzie się powtarzać, więc niemożliwe jest, aby Achilles dogonił żółwia. W tym przypadku nie znamy nie tylko czasu, w jakim Achilles dogoni żółwia, ale również drogi, jaką musi Achilles pokonać, aby żółwia dogonić.

Gdyby jednak przyjąć, że znamy czas, w jakim Achilles dogoni żółwia (a to by znaczyło, że znamy przyszłość), to z tego wynika, że zakładamy, że Achilles dogoni żółwia. Wtedy znamy też drogę, jaka musi pokonać Achilles do spotkania z żółwiem.

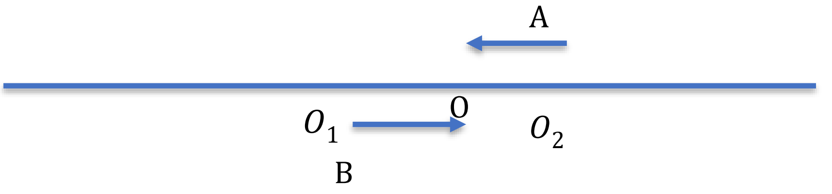
Podzielmy czas t na pewną ilość interwałów t_n w ten sposób, że każdy z tych interwałów oznacza czas, w którym Achilles dobiega do miejsca, gdzie poprzednio znajdował się żółw, licząc od miejsca poprzedniego. Te interwały są wyznaczone przez odcinki drogi, które Achilles musi jeszcze pokonać, aby dogonić żółwia. Załóżmy, że początkowa odległość między nimi wynosi S_1.

Jeśli założymy, że kolejne odcinki, które pokonuje Achilles, są coraz mniejsze, to również coraz mniejsze muszą być kolejne interwały czasowe (zakładając dodatkowo, że Achilles i żółw biegną z niezmienną prędkością). W tym przypadku założenie o możliwości nieskończonego podziału czasu (i drogi) sprawia, że rzeczywiście Achilles nigdy żółwia nie dogoni, bo „zbliżanie się" Achillesa do żółwia trwałoby w nieskończoność. Gdybyśmy jednak założyli, że możliwe jest pokonanie nieskończenie wielu odcinków drogi, w odpowiednio nieskończonej ilości interwałów czasowych, to otrzymujemy, że żółw musi pokonać α odcinków czasowych, gdzie α jest liczbą nieskończoną. Jednak do spotkania Achilles musiałby pokonać o jeden odcinek S_1 więcej, czyli $\alpha + 1$. A to by znaczyło, że $\alpha + 1 = \alpha$. Ta znana współcześnie własność wielkości nieskończonych oznaczająca, że część jest równa całości, wyglądała na szczególnie paradoksalną. W celu ominięcia trudności tkwiącej w tym paradoksie trzeba by założyć dyskretną strukturę czasu[15].

Jednak czwarty argument Zenona przeciwko ruchowi – paradoks stadionu – wyklucza również tę ostatnią możliwość. Załóżmy, że dwa rydwany A i B poruszają się w przeciwnych kierunkach z tą samą prędkością. Załóżmy też, że znajdują się w odległości S od siebie (jak pokazuje rysunek), która jest odległością, jaką pokonuje każdy z nich w minimalnej niepodzielnej jednostce czasu t_{min}. O jest nieruchomym względem A i B obserwatorem. Załóżmy, że ruszają w tym samym czasie t_0. Po czasie t_{min} rydwan A znajdzie się nad punktem O_1, a rydwan B nad punktem O_2. W pewnym momencie muszą przejechać koło obserwatora O i wtedy od początku ruchu minie czas $\frac{1}{2}t_{min}$, co przeczy założeniu, że t_{min} jest najmniejszym interwałem czaso-

[15] *Historia matematyki,* red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 99–102.

wym. Oczywiście, żadnej sprzeczności nie otrzymamy, jeśli z tego rozumowania wykluczymy pojęcie ruchu.



W konsekwencji okazuje się (gdy uwzględniamy wszystkie argumenty Zenona), że tak przestrzeń, jak i czas nie mogą być ani ciągłe, ani dyskretne. Jest to logiczna sprzeczność przedstawiającej się nam rzeczywistości i wskazanie na niemożliwość jej racjonalnej rekonstrukcji, w tym pomiaru.

Jeśli uwzględnimy, że istnieje zależność między czasem i przestrzenią, którą można uchwycić pojęciowo, to pojawia się jakaś forma neutralizacji paradoksu Achillesa. Achilles i żółw zaczynają swój bieg w tym samym czasie t_0, lecz z innego miejsca: odpowiednio *A* i *Z*. Jednak ich tory ruchu, ponieważ Achilles porusza się szybciej od żółwia, muszą się przeciąć w punkcie *P*. Jednak tutaj zakładamy, że tory ruchu Achillesa i żółwia istnieją, są dane apriorycznie. To założenie wymaga jednak uzasadnienia.

W paradoksach Zenona czas i przestrzeń mają inną naturę i na tym też opiera się ich skuteczność. W paradoksie dychotomii z góry mamy dany pewien odcinek drogi i dokonujemy jego podziału. Jeśli chodzi o czas, wiemy tylko tyle, że aby dojść z punktu *A* do punktu *B*, musimy tę odległość przejść w pewnym skończonym czasie. Nie wiemy jednak, w jakim czasie, nie jest więc możliwy podział czegoś nieokreślonego (czas pojawia się dopiero przy pokonywaniu tego odcinka drogi). Założenie, że odcinek czasowy dzieli się na nieskończenie wiele odcinków, prowadziłoby do przyjęcia istnienia nieskończoności aktualnej. Arystoteles, odrzucając paradoksy dychotomii i Achillesa, przyjmuje, że czas i przestrzeń mają tę samą strukturę continuum (są ciągłe).

> W świetle pospolitych argumentów staje się oczywiste, że skoro czas jest ciągły (tzn. jeśli granice poszczególnych odcinków czasowych tworzą jedność), to i wielkość jest taka. [...] A jest tak z tej racji, że wielkości czasowe i przestrzenne są przedmiotem tego samego podziału [...]. Z tego też względu dowód Zenona opiera się na fałszywym założeniu, że mianowicie jest niemożliwe, by jakieś ciało mogło przebyć nieskończoną ilość punktów lub zetknąć się z nimi w skończonym okresie czasu. W dwojakim bowiem sensie mówi się o długości i o czasie, że są nieskończone, i w ogóle o wszystkim, co jest ciągłe: są tak nazywane albo ze względu na podzielność, albo ze względu na ich krańce. Nie ulega wątpliwości, że ciało w skończonym czasie nie może zetknąć się z punktami ilościowo nieskończonymi; ale może się zetknąć z nimi ze względu na podzielność; albowiem sam czas jest w tym sensie rów-

nież nieskończony. […] A zatem ani nieskończoności nie można przebyć w czasie skończonym, ani w czasie nieskończonym odcinka skończonego; ale gdy czas będzie nieskończony, to również i wielkość będzie nieskończona; a gdy wielkość będzie nieskończona, to również i czas[16].

Jednak trudność polega na tym, w jaki sposób odcinkom przestrzennym w sposób jednoznaczny przypisać odpowiednie interwały czasowe, przy zmniejszających się w nieskończoność odcinkach; skąd też wiemy, że to przyporządkowanie będzie zawsze możliwe i że struktura przestrzeni nie zmieni się przy bardzo małych wielkościach, i czy wtedy będzie możliwe odtworzenie pierwotnej wielkości z tych otrzymanych. Arystoteles ten problem omija. No i najważniejsza trudność, którą poruszałem wcześniej: dyskusyjne jest założenie, że z góry znamy czas osiągnięcia punktu końcowego. W tym rozumowaniu Arystoteles zakłada, że czas i przestrzeń mają tę samą naturę[17].

2. Atomizm – niedokończony program badań Demokryta

Koncepcja atomizmu jest nierozerwalnie związana ze znaczeniem, jakie Demokryt[18] przypisywał w swojej szkole matematyce. Atom jako byt niepo-

---

16 Arystoteles, *Fizyka* 233 a.

17 Por. W. Wójcik, *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów,* Warszawa 2000, s. 53–64. W tym fragmencie pracy wyjaśniam, w jaki sposób wypracowane w czasach nowożytnych pojęcia: granicy, pochodnej i funkcji, „neutralizują" analizowane paradoksy. Jeśli chodzi o paradoks strzały, zauważyłem, że *de facto* stwierdza on, że niemożliwa jest prędkość chwilowa różna od zera. Natomiast pojęcie pochodnej funkcji pokazuje, że prędkość chwilowa V_{chw}, jako granica ilorazu przyrostu drogi do przyrostu czasu (co oznacza pochodną funkcji drogi względem czasu), gdy przyrosty czasu dążą do zera, może być od zera większa — $V_{chw} = lim \frac{\Delta S}{\Delta t}$, gdy $\Delta t \to 0$. Warto zauważyć, że matematyka nowożytna jedynie przesuwa trudności aporii Zenona (i innych) w inny obszar związany z zagadnieniami granicy, ciągłości i nieskończoności. Z tymi trudnościami zmagano się już od początku matematyki nowożytnej (spór o zasadność używania w matematyce metod nieskończonościowych), a wybuchnął z pełną siłą na przełomie XIX i XX wieku w paradoksach teorii mnogości i innych (kryzys podstaw). Nowe antynomie i paradoksy były najczęściej nową wersją paradoksów starożytnych. Wzbudziły zainteresowanie filozofów i logików, matematyka jednak rozwijała nowe metody badań i teorie, ignorując przeważnie ukazane antynomie. Istotne jest to, że już matematyka grecka wypracowała metody i rozwiązania (teoria stosunków Eudoksosa, nowe metody konstrukcyjne, metoda wyczerpywania, aksjomatyzacja geometrii, budowa geometrii sferycznej), które, jeśli nie rozwiązywały, to przynajmniej skutecznie omijały wskazane problemy i paradoksy. Będę o tym mówił w dalszej części pracy.

18 Założycielem szkoły atomistów był Leucyp (Leukippos), żyjący w piątym wieku p.n.e., a pochodzący najprawdopodobniej z Miletu. Jego uczniem był Demokryt z Abdery (ok.

dzielny i nieredukowalny posiadał jedynie własności geometryczne – atomy różniły się bowiem tylko kształtem, wielkością, położeniem i porządkiem. Można je było więc badać metodami matematycznymi i tylko nimi, gdyż jako byty nieróżniące się jakościowo i niedostrzegalne zmysłami były „niewidoczne" dla innych pozamatematycznych metod. Tylko matematyka docierała do atomu (czyli samego bytu) i tym samym była w stanie odsłonić zakryte i najgłębsze obszary istnienia.

Atomy, których jest nieskończenie wiele, poruszają się w nieskończonej próżni. Są ponadto niezniszczalne, nieważkie, trwając w nieustannym ruchu, stają się przyczyną wszystkiego, co istnieje. Zderzają się i łączą ze sobą, tworząc większe, dostrzegalne już struktury. Według Demokryta niektóre atomy odskakują od siebie, a te, które splatają się ze sobą, dokonują tego na skutek **symetrii** kształtów, wielkości, położenia i szyku. Dzięki temu tworzą trwałą całość[19]. W ten sposób powstają wszystkie rzeczy tego świata i cały świat. Mamy tutaj deterministyczną teorię świata (wszystko działa na zasadzie konieczności – *ananke*), ale w tej teorii matematyka odgrywa szczególną rolę: wchodzi w relację ze światem zmysłowym, warunkuje możliwość jego poznania w całym bogactwie struktur i zmienności. Bez poznania ato-

460–370 p.n.e.). Napisał około 70 prac (wszystkie zaginęły, znane są tylko nieliczne fragmenty), w tym wiele prac matematycznych m.in.: *O liczbach*, *Na temat geometrii*, *O odwzorowaniach*, *O niewymiernych liniach i bryłach*, *Rozciągłości* (*Εκπτάσματα*). Ponoć najważniejszym jego dziełem była książka kosmologiczna *Wielkie uporządkowanie*. Pisał również traktaty z astronomii np. *O planetach*, *Na temat wielkiego roku*, *Astronomia*. Był też autorem wielu prac filozoficznych (z zakresu metafizyki-filozofii istnienia, etyki, polityki, nauki o człowieku, teorii poznania, psychologii). Pisał podobno językiem poetyckim. Jego filozoficzna teoria atomizmu była przejęta przez szkołę epikurejską i w niej rozwijana. Brak jest natomiast kontynuacji i odniesień w tej szkole do wyników i metod matematycznych Demokryta. Można przypuszczać, że jego metody matematyki dyskretnej (nieciągłej) były w starożytności dobrze znane (krytykuje je Platon, prezentuje Arystoteles) i stosowane (na przykład przez Archimedesa). Rozmach twórczy Demokryta był imponujący. Do każdej dziedziny wiedzy wniósł istotny wkład. Platon traktuje go jako naukowego rywala i całkowicie ignoruje w swoich dialogach. Podobno uważał prace i badania Demokryta za szkodliwe i nadające się jedynie do spalenia. Arystoteles natomiast zauważa, że w badaniu zmienności jedynie Demokryt osiągnął istotne i znaczące wyniki. Podobno Demokryt tak sam mówił o sobie: „Ze wszystkich moich współczesnych zwiedziłem najwięcej ziem, przeprowadziłem najbardziej wyczerpujące badania i widziałem najwspanialsze klimaty i kraje oraz słuchałem największą liczbę uczonych ludzi". W ciągu trwających pięć lat podróży podobno odwiedził Egipt, Persję i Babilon, gdzie spotykał się z kapłanami i magami; niektórzy mówią, że udał się także do Indii i Etiopii. (Por. T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 1, s. 176–177).

[19] Por. W.F. Asmus, *Demokryt,* tłum. B. Kupis, Książka i Wiedza, Warszawa 1961*,* s. 108.

mów i ich natury, poruszająca się w próżni-niebycie „chmura atomów” zdaje się jedynie szczególną realizacją chaosu. Wobec tego nasza wiedza o świecie, bez pomocy matematyki, byłaby opisem chaosu wrażeń i nieuporządkowanych doznań. To dzięki matematyce odkrywamy *ananke* – zasadę konieczności.

Atomistyczna teoria Demokryta zakłada, że niemożliwy jest podział ciała w nieskończoność, a atom jest tą absolutną granicą podzielności (materia ma więc strukturę dyskretną).

Atomiści wykorzystywali swoją teorię do rozwiązywania konkretnych problemów matematycznych. Według nich, przykładowo, walec składa się z bardzo wielkiej liczby cieniutkich, zmysłowo niedostrzeganych i równoległych do płaszczyzny, kół. Jego objętość można więc policzyć, sumując pola tych kół. A ponieważ wysokość wyznacza liczbę kół, które możemy ułożyć (jedno nad drugim), więc objętość walca otrzymamy, mnożąc pole koła przez wysokość walca (podobnie liczymy objętość dowolnego graniastosłupa).

Jeśli znów weźmiemy dwa ostrosłupy o równych podstawach i wysokościach jako utworzone z nieskończenie wielu nieskończenie cienkich przekrojów, to przyporządkowując te przekroje sobie wzajemnie, jednoznacznie (jeden do jednego) otrzymamy, że objętości tych ostrosłupów są równe (jest to metoda znana jako zasada Cavalieriego[20]). W podobny sposób zauważył Demokryt, że objętość stożka stanowi jedną trzecią objętości opisanego na nim walca. Zgodnie z zasadą atomizmu uznał, że stożek jest ostrosłupem o nieskończonej liczbie boków. Najprawdopodobniej w taki sposób wykorzystywał Demokryt swój atomizm do przeprowadzania dowodów matematycznych. Jednak argumenty oparte na używaniu metod nieskończonościowych w matematyce nie zostały przez Greków przyjęte.

Warto zauważyć, że Demokryt, badając niewspółmierne wielkości, np. niewspółmierne linie (ἄλογοι γραμμαί), nie traktował ich jako niepodzielne linie (ἄτομοι γραμμαί). Również nieskończenie cienkie koła, z jakich zbudowany był stożek, nie były wielkościami niepodzielnymi, lecz jak najbardziej cechowały się ciągłością. Dlatego między kolejnymi kołami tworzącymi stożek nie musiało być przeskoków. W traktacie *O niebie* Arystoteles wyraźnie odrzuca taką możliwość, aby Demokryt głosił teorie o niepodzielnych liniach. Jeszcze dalej idzie uwaga Symplicjusza, który stwierdza w swoim komentarzu do *Fizyki* Arystotelesa, że dla Demokryta atomy były w matematycznym sensie podzielne *ad infinitum*[21]. Atomizm Demokryta był więc teorią bardziej wyrafinowaną niż się potocznie sądzi.

---

20 Bonaventura Francesko Cavalieri (1598–1647) był włoskim matematykiem, uczniem Galileusza.

21 T. Heath, *A History of Greek Mathematics,* t. 1, s. 181.

Ważnym pojęciem, które Demokryt najprawdopodobniej też badał, jest pojęcie kąta rogokształtnego (kąt miedzy łukiem okręgu a styczną do niego w punkcie styczności – κρατοιδής) oraz komplementarne pojęcie kąta między łukami okręgów. Problemem było wyjaśnienie, czy kąt rogokształtny jest wielkością porównywalną z kątem liniowym, tzn., czy poprzez jego zwielokrotnienie można osiągnąć kąt liniowy. Okazuje się, że jest to niemożliwe, a więc kąt rogokształtny jest wielkością nieskończenie małą. Euklides dowodzi, że kąt rogokształtny jest mniejszy od dowolnego kąta liniowego[22].

Podsumowując, zauważmy, że – zgodnie z ontologią atomistyczną – matematyka jest potrzebna podczas zdobywania i przekazywania wiedzy, gdyż:
(1) odsłania to, co zakryte, odsłania istotę bytu i zdarzeń;
(2) wprowadza porządek w pozorny chaos poznawanego zmysłami świata;
(3) uzasadnia obiektywny charakter wiedzy, przeciwstawia się relatywizmowi.

Matematyka pozwala dostrzec w próżni-niebycie atom-byt, jednak nie daje całościowej wiedzy o świecie, o tym, co istnieje. Wskazuje na dwa różne rodzaje istnienia, ale bada tylko jeden z nich. Próżnia zdaje się być poza zasięgiem badawczym matematyki (nie ma struktury). I stąd potrzebna nauka (lub nauki), która zajmuje się nie tylko bytem, lecz również innymi rodzajami i aspektami istnienia oraz całością istnienia – wykracza więc poza granice klasycznie rozumianej ontologii czy nauk przyrodniczych. Nie wiemy, jak „filozofia istnienia" Demokryta wyglądała, gdyż jego prace zaginęły – z całą jednak pewnością możemy powiedzieć, że jako synteza wizji heraklitejskiej i eleackiej podjęła problemy związane z „nicością" (unikane raczej przez starożytnych, a szczególnie zwalczane przez Platona), które w późniejszym okresie analizowali przykładowo Epikur (kontynuator szkoły atomistów), Pseudo-Dionizy, Gasendi, Pascal, Kierkegaard czy egzystencjaliści. Nicość nie jest czymś, czego należy unikać, jest miejscem, w którym się poruszamy, odnajdujemy siebie i wszelki byt, a która wraz z bytem może utworzyć harmonijną strukturę.

W koncepcji Demokryta mamy więc do czynienia z dwiema częściowo niezależnymi od siebie dziedzinami wiedzy: matematyką (zajmującą się samym bytem) i metafizyką (filozofią istnienia, również tego poza bytem)[23].

Otwarta jest też droga dla całego spektrum nauk przyrodniczych (o naturze) oraz humanistycznych (o człowieku, jego wytworach, i działaniu), badających różne aspekty istnienia. W tych naukach (badających układy ato-

---

[22] Ibidem, s. 178–179.

[23] P. Swift, *Becoming Nietzsche. Early Reflections on Democritus, Schopenhauer, and Kant*, Lexington Books, Lanham, Boulder, New York, Toronto, Oxford 2005.

mów i ich ruch) składniki odnoszące się do „bytu” i „nie-bytu” są ze sobą wymieszane. Matematyka może więc wskazać matematyzowaną część tych nauk i poddać je metodzie matematycznej. Tak właśnie postępował Archimedes, gdy po dokonaniu odkryć przy pomocy narzędzi i metod mechaniki czy hydrostatyki włączał je następnie w struktury matematyki czystej, podając matematyczne modele, dowody i argumenty. Również fakty geometryczne odkrywał w oparciu o prawa swojej fizyki, a następnie dowodził je w sposób matematyczny. Fizyka miała więc dla niego część empiryczną oraz ściśle matematyczną, a badania naukowe polegały w znacznej mierze na próbie maksymalnego włączenia treści nauk przyrodniczych w obszar matematyki. Te rozważania na temat metody naukowej przedstawił Archimedes w dziełku *O metodzie*[24]. Było to interesujące połączenie metody hipotetyczno-dedukcyjnej z metodą Demokryta. Metodę Archimedesa i jego projekt rozwoju matematyki przedstawię w dalszej części.

3. Paradoksy wyzwaniem dla matematyki greckiej

Odpowiedzią matematyki na pojawiające się paradoksy był jej rozwój. Powstały nowe metody i teorie naukowe. Kontynuowany był też proces geometryzacji i arytmetyzacji astronomii czy teorii harmonii muzycznej oraz innych teorii, np. mechaniki. Ponadto podjęto refleksję nad matematyką, jej podstawami i związkiem z rzeczywistością. Akademia Platona stała się centrum badań matematycznych. To dzięki badaniom tej szkoły matematyka uzyskała postać hipotetyczno-dedukcyjną i stała się wiedzą dojrzałą, samodzielną, wyzwoloną z empirii. Jednak główne idee matematyczne, zagadnienia i problemy, będące wyzwaniem dla kolejnych pokoleń matematyków, pojawiły się już w okresie wcześniejszym (w VI i V wieku p.n.e.), natomiast w IV wieku p.n.e., gdy zaczęła działalność Akademia, były jeszcze intensywniej rozwijane. Warto zauważyć, że V wiek jest złotym wiekiem kultury greckiej, kiedy Ateny stają się centrum kulturalnym ówczesnego świata. Wtedy powstają wspaniałe dzieła sztuki, literatury, koncepcje prawne, polityczne i etyczne. Ateny przyciągają wybitne jednostki z różnych stron. Często pomijane są dokonania naukowe (w tym matematyczne) tego okresu, gdyż nieomal całość dorobku naukowego nie przetrwała. Kontrastuje to z dziełami literackimi, które praktycznie w całości są dla nas dostępne.

---

[24] Archimedes, *Poslanie k Ehratosfenu,* [w:] *Sochinienia,* Państwowe Wydawnictwo Literatury Fizyczno-Matematycznej, Moskwa 1962.

Spektakularnym przykładem jest **Anaksagoras** (500–428 p.n.e.), filozof, astronom i matematyk, który przybył do Aten z Jonii ok. 456 roku p.n.e. Jego uczniami byli m.in. Perykles (ateński mąż stanu, przywódca), Sokrates (z czasem odszedł od badania przyrody w kierunku dociekań etycznych), Tukidydes (historyk). Anaksagoras za głoszenie poglądów, że słońce nie jest boskie, lecz jest rozpalonym kawałkiem kamienia, został oskarżony o ateizm i skazany na karę śmierci. Dzięki Peryklesowi zamieniono tę karę na wygnanie. Znany jest jego pogląd na naturę świata. Materia składa się z niezliczonej ilości zarodków, z których, pod wpływem Umysłu (*Nous*), wszystko powstaje. *Nous* porządkuje pierwotny chaos, daje światu ruch i życie. Efektem jego racjonalnych dociekań i badań natury wszechświata była książka *O przyrodzie* (ocalały z niej tylko niewielkie fragmenty). Anaksagoras był typowym przedstawicielem ówczesnej greckiej nauki: uprawiał naukę dla samej ciekawości, pasji badawczej, a nie dla celów utylitarnych – jak uczeni przedhelleńscy. Z badań przyrody przeszedł do rozwiązywania problemów matematycznych, bo to było trudniejsze, ciekawsze i bardziej zaspakajało jego potrzeby intelektualne.

W piątym wieku p.n.e. zostały postawione cztery słynne problemy, które zostały rozwiązane dopiero 24 wieki później (wcześniej wydawały się nie do zrealizowania przy przyjętych pierwotnie założeniach). Chodziło o dokonanie przy pomocy jedynie cyrkla i linijki następujących konstrukcji (a więc przy pomocy „elementarnych", najprostszych linii): kwadratury koła[25], podwojenia sześcianu (znalezienia sześcianu o dwa razy większej objętości od danego, tzw. problem delijski), trysekcji kąta oraz rektyfikacji okręgu (skonstruowania odcinka o długości danego okręgu). Były to zadania ważne dla samej matematyki i jej systemowego założenia, aby budować ją na jak najprostszych podstawach. Zadania są możliwe do wykonania, lecz przy pomocy bardziej złożonych narzędzi. To jednak nie zadowalało matematyków greckich. Podobno Anaksagoras, gdy przebywał w więzieniu, zajmował się pierwszym z tych zagadnień, czyli kwadraturą koła[26]. I nie chodziło o zastosowanie znalezionego rozwiązania do celów praktycznych (wtedy wystarczą metody przybliżone), lecz o teoretyczne badania mające na celu osiągnięcie precyzji myślenia. Podjęcie się zadań niemożliwych do wykonania

[25] Chodziło o kwadraturę dowolnych figur geometrycznych płaskich, tzn. skonstruowanie dla danej figury F kwadratu o polu równym tej figurze. Rozwiązano zagadnienie kwadratury prostokąta, trójkąta i dowolnego wielokąta, problem pojawił się przy kwadraturze koła.

[26] U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2011, s. 56–58.

nie okazało się bezowocne – było bowiem sprawdzeniem przyjętych hipotez w dochodzeniu do prawdy. W trakcie tych zmagań konstrukcyjnych osiągnięto wiele innych wyników.

Hipokrates z Chios (ok. 470–410 p.n.e.) był pierwszym, który pokazał, że jest możliwa kwadratura pewnych obszarów ograniczonych łukami (księżyce Hipokratesa). Napisał też *Elementy geometrii* (sto lat przed Euklidesem), które zaginęły, ale znane były przynajmniej do czasów Arystotelesa i wpłynęły z pewnością na kolejne próby w tym zakresie. Hipokrates, stosując język i metodę proporcji, odkrył twierdzenie mówiące, że stosunek dwóch podobnych odcinków koła jest taki sam, jak stosunek kwadratów zbudowanych na podstawach tych odcinków. Teorię proporcji rozwinął dalej Eudoksos (on też w sposób ścisły udowodnił powyższe twierdzenie), a została ona opisana w XII księdze *Elementów* Euklidesa. Ponadto stosował Hipokrates w swoich dowodach metodę nie wprost. Udowodnił, że stosunek powierzchni dwóch kół jest równy stosunkowi powierzchni dwóch kwadratów zbudowanych na ich średnicach w ten sposób, że przyjął prostą alternatywę: stosunek powierzchni dwóch kół jest równy stosunkowi powierzchni odpowiednich kwadratów albo nie jest. A następnie wykluczył drugą część alternatywy.

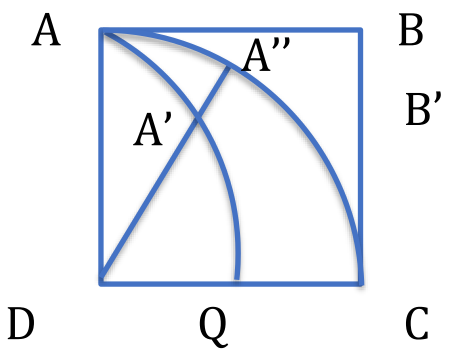
Rozpatrując zagadnienie podwojenia sześcianu, pokazał, że można je sprowadzić do znalezienia takich dwóch liczb x i y, aby zachodziła następująca proporcja: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ (podwójna średnia proporcjonalna), przy czym a i b oznaczają odpowiednio objętości większego i mniejszego sześcianu, czyli $a = 2b$. Wówczas po przekształceniu łatwo wyliczyć, że zachodzi równość: $x = \sqrt[3]{2}y$, co oznacza, że x jest krawędzią podwojonego sześcianu wyjściowego[27].

Hippiasz z Elidy (żyjący na przełomie V i IV wieku p.n.e.) podszedł do zagadnienia kwadratury koła z innej strony. Skonstruował krzywą, zwaną kwadtratrysą, która taką konstrukcję umożliwia. Powstaje ona w następujący sposób. W kwadracie $ABCD$ przesuwamy górny bok AB jednostajnie w dół aż połączy się z dolnym bokiem DC. W tym samym czasie obracamy lewy bok DA wokół punku D aż pokryje się również z odcinkiem DC. Oznaczmy pozycję odcinka AB po czasie t' przez $A'B'$, a odcinka DA przez DA''. Wówczas punkt P przecięcia tych przesuwających się odcinków utworzy żądaną krzywą, czyli kwadratrysę APQ.

Kwadtratrysa może być wykorzystywana do konstrukcji trysekcji kąta, jak również do kwadratury koła. Oczywiście krzywa ta nie jest łukiem koła

[27] Ibidem, s. 58–61.

(ani nie jest przy pomocy krzywych elementarnych otrzymana), a więc konstrukcje te nie spełniają warunku konstrukcji „elementarnych" przy pomocy cyrkla i linijki.



Hippiasz z Elidy był sofistą, a oni, jak wiadomo, często w sposób instrumentalny traktowali zasady moralne i wartości, w tym wartość dobra i prawdy, oraz często byli podejrzewani o płytkość intelektualną. Jak widać, Hippiasz przeczył tej opinii. Działał aktywnie w Atenach w drugiej połowie V wieku, miał dużą wiedzę w wielu dziedzinach i tak jak sofiści nauczał, w tym oczywiście sztuki krasomówczej[28].

Filolaos z Tarentu (ok. 480–399 p.n.e.) dokonał kluczowej zmiany w sposobie działania pitagorejczyków. Trzymali oni swoje wyniki naukowe w tajemnicy, a Filolaos był pierwszym, który opublikował traktaty zawierające opis ich poglądów i osiągnięć naukowych. To z tych traktatów poznał Platon szczegóły poglądów pitagorejskich. Myśl pitagorejska weszła więc dzięki Filolaosowi w obieg kulturowy ówczesnej Grecji. Filolaos był twórcą pirocentrycznej koncepcji budowy świata. Zakładał, że wokół centralnego ognia krąży Ziemia i inne ciała niebieskie.

Uczniem Filolaosa był **Archytas z Tarentu**, jeden z większych uczonych greckich, matematyk, którego aktywność naukowa, polityczna i społeczna przypada na pierwszą połowę IV wieku p.n.e. Żył w czasach Platona, a jego idee i wyniki naukowe miały znaczący wpływ na kolejne pokolenia matematyków. Był jednak w sporze filozoficznym z Platonem, ich wizje nauki oraz filozofie matematyki były odmienne (na przykładzie tego sporu widać różnice między „czystym" pitagoreizmem a platonizmem). Ich pierwsze spotkanie nastąpiło w roku 387/386 p.n.e. i od tego czasu trwała dalsza bliska znajomość i wzajemne wspieranie się. Jest znany fakt wysłania przez Archytasa

[28] Ibidem, s. 62–63.

do Syrakuz statku i wstawiennictwo u tyrana Dionizosa, gdy groziła Platonowi śmierć. Był ostatnim z wielkich pitagorejczyków. Ocalały jedynie cztery oryginalne prace, jednak wiele informacji o poglądach Archytasa znajduje się w różnych świadectwach i komentarzach. Jak zauważa T. Heath, kluczowa część Księgi XI *Elementów* Euklidesa zawiera konstrukcję proporcji dwóch średnich geometrycznych Archytasa[29]. Rozwiązał też problem podwojenia sześcianu, ale oczywiście nie przy pomocy platońskich konstrukcji (tzn. przy pomocy cyrkla i linijki). W znaczący sposób rozwinął teorię harmonii muzycznej (uczynił z niej teorię w pełni matematyczną), rozwinął optykę jako naukę i dał matematyczne podstawy mechanice. Uważał, że ostatecznym celem nauki jest opisanie rzeczy jednostkowych przy pomocy stosunków i proporcji. Dla niego arytmetyka jako nauka o liczbach i proporcjach była królową nauk. Na teorii proporcji należało oprzeć, według niego, pojęcie sprawiedliwości (w państwie) i dobrego życia (jednostki). Rozważał też możliwość nieograniczoności świata i dawał za tą możliwością argument, który był wielokrotnie później powtarzany[30].

Spór filozoficzny między Platonem a Archytasem miał duże znaczenie dla dalszego rozwoju matematyki i jej rozumienia. Dla Platona Archytas był wybitnym matematykiem, jednak reprezentował niewłaściwą filozofię matematyki. W VII księdze *Państwa* Platon krytycznie odnosi się do pitagorejskiej teorii harmonii w wersji matematyka z Tarentu oraz do jego sposobu uprawiania geometrii przestrzennej.

Dla Archytasa nauki ścisłe mają szczególne znaczenie z powodu umiejętności dokonywania właściwych rozróżnień. Wychodząc od badania natury całości oraz uniwersalnych koncepcji nauki, są w stanie dojść do badania i zrozumienia natury poszczególnych części. W swoim zaginionym dziele *Harmonia* (ocalały tylko nieznaczne fragmenty) postępuje zgodnie z tą procedurą.

Ogólna koncepcja nauki – w przypadku teorii harmonii chodzi o uniwersalną koncepcję dźwięku – jest dla niego jedynie wprowadzeniem w dalsze badania, a nie celem nauki. Chodzi o to, aby przy pomocy tych uniwersalnych pojęć poznać prawdziwą naturę rzeczy indywidualnych. Rozważania Archytasa na temat harmonii kończą się matematycznym opisem interwałów muzycznych, stosowanych przez praktykujących muzyków. Podobnie jest w przypadku astronomii. Tam również ogólne rozważania kończą się matematycznym opisem okresów, wschodów i położeń konkretnych planet. Pro-

---

29 T. Heath, op. cit., s. 213–216.

30 Gdyby świat był ograniczony, to możliwe byłoby dotarcie do jego granic. Ale wówczas, wykorzystując wielkość ciała, moglibyśmy przekroczyć tę granicę. Ten proces przekraczania ustalonej granicy świata można kontynuować w nieskończoność.

gram Archytasa jest kontynuacją programu Filolaosa, utrzymanego w tradycji pitagorejskiej. W programie tym matematyka potrzebna jest po to, aby poznać konkretne rzeczy. Liczby i ich proporcje są nie tylko warunkiem wystarczającym poznania indywidualnych, konkretnych bytów, bez nich te byty byłyby niepoznawalne. Wydaje się, że wyniki Archytasa są znacznie bardziej zaawansowane i skuteczniej opisują zjawiska, niż czyni to Filolaos. Na samym początku swojej pracy ukazuje Archytas wartość nauk matematycznych (*mathêmata*), a następnie wyróżnia cztery takie nauki: astronomię, geometrię, logistykę (czyli arytmetykę) oraz muzykę. Przypuszczalnie było to pierwsze całościowe wyróżnienie tych nauk, które później weszły do kanonu nauk jako *quadrivium*. Logistyka była dla Archytasa nauką o szczególnej wadze. Zgodnie z tym poglądem, pozwala nam ona poznać prapostacie bytu (a więc dwa pokrewne sobie elementy harmonii: liczbę i wielkość jako takie oraz relacje między liczbą i wielkością) i jest *de facto* nauką czysto pojęciową. Jest ważniejsza od pozostałych nauk, ponieważ dostarcza dowodów tam, gdzie zawodzą inne nauki. Nie potrzebuje w ogóle zmysłów, posługuje się jedynie czystym rozumem i wykonuje operacje na liczbach oderwanych. Logistyka, czyli nauka czysto pojęciowa, sprawdza się nie tylko w świecie przyrody, lecz również w stosunku do spraw ludzkich[31]. Według Archytasa logistyka jest w stanie w społeczności ludzkiej zaprowadzić pokój, sprawiedliwość i uczciwość przez wprowadzanie prostych algorytmów podziału dóbr i zawierania umów.

Wydaje się, że rozważania Platona na temat znaczenia i miejsca kolejnych nauk matematycznych w nauczaniu, zawarte w VII księdze *Państwa*, są polemiką z koncepcją pitagorejską (zawartą w dziele Archytasa). Po wymienieniu arytmetyki oraz geometrii (płaskiej) zauważa, że niewłaściwe jest jako trzecią przyjąć astronomię (jako naukę o bryłach w ruchu). Stwierdza, że najpierw potrzebne są badania bryły samej w sobie. „A słusznie jest po drugim wymiarze brać się do trzeciego. A ten się wiąże z objętością sześcianów i wszystkiego, co posiada głębię”[32]. Wprowadza więc Platon jako trzecią naukę stereometrię i podaje ważne „antypitagorejskie” wyjaśnienie: „Przecież i dziś, choć szerokie koła tych badań nie cenią, a nawet im przeszkadzają, a sami badacze nie umieją powiedzieć, na co by się one przydać mogły, to jednak te rozważania mają swój urok i dzięki temu postępują, wszystkiemu wbrew, więc nie byłoby dziwne, gdyby się te sprawy jednak wyjaśniły”[33]. I dopiero na czwartym i piątym miejscu proponuje dać astronomię i muzykę,

---

31 J. Gajda-Krynicka, *Koncepcje symetrii w filozofii starożytnej,* [w:] *Symetrie w sztuce i naukach humanistycznych*, Wydawnictwo Leopoldinum, Wrocław 1993, s. 20–22.

32 Platon, *Państwo*, op. cit., s. 236.

33 Ibidem, s. 236.

budując je jako nauki całkiem teoretyczne (matematyczne), a nie obserwacyjne. Platon odrzuca metodę poszukiwania liczb w obrazach poruszających się ciał niebieskich, jak również w słyszanych dźwiękach, lecz proponuje wykorzystać te nauki jako narzędzie do odwrócenia duszy od zmysłów w sferę tego, co idealne. Platon wyraźnie odróżnia sferę zmysłową od idealnej (bo tylko ta druga jest racjonalna), a poszukiwanie racjonalności (porządku liczbowego) w tym, co zmysłowe, jest dla niego niewłaściwe. Dla Platona świat liczb jawi się jako oddzielny od świata materialnego, a dla pitagorejczyków stanowią one jedność[34].

Myśl platońska nie jest kontynuacją koncepcji pitagorejskiej, lecz zasadniczo się od niej różni. Jednak bardzo dużo z niej korzysta, podobnie jak z osiągnięć szkoły eleatów i innych szkół czy myślicieli. Jest to swoista synteza.

W Akademii Platońskiej nastąpiło połączenie refleksji filozoficznej z badaniami matematycznymi. Jeszcze Teodor z Cyreny interesował się zasadniczo tylko problemami matematycznymi, natomiast jego uczeń Teajtet (który związał się z Akademią Platońską) był nie tylko matematykiem, ale też filozofem i dążył do zbudowania maksymalnie ogólnej teorii niewspółmierności. Nie tylko rozwiązywał problemy matematyczne, ale też, zgodnie z metodą Platona, analizował hipotezy tkwiące u podstaw rozumowań, badał zagadnienia logiczne i dążył do sformułowania ścisłych definicji matematycznych. Jego oryginalne prace się nie zachowały, a wyniki znane są z *Elementów* Euklidesa, których były istotną częścią.

Na tym też polega wkład samego Platona w rozwój matematyki, że skierował uwagę matematyków i filozofów na problemy metodologiczne i związane z podstawami matematyki. W czasach kierowania przez Platona Akademią nastąpił przełom w matematyce. Stała się wiedzą w pełni abstrakcyjną, zdolną do generowania kolejnych teorii i rozwiązywania stawianych przed nią problemów. Platon znał i kochał matematykę, jednak można zauważyć, że nie udowodnił żadnego znaczącego twierdzenia matematycznego. Mógł jednak nauczać matematyki, a z całą pewnością była ona nauczana w Akademii przez twórczych matematyków, którzy związali się z Akademią, dla których była też ona miejscem ich pracy badawczej. To ci matematycy (a wśród nich Archytas, Teajtet, Eudoksos, Leon, Leodamas, Menaichmos) doprowadzili do reformy w matematyce i do aksjomatyzacji geometrii. Również wkład Platona w aksjomatyzację geometrii wydaje się niezaprzeczalny[35].

---

[34] Por. Ch.H. Kahn, *Pythagoras and Pythagoreans. A brief History,* Hacket Publishing Company, Inc., Indianapolis 2001, s. 39–63; *Archytas*, [w:] *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* źródło: https://plato.stanford.edu/entries/archytas/ [stan z 10.04.2021].

[35] V. Karasmanis, *Plato and the Mathematics of the Academy,* [w:] *Plato's Academy,* s. 139–140.

Matematycy związani z Akademią nie tyle rozwiązywali problemy (to często miało miejsce przy okazji innych badań), lecz zwracali uwagę na precyzyjne opracowanie teorii i metod dowodzenia. Tak postępowali Archytas i Teajtet, tak również inni matematycy, jak: Leodamas (opracował metodę analizy i syntezy), Leon (twórca pierwszej aksjomatyzacji geometrii) czy Eudoksos, (odkrywca metody wyczerpywania oraz teorii stosunków, obejmującej tak liczby, jak i wielkości geometryczne). Jego uczniem i następcą w szkole w Kyzikos był Menaichmos (ok. 380–320 p.n.e.). Próbując rozwiązać problem podwojenia sześcianu, odkrył krzywe stożkowe. Miał brata Dinostratosa (ok. 390–320 p.n.e.), który wykorzystał krzywą kwadratrysę do wykonania kwadratury koła. Znaczenie ma też Autolykos z Pitane (ok. 360–290 p.n.e.) jako autor najstarszego traktatu matematycznego o własnościach geometrycznych obracającej się sfery, który przetrwał do naszych czasów. Prowadzone przez niego prace nad geometrią sferyczną były potrzebne w badaniach astronomicznych. Dwa jego dzieła przetrwały do naszych czasów w oryginalnej postaci i są to najwcześniejsze prace matematyczne, które przetrwały z tamtego okresu. Są to: *O poruszającej się sferze* oraz *O wschodach i zachodach* (książka o astronomii obserwacyjnej). Pisze swoje prace w stylu *Elementów* Euklidesa, realizując program platoński aksjomatyzacji geometrii (również stereometrii). Rozpoczyna od podania twierdzenia w ogólnej postaci, następnie przeprowadza konstrukcję dotyczącą konkretnej figury, a punkty oznacza literami, potem przeprowadza dowód twierdzenia i na końcu wyciągany jest wniosek związany z podaną na początku ogólną formą twierdzenia. Wynika z tego, że sposób konstruowania prac matematycznych, charakterystyczny dla Euklidesa, znany był w Grecji już wcześniej, chociaż nie wiadomo, kto go pierwszy wprowadził. Ponadto widać, że pisząc tę pracę, opiera się na jakiejś pracy wcześniejszej. Ponieważ istnieje duża zależność w poglądach astronomicznych Autolykosa od Eudoksosa, istnieje pewne prawdopodobieństwo, że autorem tej pracy jest sam Eudoksos[36].

W szóstym i piątym wieku p.n.e. matematycy greccy byli rozproszeni, nie było między nimi przepływu myśli (pitagorejczycy utrzymywali wręcz swoje wyniki w tajemnicy). Dopiero Platon sprawił, że pojawiło się miejsce współpracy matematyków i twórczej wymiany myśli[37].

Teorie i metody odkryte przez wspomnianych matematyków pokazały, jak zmierzyć się z odkrytymi wcześniej paradoksami i problemami. Dopro-

---

[36] Podobną jak Autolykos pracę, *Sfery,* napisał 200 lat później Teodozjusz (ok. 160–90 p.n.e.), opartą na tym samym zaginionym dziele. Por. G.L. Huxley, *Autolycus*, źródło: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DSB/Autolycus.pdf [stan z 30.05.2021].

[37] Por. V. Karasmanis, *Plato and the Mathematics of the Academy,* [w:] *Plato's Academy,* s. 110.

wadziły też do powstania czy matematyzacji nowych działów matematyki: astronomii, trygonometrii, optyki, stereometrii, mechaniki, hydrostatyki i geografii matematycznej. Ich efektem był szczytowy okres matematyki greckiej przypadający na III wiek p.n.e. oraz trwający kilka wieków (II wiek p.n.e. do II wieku n.e.) okres zastosowań technicznych matematyki.

Prace Teajteta, jak również Hipokratesa z Chios, Archytasa i innych, kontynuował **Eudoksos z Knidos** (ok. 408–355 p.n.e.), najwybitniejszy matematyk związany z Akademią w czasach Platona. Był uczonym wszechstronnym, nie tylko genialnym matematykiem, miał też wybitne osiągnięcia w dziedzinie astronomii, geografii; był znanym lekarzem, filozofem i mówcą. Przez pewien czas, jako młody człowiek, studiował w Akademii (na samym początku jej istnienia), dokąd przybył z Knidos, miejscowości rodzinnej w Azji Mniejszej. Stamtąd udał się do Heliopolis w Egipcie, gdzie studiował astronomię i matematykę u miejscowych kapłanów (ok. 1,5 roku). Następnie przybył do Kyzikos nad morzem Marmara, gdzie założył szkołę naukową (w tym pierwsze w Grecji obserwatorium astronomiczne).

Od czasów studiów w Akademii zajął się problemem (postawionym przez Platona) matematycznego opisu ruchu planet. Przyjmowano, że ruchy planet muszą być kołowe, ponieważ jest to kształt doskonały. Eudoksos założył, że wokół Ziemi, jako centrum, znajdują się koncentryczne sfery o różnych promieniach wpisane kolejno w siebie (sfery homocentryczne), obracające się jednostajnym ruchem wokół Ziemi. Tak naprawdę ruch poszczególnych ciał niebieskich opisywany jest ruchem kilku sfer. Ruch Słońca i Księżyca opisywany był przy pomocy trzech innych sfer, każda z pięciu planet miała cztery sfery, wyróżniano ponadto jedną sferę zewnętrzną dla tzw. gwiazd nieruchomych. Orbity planet w takim modelu są zapętlone i poruszają się po krzywych zwanych hippopedami (końskimi pętlami). Eudoksos te krzywe opisał jako kombinacje ruchów kołowych. Można je też otrzymać jako przecięcie sfery i powierzchni walca stycznego wewnętrznie do tej sfery. Arystoteles wykorzystał ten model do skonstruowania kosmologii sfer krystalicznych. Kosmologia ta dominowała w nauce przez prawie 2000 lat.

Inny akademicki astronom, Heraklides z Pontu (387–312 p.n.e.), skonstruował model, w którym planety krążyły wokół Słońca, a ono wraz z nimi wokół wirującej Ziemi. Tym samym odrzucił istnienie sfery gwiazd stałych, której istnienie wydawało się naturalnym i zdroworozsądkowym założeniem, gdy patrzymy na niebo z pozycji nieruchomej Ziemi. Przyjmował też, że wszechświat jest nieskończony, a każda planeta tworzy osobny świat. Ten model, mimo że lepiej wyjaśniał obserwowane ruchy planet, nie został jednak przyjęty[38].

[38] L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 106.

Kluczowym wynikiem matematycznym Eudoksosa jest zbudowana przez niego teoria proporcji. Dokonał uogólnienia teorii Teajteta, która pozwalała na wykonywanie operacji arytmetycznych na stosunkach, ale *de facto* trzeba było budować osobną teorię dla każdego rodzaju wielkości. Teoria Eudoksosa dotyczyła tak liczb, jak i wielkości geometrycznych. Formalnie była „otwarta" na dowolnego rodzaju wielkości, byle tylko spełniały przyjęte aksjomaty (tzw. wspólne pojęcia):

1) Rzeczy równe tej samej rzeczy są też równe miedzy sobą.
2) Jeśli rzeczy równe dodamy do równych, to całości też będę równe.
3) Jeśli rzeczy równe odejmiemy od równych, to reszty też będą równe.
4) Rzeczy pokrywające się ze sobą są też równe między sobą.
5) Całość jest większa niż jej część.

Potrzebny był jeszcze jeden aksjomat, który wykluczyłby wielkości generujące spotykane wcześniej problemy. Zauważono, że niektóre wielkości są porównywalne ze sobą, a inne nie; podobnie wielkości osiągalne przy pomocy innych albo nieosiągalne. Zauważono na przykład, że przy pomocy kątów między prostymi nie można „osiągnąć" „kątów rogokształtnych" (kąty między łukami czy między łukiem a prostą; takim kątem jest przykładowo kąt między okręgiem i styczną do niego)[39]. Jeśli weźmiemy okrąg i styczną s do niego w punkcie A (niech α będzie kątem rogokształtnym między styczną s i okręgiem), to każdy kąt między styczną s a dowolną prostą przechodzącą przez punkt A będzie większy od kąta rogokształtnego α. Można powiedzieć, że z punktu widzenia kątów (między prostymi) kąt α jest „nieskończenie mały", chociaż w klasie kątów rogokształtnych istnieją kąty mniejsze od kąta α (wystarczy wziąć okrąg o większym promieniu styczny do prostej s w punkcie A i wtedy powstały kąt α_1, między tym okręgiem a prostą s, będzie mniejszy od kąta α).

Można więc mówić o istnieniu wielkości różnego rodzaju (wielkości tego samego rodzaju są porównywalne). I tak porównywalne są wielkości liczbowe. Są one również „osiągalne".

Ten dodatkowy aksjomat, który wykluczył wielkości nieporównywalne i nieosiągalne (w tym nieskończenie małe i nieskończenie wielkie), został dołączony przez Eudoksosa do poprzednich pięciu. Ma on następującą postać:

Dwie wielkości są do siebie w pewnym stosunku, jeśli pewna wielokrotność każdej z nich może przewyższyć drugą.

[39] Współcześnie nie nazywa się ich kątami.

Innymi słowy stwierdza on, że dwie wielkości p i q są w stosunku, jeśli istnieją takie liczby naturalne n, m, że $np > q$, a $mq > p$. Możemy dobrać liczby n i m tak, aby były minimalnymi liczbami dającymi pożądane nierówności.

Jest to tak zwany aksjomat Archimedesa, a wielkości spełniające ten warunek nazywają się wielkościami archimedesowymi. Grecy odrzucili możliwość tworzenia stosunków wielkości nieporównywalnych. Wydaje się to naturalne, jednak ponieważ czas i przestrzeń są wielkościami nieporównywalnymi, więc tworzenie ich stosunków jest również niedopuszczalne, niemożliwe jest więc matematyczne ujęcie prędkości (jako stosunku drogi do czasu). Taka możliwość pojawiła się dopiero pod koniec średniowiecza, gdy pojawiła się idea funkcji.

Okazuje się, że dla wielkości spełniających aksjomat Archimedesa można zdefiniować stosunek wielu różnych wielkości, na przykład stosunek przekątnej kwadratu i jego boku. Stosunki można ze sobą porównywać i wykonywać na nich działania arytmetyczne, jak na liczbach.

Istotne jest to, że stosunki można ze sobą porównywać. W teorii tej zakłada się, że wielkości a i b oraz a' i b' są w tym samym stosunku (można by powiedzieć, że są równe, jednak takie sformułowanie nie pada, bo to by sugerowało, że stosunki są wielkościami), jeśli dla dowolnych liczb naturalnych n i m spełnione są warunki: (1) $na > mb$, to $na' > mb'$; (2) $na = mb$, to $na' = mb'$; (3) $na < mb$, to $na' < mb'$[40]. Przy pomocy metody Eudoksosa można rozpatrywać stosunki również wielkości niewymiernych i wszelkich innych, byle były archimedesowe.

Zauważmy, że właśnie dzięki aksjomatowi Archimedesa mamy jednoznaczność w definiowaniu stosunków wielkości przy pomocy powyższych warunków. Nie jest bowiem możliwe, aby dwie różne wielkości a i b $(a > b)$ miały ten sam stosunek np. z wielkością c. Równość oznacza, że dla dowolnych liczb n i m zachodzi warunek: $na > mc$, to $nb > mc$. Ponieważ wielkości a i b są różne, więc istnieje taka liczba naturalna n_1, że $n_1(a-b) > c$ (na podstawie aksjomatu Archimedesa). Niech m_1 będzie maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunek $n_1a > m_1c$. Gdyby $n_1b > m_1c$, to $n_1a = n_1(a-b) + n_1b > c + m_1c > (m_1+1)c$, co przeczy założeniu, że m_1 jest maksymalną liczbą naturalną, dla której spełniony jest warunek $n_1a > m_1c$[41].

---

[40] W *Elementach* Euklidesa warunek ten jest sformułowany w następujący sposób: mówimy, że wielkości pozostają w tym samym stosunku pierwsza do drugiej i trzeciej do czwartej, jeżeli dowolnie wzięta wielokrotność pierwszej wielkości i taka sama wielokrotność trzeciej wielkości są bądź większe, bądź równe, bądź mniejsze od dowolnych, ale jednakowych wielokrotności drugiej i czwartej wielkości, wziętych w odpowiednim porządku.

[41] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 101–103.

Relacja „bycia w tym samym stosunku" jest relacją równoważnościową, a więc dzieli stosunki na pewne rozłączne klasy (w dzisiejszej nomenklaturze są to liczby wymierne), a pojęcie stosunku jest dobrze zdefiniowane.

W oparciu o tę teorię Eudoksos mógł rozpatrywać stosunki dowolnych liczb naturalnych (spełniały bowiem aksjomat Archimedesa) i wykonywać na nich operacje arytmetyczne. Również można było rozpatrywać stosunki odcinków (jak i innych wielkości geometrycznych) i wykonywać na nich odpowiednie operacje arytmetyczne. Siła teorii Eudoksosa polegała na tym, że była to ogólna teoria wielkości, ograniczona tylko przyjętymi aksjomatami. Również zostało zdefiniowane ogólne pojęcie stosunku wielkości (liczby stały się uogólnieniami stosunków). A pojęcie liczby dedukowano z pojęcia stosunku. W tej teorii mamy pokazaną możliwość budowania matematyki jako wiedzy ogólnej, której teoria obejmuje wiele różnych sytuacji i przedmiotów, badanych przy pomocy analogicznych procedur (wyznaczonych przez aksjomaty)[42]. Uwaga Arystotelesa zawarta w *Analitykach wtórych* potwierdza, że wówczas przyjmowano, że istnieje taka ogólna teoria stosunków:

> [...] ta sama proporcja ustawianych na przemian członów może być dowiedziona oddzielnie dla liczb, linii, ciał stałych i jednostek czasowych, chociaż może też być dowiedziona łącznie za pomocą jednego dowodu; ponieważ jednak nie było wspólnej nazwy na oznaczenie tej całości, bo liczby, długości, trwania i ciała stałe różnią się między sobą, proporcja ta została dowiedziona dla każdego oddzielnie. Teraz jednak dowodzi się proporcji dla wszystkich tych gatunków na podstawie tego, co mają wspólnego, bo nie posiadają tego atrybutu jako linie czy jako liczby, lecz jako to, na mocy czego przypuszcza się, że im przysługuje ogólnie[43].

Eudoksos pokazał też, że dowolną liczbę można rozumieć jako stosunek pewnych dwóch odcinków (postulat Eudoksosa). Było to jakby zanurzenie liczb naturalnych w przestrzeń stosunków geometrycznych, co zaowocowało budowaniem arytmetyki geometrycznej i próbą redukcji arytmetyki do geometrii. Ta próba zrodziła jednak kolejne trudności i skutkowała kolejnym przełomem w nauce.

Jednak największym sukcesem tej metody było powstanie trygonometrii. Okazało się bowiem, że można w sposób czysto abstrakcyjny badać zależności między kątami poprzez analizę odpowiednich stosunków boków trójkąta. Tego odkrycia dokonał Hipparch, żyjący w II wieku p.n.e. Dzięki temu narzędziu astronomia mogła stać się nauką (można było, między innymi, obliczać odległość z Ziemi do ciał niebieskich). Wynalezione przez

---

[42] Por. K. Fritz, *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont*, [w:] Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin, Nowy Jork 1971, s. 545–576.

[43] Arystoteles, *Analityki wtóre,* [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, s. 264.

niego astrolabium, pozwalające wyznaczać kąt położenia ciał niebieskich nad horyzontem, szybko zostało wykorzystane do nawigacji (dawało bowiem możliwość obliczania położenia statków na morzu).

Kryzys związany z odkryciem wielkości niewspółmiernych został częściowo zażegnany. Jednak dalej pozostał problem porównania struktur związanych z liniami prostymi i krzywymi. Chodziło też o zneutralizowanie paradoksów Zenona z Elei. Kolejną metodą, wprowadzoną przez Eudoksosa, była metoda wyczerpywania. Już we wcześniejszym okresie pokazywano, że możliwe jest na figurach ograniczonych łukami opisywać figury prostoliniowe i kontynuować tę procedurę wielokrotnie (jest to procedura graniczna), zwiększając liczbę boków w nieskończoność, jednak brakowało ścisłej metody obliczeń. Dopiero Eudoksos sformułował tzw. aksjomat Eudoksosa-Archimedesa i pokazał, jak na jego podstawie sformułować metodę (nazwaną później metodą wyczerpywania) nadającą się do wykonywania obliczeń pól i objętości. Ta metoda jest analogiczna do metody całkowania. Opierała się na następującym aksjomacie:

Aksjomat Eudoksosa-Archimedesa o wyczerpywaniu. Niech będzie dany odcinek AB, a na nim dowolny punkt C (różny od punktów A i B). Jeśli istnieje taki rosnący ciąg punktów $\{A_n\}(A_1 < A_2 < A_3 < \cdots)$, że odcinek AA_1 jest większy niż połowa odcinka AB, i podobnie, dla każdego n, A_nA_{n+1} jest większy od połowy pozostałego odcinka A_nB, to istnieje punkt A_k, leżący na odcinku CB. Innymi słowy, jeśli od danej wielkości M odejmiemy wielkość nie mniejszą od jej połowy i od pozostałej części odejmiemy również wielkość nie mniejszą niż połowa tej części, a proces tego odejmowania będziemy kontynuować, to otrzymamy w końcu wielkość mniejszą od dowolnej wcześniej założonej wielkości ϵ, pod warunkiem, że wielkości M i ϵ są tego samego rodzaju.

Aksjomat ten zakłada, że do mierzenia danej wielkości (na przykład odległości AB) nie jest konieczne osiągnięcie wielkości B, a jedynie wystarczy, że jesteśmy w stanie pokonać więcej niż połowę danej odległości. Zauważmy, że aksjomat ten zakłada, że ta dana wielkość jest w jakiś sposób oszacowana (z góry), aby dało się stwierdzić, że odmierzyliśmy więcej niż połowę[44]. I wygląda on jak powtórzenie paradoksu dychotomii. Nie mówi ten aksjomat jednak nic o konieczności osiągnięcia punktu B. „Słabość" ukazaną w tym paradoksie przekuwa jednak w skuteczne narzędzie pozwalające obliczać różne wielkości, np. pola powierzchni czy objętości różnych figur. Przyjrzyjmy się, jak ta metoda działa.

[44] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 103–105.

Eudoksos w oparciu o tę metodę dowodzi, że pola dwóch kół są w takim stosunku do siebie, jak kwadraty ich średnic (dowód znajduje się w XII księdze *Elementów* Euklidesa).

Jeśli weźmiemy dwa koła K_1 i K_2 o średnicach odpowiednio d i e oraz polach A i B, to można wykazać, że $\frac{A}{B} = \frac{d^2}{e^2}$. W celu udowodnienia tej równości wystarczy wykazać, że nie jest możliwa żadna z nierówności: $\frac{A}{B} < \frac{d^2}{e^2}$ ani $\frac{A}{B} > \frac{d^2}{e^2}$. Załóżmy przykładowo, że $\frac{A}{B} > \frac{d^2}{e^2}$. Istnieje wówczas taka wielkość $A' < A$, że $\frac{A'}{B} = \frac{d^2}{e^2}$. Wielkość $A - A' = \epsilon > 0$. Możemy przeprowadzić odpowiednie rozumowanie, wykorzystując aksjomat wyczerpywania. W koła K_1 i K_2 możemy odpowiednio wpisać wielokąty foremne o polach S_n i P_n i liczbie boków *n.* Interesuje nas „pozostała" część tych kół (i ich pola C_1 i D_1), która zostaje po odjęciu wpisanych wielokątów. Ta pozostała część w każdym z kół składa się z *n* identycznych odcinków kołowych. Jeśli wpiszemy teraz w te koła wielokąty o polach S_{2n} i P_{2n} i dwa razy większej liczbie boków, to pola C_2 i D_2 figur, które pozostaną po wyjęciu tych wielokątów, będą więcej niż dwa razy mniejsze niż pola C_1 i D_1. Na podstawie aksjomatu o wyczerpywaniu istnieje taka liczba *k,* że $C_k = A - S_{kn} < \epsilon - A - A'$. Stąd $S_{kn} > A'$. A ponieważ dla dowolnych wielokątów wpisanych w koła mamy, że stosunek ich pól jest równy stosunkowi kwadratów średnic tych kół, to $\frac{S_{kn}}{P_{kn}} = \frac{d^2}{e^2} = \frac{A'}{B}$. Przekształcając ten wzór i korzystając z poprzedniej nierówności, otrzymujemy: $P_{kn}A' = S_{kn}B > A'B$, czyli $P_{kn} > B$. A ponieważ P_{kn} jest polem wielokąta wpisanego w koło o polu *B,* otrzymaliśmy sprzeczność. To dowodzi, że niemożliwa jest nierówność $\frac{A}{B} > \frac{d^2}{e^2}$. W podobny sposób do sprzeczności prowadzi przyjęcie założenia, że $\frac{A}{B} < \frac{d^2}{e^2}$. To dowodzi, że musi zachodzić równość: $\frac{A}{B} = \frac{d^2}{e^2}$. Z tej równości wynika, że stosunek pola koła do kwadratu jego średnicy jest stały: $\frac{A}{d^2} = \frac{B}{e^2}$, a w konsekwencji wzór na pole koła[45].

Uczniem Eudoksosa i najprawdopodobniej jego następcą w szkole w Kyzikos[46] był **Menaichmos** (ok. 380–320 p.n.e.). Był odkrywcą krzywych stożkowych (przed Apoloniuszem) i przy ich pomocy rozwiązał problem delijski (podwojenie sześcianu). Zauważył, że krzywe stożkowe (elipsy, hiperbole

45 Ibidem, s. 83.

46 To z nim związana jest następująca legenda. Podobno miał nauczać geometrii Aleksandra Wielkiego, który domagał się od niego prostej i szybkiej metody opanowania geometrii. Menaichmos odpowiedział Aleksandrowi, że w geometrii nie ma specjalnej drogi królewskiej, jest tylko jedna dla wszystkich.

i parabole) powstają poprzez przecięcie stożka płaszczyznami nierównoległymi do jego podstawy. Nie wiadomo, czy same nazwy wprowadził Menaichmos, ale były one już używane przed Apoloniuszem. Poszedł drogą Hipokratesa, który pokazał, że znalezienie rozwiązania sprowadza się do znalezienia dwóch średnich proporcjonalnych x i y dla danych wielkości a i b, tzn. $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Po przekształceniu mamy bowiem (we współczesnej notacji): $x^2 = ay$ oraz $xy = ab$. Łatwo zauważyć, że poszukiwane rozwiązanie pojawia się jako przecięcie paraboli $x^2 = ay$ oraz hiperboli $xy = ab$[47]. Operacje na krzywych stożkowych okazały się więc drogą do rozwiązania problemu. Proklos, analizując dorobek Menaichmosa, zauważa, że badał on też strukturę matematyki i rozważał różnicę między dwoma znaczeniami wyrażenia (elementu słownego): szerszym i węższym (rygorystycznym). W szerszym znaczeniu każde zdanie a prowadzące do zdania b może być traktowane jako jego element, a w węższym – element jest znaczeniem czegoś prostego i podstawowego, co wynika z jego konsekwencji otrzymanych na podstawie powszechnej zasady (stosowanej we wszystkich dowodach)[48].

Badania nad stożkowymi kontynuował Aristajos Starszy (ok. 370–300 p.n.e.). Był autorem pracy *Pięć ksiąg na temat miejsc bryłowych,* o przekrojach stożkowych, którą traktował jako bardzo cenny wkład w rozwój stereometrii. Pappus, oceniając później dorobek wielu greckich uczonych, uważał ją za pracę bardziej subtelną niż późniejsza praca o stożkowych Euklidesa. Powstała niecałe 200 lat później praca Apoloniusza korzystała z tych prac o stożkowych, jednak znacznie je przerosła[49].

Jak mogliśmy zobaczyć, koniec piątego i pierwsza połowa czwartego wieku p.n.e. zaowocowały powstaniem zaawansowanych metod i teorii matematycznych. Głównie byli to matematycy i filozofowie skupieni wokół Akademii. Badano pojęcia i założenia tkwiące u podstaw matematyki, podano pierwsze aksjomatyzacje geometrii, sformułowano wiele nowych twierdzeń i je udowodniono, zaproponowano inne metody rozwiązania problemów delijskich. Ponadto wypracowano metody analizy oraz metodę *diorismos* badania warunków rozwiązywania problemów. Eudoksos sformułował i rozwijał ogólną teorię stosunków i dał podstawy pod teorię wyczerpywania. Te metody pozwoliły na „matematyczne ominięcie” trudności postawionych przez Zenona z Elei. Pojawił się solidny fundament pod dalszy rozwój matematyki[50].

---

47 Ten opis znajduje się w komentarzu Eutocjusza do *O kuli i walcu* Archimedesa.

48 G.J. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, London, 1889, s. 153–179.

49 T. Heath, *A History of Greek Mathematics,* vol. II, s. 286–292.

50 Por. V. Karasmanis, *Plato and the Mathematics of the Academy,* [w:] *Plato's Academy,* s. 115–116.

4. Platon jako architekt matematyki

Poznanie matematyki i jej metod było dla Platona[51] wstępem do innych nauk. Posiadanie wiedzy geometrycznej było koniecznym warunkiem przed wstąpieniem do założonej przez niego Akademii (w 387 r. p.n.e.). I nie chodziło mu tylko o umiejętności obliczeniowe czy miernicze, lecz o poznanie wiecznych obiektów matematycznych, których badanie podnosi umysł na wyższy poziom i uzdatnia do poznania najwyższych idei oraz samego Dobra (jako źródła całej rzeczywistości). Thomas Heath tak charakteryzuje znaczenie geometrii w myśli Platona:

> The importance of geometry lies, not in its practical use, but in the fact that it is a study of objects eternal and unchangeable, and tends to lift the soul towards truth […] Geometry is concerned, not with material things, but with mathematical points, lines, triangles, squares, &c., as objects of pure thought. If we use a diagram in geometry, it is only as an illustration; the triangle which we draw is an imperfect representation of the real triangle of which we think. Constructions, then, or the processes of squaring, adding, and so on, are not of the essence of geometry, but are actually antagonistic to it. With these views before us, we can without hesitation accept as well founded the story of Plutarch that Plato blamed Eudoxus, Archytas and Menaechmus for trying to reduce the duplication of the cube to mechanical constructions by means of instruments, on the ground that 'the good of geometry is thereby lost and destroyed, as it is brought back to things of sense instead of being directed upward and grasping at eternal and incorporeal images'[52].

Platon dzielił matematykę na pięć wielkich gałęzi: arytmetykę, geometrię, stereometrię oraz astronomię i harmonię muzyczną. Poza tymi czystymi dziedzinami rozpatrywał jeszcze matematykę stosowaną, która nie była już dla niego matematyką *sensu stricto*. Były to matematyczne sztuki związane z umiejętnościami obliczeń, mierzenia (i szerzej pomiarów rzeczywistości zmysłowej), w tym: optyka, muzyka, sztuka nawigacji i pomiarów astronomicznych, sztuka konstruowania urządzeń pomiarowych. Diogenes z Laer-

---

[51] Platon (ok. 427–347 p.n.e.) był synem Aristona, a poprzez matkę, Periktione, wywodził swój ród od Solona. Był uczniem Sokratesa, a po jego śmierci w roku 399 p.n.e. został uczniem Kratylosa oraz Hermogenesa; pierwszy był uczniem Heraklita, a drugi Parmenidesa. Następnie przez wiele lat podróżował, nawiedzając znaczących ludzi oraz szkoły filozoficzne. Był między innymi u Euklidesa w Megarze, założyciela szkoły megarejskiej, w Cyrenie słuchał matematyka Teodora, w Italii pitagorejczyków Filolaosa i Eurytosa. Zdobywał też wiedzę matematyczną i astronomiczną u kapłanów egipskich. Uzyskał więc znaczącą wiedzę i był do matematyki bardzo pozytywnie nastawiony. Szczególnie znaczący był kontakt z Archytasem, pitagorejczykiem, który „nawrócił" go na matematykę. Wcześniej, jako uczeń Sokratesa, niewiele, tak jak jego mistrz, interesował się matematyką.

[52] T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 1, s. 286–287.

tios pisze, że pierwszym, który zastosował w mechanice prawidła matematyczne i użył ruchu mechanicznego do geometrycznych konstrukcji, był Archytas z Tarentu (428–347 p.n.e.), pitagorejczyk, uczeń Filolaosa i przyjaciel Platona. Jest więc uznawany za twórcę mechaniki matematycznej[53].

U podstaw platońskiej filozofii matematyki jest wyróżnienie dwóch całkowicie odrębnych rodzajów bytu: niezmiennego i doskonałego świata idei oraz wiecznie powstającego i ginącego świata zmysłowego, między którymi istnieje trzeci rodzaj bytu – są to przedmioty matematyczne, będące spoiwem tych poprzednich i ich zasadą jedności. Matematyka jest czymś pośrednim między światem idei a światem zmysłowym – jej przedmioty są wieczne i niezmienne, jednak w odróżnieniu od idei, które charakteryzują się jednością (dana idea jest dokładnie jedna i niepodzielna), mogą występować w wielu identycznych egzemplarzach. Byty matematyczne znajdują się pomiędzy absolutną niezmiennością a całkowitą nieokreślonością i zmiennością. Pełnią kluczową rolę, ponieważ są w stanie łączyć całkowicie sprzeczne ze sobą elementy. Mimo że nie charakteryzują się jednością (jak idee), same są przyczyną jedności jako pośredniczące między ideami a rzeczami zmysłowymi i stanowiące substancję tychże rzeczy[54].

Właśnie Platon, na określenie idei w odniesieniu do rzeczy, wprowadza filozoficzne pojęcie substancji (ουσία) jako istoty rzeczy. Substancja jest czymś, co jest (w rzeczy) wieczne, niezmienne i stałe. Wskazuje ona na „rzeczywistość” samej rzeczy oraz jej przyczynę. Poprzez substancję rzecz uczestniczy w tym, co naprawdę jest. Sama substancja nie jest poznawana bezpośrednio, a jedynie analogicznie. Zawiera w sobie coś tajemniczego, nieomal boskiego[55].

Substancja jest niezależna od czynników zewnętrznych i nie zmienia się, mimo zmieniających się własności, jest czymś niezmiennym i „niezniszczalnym”. Jednak samo pojęcie niezniszczalności wyłania z siebie wtórnie dwa przeciwstawne znaczenia pojęcia substancji. Po pierwsze, o ile wszystko podlega zniszczeniu i przemianom, substancja jest tym, co trwa niezmiennie w tych rzeczach. Jest jakimś niezmiennikiem istnienia. Z drugiej strony, ponieważ objawia się w różnych formach istnienia, cechuje się absolutną zmiennością. Ten problem uwypuklony w sporze Parmenidesa z Heraklitem (można go nazwać antynomią substancji) może być jakoś rozwiązany przez ukazanie podobieństwa między zmiennością i niezmiennością. Właśnie platońskie przedmioty matematyczne pokazują tę możliwość. Odnoszą się bo-

53 Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, PWN, Warszawa 1984, s. 506–508.

54 Platon, *Timajos*, PWN, Warszawa 1986, s. 44.

55 Platon, *Kratylos*, 401c; A. Maryniarczyk, *Z dziejów słowa „substancja”*, „Peitho. Examina Antiqua” 2017, nr 1 (8), s. 372–374.

wiem do świata idei (liczby idealne czy idealne obiekty geometryczne) oraz do świata zmysłowego. To podobieństwo pozwala poznać metoda dialektyki – jako droga do prawdy.

Spójrzmy, jak Platon pod koniec VI księgi *Państwa* tłumaczy tę kwestię:

> Myślę, że wiesz, jak to ci, którzy się geometriami i rachunkami, i takimi tam rzeczami bawią, zakładają to, co nieparzyste i parzyste, i kształty, i trzy postacie kątów, i inne rzeczy tym pokrewne, zależnie od tego lub owego zdania, bo niby to już wiedzą, robią z tego treść założeń i uważają za właściwe ani sobie samym, ani drugim nie rozwijać i nie uzasadniać już tych rzeczy w żaden sposób, bo one są każdemu jasne; od nich więc zaczynają i przychodzą do kroków następnych, kończąc oczywiście na tym, co sobie obrali jako cel rozważania. Posługując się przy tym postaciami widzianymi i mówią o nich, jednakże nie tyle widziane postacie mając na myśli, tylko tamte, do których widziane są tylko podobne; oni myślą o Czworoboku samym i o Przekątnej samej […] których nikt nie potrafi dojrzeć inaczej, jak tylko myślą[56].

Platon pokazuje, że rozumowanie matematyczne musi zaczynać się od pewnych założeń, hipotez, które traktowane są jako oczywiste dla wszystkich i z których wyprowadza się kolejne elementy, aż dojdzie się do konkluzji, celu dowodzenia. Jednak wykonywane rysunki, wzory i inne zapisy pełnią tylko rolę pomocniczą, a w myślach matematycy operują obiektami matematycznymi, niewizualnymi. Jednak w przyjmowaniu założeń (aksjomatów, postulatów) widzi Platon zagrożenie dla dowodzenia matematycznego, jeśli traktujemy je jako prawdziwe i pewne. Bo wtedy umysł nie potrafi wyjść z tego, co zakłada, i wznieść się ponad założenia. I zamiast dojść do prawdy, spada jeszcze niżej i „jako obrazów używa wtedy dusza tych przedmiotów, które się odwzorowują w jeszcze niższych, bierze jest za rzeczy same i ceni je jako naoczne i wyraźne”[57].

I w kolejnym fragmencie opisuje metodę dialektyczną, która pozornie jest podobna do metody matematycznej. Dowodzenie dialektyczne również zaczyna się od pewnych założeń, jednak umysł nie traktuje ich jak prawdziwych, tylko jako hipotezy, z których krok po kroku dochodzi do prawdy. W metodzie dialektycznej przyjęte założenia nie są ani początkiem, ani efektem jakiegoś poznania na innej drodze (intuicyjnej, empirycznej, objawionej), lecz są to tylko „szczeble pod stopami, jako punkty oparcia i odskoku, aby się wznieść do szczytu i do początku wszystkiego, dotknąć go i w końcu zejść znowu w dół, trzymając się tego, co się samo szczytów trzyma, a nie posługując się przy tym w ogóle żadnym materiałem spostrzeżeniowym, tylko postaciami samymi poprzez nie same i do nich samych dochodząc i na

[56] Platon, *Państwo,* ks. VI, Wydawnictwo Antyk, Kęty 1997, s. 217.
[57] Ibidem, s. 218.

nich kończąc"[58]. Na tej drodze dochodzimy na szczycie do **pierwszych zasad** i przy ich pomocy możemy zejść z powrotem, krok po kroku do wcześniej przyjętych hipotez, aby je naprawdę poznać. Na tej drodze w dół niepotrzebne już są żadne obrazy rzeczy zmysłowych. Mamy więc dwa etapy metody dialektycznej: są to droga w górę oraz droga w dół. Istnieje pewna analogia do matematycznej metody analizy i syntezy. Tak jak po drodze w górę następuje droga w dół, tak też po analizie ma miejsce synteza. Jest to ważne platońskie odkrycie z punktu widzenia logicznej ścisłości – potwierdzeniem prawidłowo wykonanej analizy jest konstrukcyjna synteza. I podobnie poznanie idei matematycznych na drodze dialektycznej pozwala w kolejnym kroku rozpoznawać matematyczną strukturę rzeczywistości i dokonywać matematycznych konstrukcji[59].

Jeśli spojrzymy na strukturę *Elementów* Euklidesa z punktu widzenia metody dialektycznej, to widzimy, że traktowanie przyjętych postulatów jako niewzruszonej prawdy (nienaruszalnych założeń) oddala nas od poznania prawdy o strukturze przestrzeni i innych obiektów geometrycznych. Spektakularnym przykładem jest historia piątego postulatu Euklidesa o prostych równoległych. Wiele wieków musiało minąć, zanim uznano ten postulat za hipotezę (dowolne założenie), które może być zmienione na inne. Kolejne „drogi w górę" w oparciu o alternatywne „piąte postulaty" (budowa geometrii nieeuklidesowych) odsłoniły głębszą prawdę o własnościach przestrzeni. Zgodnie z platońską metodą dialektyczną wszystkie postulaty i aksjomaty, na których budujemy teorię matematyczną, należy traktować jako hipotetyczne (dowolne) założenia i dopiero na końcu procesu poznawczego ujawni się ich znaczenie.

Jak zauważyliśmy, z metodą dialektyczną związana jest metoda matematycznego dowodzenia – metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Mimo że metody dialektyczna i dedukcyjna były stosowane w matematyce przed Platonem, to jednak Platona trzeba uznać za twórcę metody aksjomatyczno-dedukcyjnej, poprzez jej sformułowanie, opisanie, pokazanie jej wagi dla rozwoju matematyki. A najważniejsze jest odkrycie związane z „wpisaniem" metody matematycznej w ogólniejszy schemat metody dialektycznej i uczynienie z matematyki propedeutyki dla filozofii[60].

Odkrywanie metody dialektycznej ściśle wiąże się u Platona z ustaleniem kolejnych stopni wiedzy – wyróżnia ich pięć. Są najpierw trzy przedstawienia danego przedmiotu, o którym chcemy zdobyć wiedzę: pierwszą jest na-

---

[58] Ibidem, s. 219.

[59] Por. T. Heath, op. cit., s. 290–292.

[60] Por. Z. Jordan, *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej,* [w:] *Historia logiki dawniejszej,* „Dialogikon", Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1995, s. 151–162. Praca Jordana ukazała się w „Przeglądzie Filozoficznym" 1937, z. 1, s. 151–162.

zwa, potem określenie (definicja), a następnie obraz. Nie są one jeszcze *stricte* wiedzą, wiedza bowiem jest umysłowym ujęciem obiektu jako czegoś jednego, niemożliwego do ujęcia w formach materialnych. Poznanie etapu czwartego koncentruje się na poznaniu jakości danego przedmiotu, ale nie dociera do jego istoty. Właściwe poznanie dokonuje się dopiero na piątym stopniu, jednak te poprzednie są niezbędne. „Bo jeżeli ktoś jakoś nie uchwyci owych czterech ujawnień tego wszystkiego, nigdy całkowicie wiedzy piątego ujawnienia nie stanie się uczestnikiem”[61]. Trzeba wielokrotnie przemierzyć drogę w górę i w dół, poprzez poszczególne stopnie, aby zrodziła się wiedza tego, co dobre z natury, w tym, kto jest dobry z natury[62]. Osiągnięcie prawdziwego poznania wiąże się u Platona z rozwojem duchowym tego, kto tę wiedzę osiąga. Ponadto wiedza na etapie piątym jest bezpośrednia, nie można jej ująć w słowa ani w obrazy, przedstawienia. Rodzi się „z długotrwałego obcowania z przedmiotem, na mocy zżycia się z nim, nagle, jakby pod wpływem przebiegającej iskry, zapala się w duszy światło i płonie, już odtąd samą siebie podsycając”[63]. Poznanie matematyczne dotyczy czwartego stopnia wiedzy, jednak najbardziej zbliża się do stopnia piątego. Język matematycznych pojęć i symboli jest bowiem najmniej skażony niedoskonałością mowy. To poznanie matematyczne „związane jest z działaniem rozsądku (διάνοια). W nim to spełnia się działalność matematyka i funkcjonowanie metody analitycznej oraz aksjomatycznej, stanowiące istotę rozumowania, którego mocą rozpatruje się przyjęte założenia w celu uchwycenia ich zasadności. Jest to szczególny rodzaj dedukcji, polegający na rozpatrywaniu konsekwencji przyjęcia określonych założeń w drodze analizy wniosków, do jakich prowadzi ich przyjęcie”[64]. Istota metody analitycznej polega na tym, że uprawnione jest wyciąganie wniosków z pewnych przypuszczeń, założeń, nawet jeśli nie wiemy, czy są one prawdziwe, czy fałszywe. Było to wielkie odkrycie naukowe, które pociągnęło za sobą kolejne i dało rozwój matematyki. Na tej metodzie opiera się metoda analizy w czasach starożytnych, ale również metoda analizy matematycznej, która powstała w epoce nowożytnej[65].

Poprzez systematyczne stosowanie metody analitycznej, a więc analizę konsekwencji, do jakich prowadzi przyjęcie ustalonych założeń (hipotez), dochodzi się do ustalenia związków między twierdzeniami i sformułowania

---

61 Platon, *Listy* (*List siódmy*), tłum. M. Maykowska, PWN, Warszawa 1987, s. 53.

62 Ibidem, s. 54–55.

63 Ibidem, s. 50.

64 B. Dembiński, *Późna nauka Platona,* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003, s. 61.

65 Z. Jordan, *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej,* s. 156–158.

twierdzeń (aksjomatów), które należy przyjąć bez dowodu. W ten sposób rodzi się metoda aksjomatyczno-dedukcyjna i jest budowana teoria jako struktura aksjomatyczna (tak powstawały *Elementy* Euklidesa)[66].

Z jednej strony droga do świata idei prowadzi przez świat przedmiotów matematycznych, jednak ich podstawę ontyczną stanowią liczby i figury idealne (bytujące w świecie idei). Tak jak wszystkie idee – są niezłożone i każda z nich stanowi całość. Ich poznanie przebiega w oparciu o metodę dialektyczną (metoda pośrednia) oraz metodę oglądu noetycznego (bezpośredni wgląd). Nie można ich poznawać tak jak przedmiotów matematycznych przy pomocy metod analizy i aksjomatyczno-dedukcyjnej. Liczby idealne nie są liczbami matematycznymi (nie można więc wykonywać na nich żadnych operacji matematycznych), lecz stosunkami monad, a liczby matematyczne są ich postaciami. I tak postacią stosunku 2: 1 jest liczba 2, stosunku 3: 1 liczba 3, itd. Te stosunki (liczby idealne) są **wspólną miarą**, relacją pomiędzy monadami tworzącymi daną liczbę[67]. W jaki jednak sposób z tych liczb idealnych generowane są liczby matematyczne? To generowanie musi przebiegać w ramach „drogi w dół" po uprzednim dojściu na „sam szczyt". Jednak na końcu drogi dialektycznej do świata idei odkrywamy najwyższe zasady (bytowe principia). Są to Jedno (Monada-Principium) i Nieokreślona Dyada. Platon zauważa, że są one ponad ideami, ale to dzięki nim idee cechują się jednością oraz jest ich wiele i są zróżnicowane. To Jedno sprawia, że przedmioty cechują się tożsamością i określonością, a Dyada generuje wielość i zróżnicowanie. Te principia sprawiają, że istnieją różne struktury, które można ujmować przy pomocy matematycznych modeli. Z tych principiów powstają najpierw liczby idealne: jedność z Monady, dwójka – z Monady i Nieokreślonej Dyady. W końcu powstaje dwójka w obszarze liczb i kolejne liczby.

> Tak też powstały z pryncypiów pozostałe liczby, przy czym Jedno działa tu zawsze jako zasada ograniczenia, a Nieograniczona Dyada zawsze podwaja, rozciągając liczby w nieskończoną wielość[68].

William David Ross w książce *Plato's Theory of Ideas* zauważa, że podobnie jak liczby idealne istnieją idee geometryczne. Najważniejsze są idee od-

---

[66] Ibidem, s. 158–162.

[67] B. Dembiński, op. cit., s. 81–84. Odkrycie to (i interpretacja) zostało dokonane przez Zbigniewa Jordana w książce *O matematycznych podstawach systemu Platona. Z historii racjonalizmu,* Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk – Prace Komisji Filozoficznej, t. 6, Poznań 1937. Interpretacja Jordana odwoływała się do tak zwanych „niepisanych nauk Platona", zawartych głównie w *Metafizyce* (Księga XII i XIV) Arystotelesa, oraz niektórych dialogów, takich jak: *Teajtet, Fileb, Timajos.*

[68] Ibidem, s. 95.

powiadające pierwszym czterem liczbom idealnym. I tak jedności odpowiadałby idea punktu, liczbie idealnej dwa – idea linii (dwójność uobecniona w nieokreślonej długości), liczbie trzy – idea powierzchni (trójność uobecniona w nieokreślonej szerokości), liczbie cztery – idea bryły (cztery determinuje „głębię" i najprostszą bryłę – tetraedron). „Idee geometryczne stanowiłyby zatem warunek określoności i bycia podstawowych przedmiotów geometrii – matematycznie pojmowanych: punktu, linii, powierzchni bryły, oraz występowania trzech dymensji: długości, szerokości i głębokości"[69]. Wskazane cztery idee geometryczne stanowią wymiarową postać liczb idealnych. Oczywiście te idee nie są przedmiotami matematycznymi, nie mają kształtu, są natomiast wystarczającą podstawą zdefiniowania wszystkich obiektów geometrycznych i odpowiadających im zjawisk w świecie zmysłowym[70].

Jak zauważyliśmy, dla Platona poznawanie bytów idealnych jest możliwe przy pomocy metody dialektycznej, która pozwala na uchwycenia ich relacyjnego (nie obiektowego) charakteru. Liczby idealne (i podobnie idee geometryczne) są bowiem stosunkami, ideami–miarami (ogólne formy idealnych proporcji), w których zawierają się różne relacje odpowiedniości: między principiami a liczbami idealnymi, między liczbami idealnymi a ideami geometrycznymi, między ideami a przedmiotami matematycznymi, między przedmiotami matematycznymi a zjawiskami; a w samej metodzie dialektycznej – między myśleniem i pojęciami a bytem[71].

Zauważmy, że w teorii proporcji Eudoksosa z pojęcia stosunku dedukuje się pojęcie liczby (patrz paragraf 3 niniejszego rozdziału). Platon pokazuje zatem w swojej teorii liczb idealnych, jakie jest źródło tej metody.

Poznawanie świata idei (w tym liczb idealnych oraz idei geometrycznych jako szczególnego rodzaju idei) jest możliwe, jak stwierdziliśmy, w oparciu o metody dialektyczną i noetycznego bezpośredniego oglądu. Działanie tych metod można najlepiej zaobserwować w opisie tworzenia przez platońskiego Demiurga (budowniczego świata) duszy świata. Na pierwszym etapie drogi tworzenia dostrzega fundamentalną sprzeczność między doskonałością i niezmiennością świata idei a nieokreślonością i zmiennością pramaterii. Zadanie, przed którym staje Demiurg, wydaje się w pierwszym ujęciu niemożliwe do wykonania. To doświadczenie pobudza jednak jego myślenie i sprawia, że zwraca się i koncentruje na kontemplacji Dobra-Piękna. Odkrywa swoje pełne pokrewieństwo z Dobrem i pragnie zejść do istniejących światów i uporządkować pramaterię, aby uczynić z niej piękny i harmonijny

[69] Ibidem, s. 94–95.

[70] T. Ross, *Plato's Theory of Ideas*, Clarendon Press, Oxford 1951, s. 206–212.

[71] Por. ibidem, s. 98–106.

świat. Jedynym motywem jego działania jest dobro. Tworzy wtedy „trzecią substancję” (przedmioty matematyczne) i dzięki niej pramateria poddaje się „modelowaniu”, a świat staje się Kosmosem. Podobieństwo między realizowanymi wieloma kopiami pozwala odnieść się do jedności idei-wzorca. Demiurg tworzy też czas jako ruchomy obraz wieczność – nadaje mu w tym celu strukturę cykliczną. W ten sposób maksymalnie zbliża się trwanie świata do doskonałości wieczności świata idei. A nieskończoną ilość kształtów geometrycznych (w tym kształtu całego świata) ujmuje przy pomocy kilku doskonałych brył, pięciu wielościanów foremnych (tzw. brył platońskich), które otrzymuje z elementarnych obiektów geometrycznych. Byty matematyczne są nierozdzielnie związane z aktem twórczym Demiurga (inaczej niż odwieczne idee i pramateria), są narzędziem przemiany chaosu oraz konstrukcji piękna i harmonii[72].

5. Arystotelesowska koncepcja nauki. Powstanie logiki

Arystoteles, będą uczestnikiem Akademii Platona, na bieżąco śledził dyskusje i osiągnięcia matematyków. W jego Likejonie dyskutowano kwestie matematyczne, szczególnie problem wielkości niepodzielnych. Efektem tych dyskusji była praca *O liniach niepodzielnych* (czasami przypisywana samemu Arystotelesowi). Pojawiła się koncepcja Ksenokratesa (trzeciego w kolejności scholarchy Akademii, po Platonie i Speuzypie), który przyjmował istnienie linii i innych wielkości niepodzielnych w celu uniknięcia paradoksów Zenona. Została ona jednak odrzucona.

Arystoteles przede wszystkim odrzucił poglądy Platona na temat matematyki i przedmiotu jej badań. Często jednak w swoich pracach odwoływał się do matematyki, również zbudowana przez niego logika była w dużym stopniu wzorowana na metodzie matematycznego dowodzenia. Logika stała się wzorem nauki abstrakcyjnej, apriorycznej i dedukcyjnej. Przez to w znaczący sposób (trudno jednoznacznie stwierdzić, czy negatywny, czy pozytywny) wpłynął na rozwój matematyki. Stanowczo odrzucił możliwość używania pojęcia nieskończoności w matematyce. Paradoksy rozwiązywał przy pomocy myślenia logicznego, zdroworozsądkowego i analizy filozoficznej. Natomiast podjął się ścisłej analizy podstaw matematyki i miejsca definicji w jej strukturze. Są to rozważania znaczące i pozytywne dla matematyki.

Arystotelesowską klasyfikację nauk oraz stworzoną przez niego logikę można potraktować jako konkurencyjny, względem pitagorejczyków, Pla-

[72] Platon, *Timajos,* s. 35–46.

tona czy Demokryta, projekt nauki. Klasyfikacja Arystotelesa wyznacza ustalone miejsce dla matematyki w strukturze wiedzy[73]. W podziale nauki na teoretyczne, praktyczne i wytwórcze, matematyka znalazła się wśród nauk teoretycznych (miały one rangę najwyższą), obejmujących, poza nią, fizykę i metafizykę. Była na wyższym stopniu abstrakcji niż fizyka, jednak na niższym niż metafizyka. Do zakresu badań matematyki nie należą żadne byty same w sobie, lecz jedynie przedmioty ze względu na liczbę i kształt. Matematyka jest nauką o ilości i formach geometrycznych. To, co bada (czyli liczba i formy geometryczne), jest ściśle związane z materią, w której tkwi, chociaż przedmioty jej badań są nieruchome, a jako przedmioty badań – oddzielone od świata zmysłowego. To odróżnia ją, z jednej strony, od fizyki, która zajmuje się przedmiotami materialnymi zdolnymi do ruchu (i nieoddzielonymi od materii), a z drugiej strony – od metafizyki, której przedmioty badań są nieruchome i całkowicie oddzielone od materii – jest umieszczona pomiędzy fizyką i metafizyką, jeśli chodzi o związek ze światem zmysłowym i stopień abstrakcji.

W ramach przeprowadzonej przez Arystotelesa klasyfikacji można traktować matematykę jako łącznik między wiedzą maksymalnie ogólną, dotyczącą bytu jako bytu, a wiedzą dotyczącą konkretnych przedmiotów świata materialnego. W żadnym przypadku nie można traktować tworów matematycznych jako istniejących oddzielnie (niezależnie od ciał zmysłowych).

> Gdyby bowiem obok ciał zmysłowych istniały inne ciała stałe oddzielne od nich i wcześniejsze, to oczywiście musiałyby istnieć także inne i oddzielne powierzchnie, punkty i linie, bo wymaga tego konsekwencja. Gdyby zaś istniały, to znowu obok powierzchni, linii i punktów matematycznych ciał stałych musiałyby istnieć inne, oddzielne. […] To nagromadzenie staje się jednak absurdalne; powstaje bowiem rodzaj ciał stałych poza ciałami zmysłowymi, mianowicie powierzchnie istniejące niezależnie od zmysłowych, powierzchnie brył geometrycznych i powierzchnie samoistne poza powierzchniami tych ciał stałych. Następnie cztery rodzaje linii i pięć rodzajów punktów. Którymi z nich ma zajmować się matematyka?[74]

Jak wspomniałem, twory matematyczne mają jednak walor abstrakcyjnego istnienia. Mają związek z rzeczami zmysłowymi, podczas analiz są jednak traktowane jako oddzielone od nich. Badania matematyczne polegają na analizie atrybutów obiektów matematycznych jako takich, bez odnoszenia ich do przedmiotów zmysłowych.

> Każde zagadnienie można najlepiej zbadać w ten sposób, jeżeli to, co nieodłączalne, przyjmie się jako odłączalne, tak jak to czyni arytmetyk i geometra. Na przykład,

---

[73] Arystoteles, *Fizyka,* tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie,* t. 2, ks. II, Warszawa 1990.

[74] Arystoteles, *Metafizyka*, ks. M. (XIII), 1076 b.

człowiek jako człowiek jest rzeczą jedną i niepodzielną; arytmetyk przyjął jakąś niepodzielną jedność i bada następnie, czy jakieś cechy przysługują człowiekowi jako jedności niepodzielnej. Natomiast geometra bada go nie jako człowieka ani jako jedność niepodzielną, lecz jako ciało przestrzenne. Bo właściwości, które by mu mogły przysługiwać, nawet gdyby przypadkiem nie był jednością niepodzielną, mogłyby mu oczywiście przysługiwać, niezależnie od tych atrybutów. Geometrzy zatem twierdzą słusznie; mówią bowiem o rzeczach istniejących i przedmioty ich badań istnieją; byt istnieje bowiem w dwóch postaciach: byt w rzeczywistości (jako entelechia) i jako materialny (tzn. potencjalnie)[75].

Nauki matematyczne mówią w konsekwencji wiele o takich ogólnych i abstrakcyjnych pojęciach, jak dobro czy piękno. „Głównymi formami piękna jest porządek, symetria i wyrazistość, czym odznaczają się szczególnie nauki matematyczne"[76].

Mimo tak silnego związku zarówno z rzeczami zmysłowymi, jak i pojęciami ogólnymi będącymi najpełniejszymi atrybutami bytu, badania matematyczne nie są dla Arystotelesa podstawą badań fizyki czy metafizyki. Wszystkie te badania odbywają się niezależnie od siebie, posługując się własnymi, specyficznymi metodami. Ponieważ ustalenie zakresu badań poszczególnych nauk oparte jest na sztywnym podziale bytu na różne kategorie (ruchome i nieruchome, oddzielone i nieoddzielone), więc niemożliwe staje się ich wzajemne pełniejsze przenikanie.

Ponieważ jednak logikę można traktować jako pewną realizację platońskiej dialektyki, a matematyka w filozofii Platona miała niższą rangę od dialektyki, arystotelesowski projekt nauki można traktować jako realizację projektu platońskiego. Świat idei odnajdujemy w świecie pojęć ogólnych, w ideach moralnych czy w obiektach badanych przez metafizykę (czyli badanie tego, co istnieje w rzeczywistości). Mamy specyficzne rozbicie świata idei na trzy światy będące przedmiotem badań nauk teoretycznych, metafizyki oraz etyki. Logika jest natomiast zwornikiem tych światów i ich podstawą (nauka podstawowa oraz metanauka)[77].

Paradoksy wypowiedziane przez eleatów, megarejczyków i sofistów pokazywały trudności związane ze stosowaniem nauki do poznawania i zrozumienia świata. Generowały sprzeczności, które podważały wartość i możliwość poznania (zmysłowego, ale i racjonalnego). W szczególności paradoksy eleatów można uznać za paradoksy myślenia matematycznego. Arystoteles, tkwiąc w ogniu ówczesnych dyskusji i poszukiwań, wybrał drogę częściowego odejścia od matematyki i ograniczenia jej rangi w poznaniu

[75] Ibidem, ks. M. (XIII), 1078 a.
[76] Ibidem, ks. M. (XIII), 1078 a.
[77] T.L. Heath, *Mathematics in Aristotle,* Clarendon Press, Oxford 1980.

świata oraz w edukacji. Matematyka ma dotyczyć jedynie wąskiego wycinka bytu – kategorii ilości. Paradoksy pojawiały się bowiem przy próbie stosowania matematyki do opisu przestrzeni i ruchu. Ma jednak pozostać niezbędnym elementem nauczania i wiedzy, gdyż uczy, na stosunkowo prostych przykładach, jak poznawać byt i jego kategorie. Matematyczne dowody, które często przytacza Arystoteles, służą często jedynie jako ilustracje do prowadzonych przez niego rozważań.

Paradoksy dotyczyły jednak nie tylko matematyki, lecz wszelkiego myślenia dedukcyjnego. Jedna z aporii, która powstała w szkole megaryjskiej, miała szczególne znaczenie. Jest to tak zwany „paradoks kłamcy". Była analizowana przez starożytnych, między innymi przez Arystotelesa i Chryzypa, a w czasach współczesnych – przy badaniu podstaw teorii mnogości. Aporia stwierdza, że jeśli mówię, że to, co aktualnie stwierdzam, jest kłamstwem, to nie wiadomo, czy wypowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa. Aporię można ująć formalnie w następujący sposób. Niech p będzie dowolnym zdaniem (a więc wypowiedzią, która jest albo prawdziwa, albo fałszywa), natomiast q zdaniem stwierdzającym, że zdanie p jest fałszywe. Jeśli uznamy, że jedno z tych zdań jest prawdziwe (fałszywe), to drugie musi być odpowiednio fałszywe (prawdziwe). Aporia wynika z tego, że łączymy zdania p i q w jedno zdanie; i wówczas to nowe zdanie nie może być ani prawdziwe, ani fałszywe, nie jest więc zdaniem (przynajmniej w sensie logicznym). Jest więc logicznym nonsensem. Aporia wzięła się stąd, że zidentyfikowaliśmy zdanie z jego oceną logiczną, a ocena dotyczyła zdania, które nie zostało jeszcze wypowiedziane. Ocena logiczna zdania jest możliwa dopiero wówczas, jeśli to zdanie zostanie najpierw wypowiedziane. W paradoksie kłamcy pojawia się więc zdanie nieokreślone, co jest niedopuszczalne. Z formalnego punktu widzenia również nieokreślone byłoby powyższe zdanie, gdyby zdanie q stwierdzało, że zdanie p jest prawdziwe. Wprawdzie sprzeczności byśmy nie otrzymali, ale formalnie sytuacja jest taka sama[78].

W podobny sposób nieokreślona może być też procedura, na przykład argumentacyjna czy dowodowa. Taką sytuację mamy w paradoksie „krokodyla", opisującym mało przyjemne okoliczności. Krokodyl porwał dziecko i mówi do ojca, że odda mu je pod warunkiem, że odgadnie, co krokodyl zamierzał z nim zrobić. Mamy tutaj procedurę określoną przez dwa różne warunki: postanowienie krokodyla oraz umowę między krokodylem a ojcem. Niezależnie od tego, czy ojciec odgadnie postanowienie krokodyla, czy nie,

[78] Te analizy można znaleźć w pracy J. Sleszyńskiego, *Teoria dowodu,* t. 1, Wydawnictwo UJ, Kraków 1925, s. 37–38.

okazuje się, że krokodyl ma mu dziecko oddać i zarazem nie oddać. Jeśliby ojciec powiedział, że krokodyl mu dziecka nie odda, i zgadł, to krokodyl musiałby mu dziecko oddać na podstawie umowy, a jeśliby nie zgadł, to znaczy, że krokodyl postanowił mu dziecko oddać, więc na podstawie swojego postanowienia musi mu je oddać. Można jednak to rozumowanie przeprowadzić jeszcze raz, rozpoczynając je tak samo, w następujący sposób. Jeśliby ojciec powiedział, że krokodyl mu dziecka nie odda, i zgadł, to mu dziecka krokodyl nie odda na podstawie swojego postanowienia, a jeśliby ojciec nie zgadł, to mu nie odda na podstawie umowy. Wszystko zależy od tego, jak poprowadzimy rozumowanie. Pokazywał więc ten paradoks, że poprawne rozumowanie (oparte na tych samych przesłankach) może prowadzić do różnych, sprzecznych ze sobą wniosków. Wynik rozumowania zależy od tego, od którego z tych warunków zaczniemy naszą argumentację. Jeśli od umowy, to musi mu oddać, a jeśli od postanowienia – to nie musi. Widać, że w tym przypadku procedura „oddania dziecka" nie jest ściśle określona. Jednak wydaje się, że w argumentacjach, również naukowych, nigdy nie mamy do końca ściśle określonych procedur.

W przypadku nauki budowanej zgodnie ze schematem Arystotelesa mamy dokładnie taką sytuację, że „przenosimy" badaną rzeczywistość na poziom wiedzy ogólnej i tam ją badamy oraz wyprowadzamy wnioski, na podstawie ogólnych procedur (rozumowań) mające obowiązywać również analizowaną rzeczywistość. Arystoteles zakłada, że tworzone w procesie abstrakcji oraz indukcji (są to ogólne procedury) pojęcia ogólne ujmują istotę opisywanych bytów, są ujęciem całej klasy przedmiotów indywidualnych o tych samych istotnych cechach. Następuje ewidentne połączenie poziomu rzeczywistości zmysłowej z obszarem językowym w jednej teorii, co poddane jest krytyce w paradoksie kłamcy. Natomiast proces tworzenia pojęć ogólnych, w których ujmujemy istotę badanych rzeczy, jest kwestionowany w paradoksie krokodyla.

Arystoteles chce zbudować nową naukę (a raczej metodę badań naukowych, narzędzie do analizy innych nauk), której nie umieszcza w swojej klasyfikacji, która ma operować niezawodnymi schematami rozumowania. Ustalała ona stałe związki obowiązujące wszystkie obszary rzeczywistości, dotyczyła więc jakby tej nowej rzeczywistości logicznej, a tym samym mogła uniknąć sprzeczności paradoksów „językowych" związanych z mieszaniem różnych poziomów rzeczywistości i różnych procedur argumentacyjnych. Miała ona pełnić w pewnym sensie rolę matematyki i miała te sprzeczności „dialektyczne" wyeliminować. Z jednej strony ma postać wiedzy dialektycznej (bada podstawy nauk i jest drogą do prawdy), a z drugiej budowana jest na wzór matematyki – ma postać nauki formalnej i stosuje (przynajmniej w zamierzeniu) również metodę aksjomatyczno-dedukcyjną. Miała ona dokonać kategoryzacji języka i całego bytu. Była propedeutyką wszystkich nauk i narzędziem pracy uczonego[79].

Istnieje jednak zasadnicza różnica między metodą dialektyczną (logiczną) Arystotelesa a metodą dialektyczną (hipotetyczno-dedukcyjną) Platona. Przede wszystkim metoda Platona dotyczyła bytów abstrakcyjnych, oderwanych od rzeczywistości, a Arystotelesa – pojęć ogólnych, otrzymanych w wyniku procesu indukcyjnego z konkretnych i jednostkowych bytów. Metoda Platona dowodzenia i argumentacji składa się z dwóch etapów (droga wzwyż i droga w dół), ma więc strukturę cyrkularną, a metoda Arystotelesa ma strukturę liniową (strzałka dowodzenia biegnie w jedną stronę od przyczyn, przesłanek do wniosków). Ponadto logika Arystotelesa jest wiedzą ogólną raczej niż abstrakcyjną w znaczeniu Platona. Znaczy to, że może być stosowana do różnego rodzaju nauk, jest ich uniwersalną podstawą, narzędziem badań i dowodzenia.

W szkole perypatetyckiej, w ramach polemiki logiki z matematyką, pokazywano ograniczone możliwości metody matematycznej. Następujący paradoks pokazuje trudności związane ze stosowaniem matematyki do opisu rzeczywistości.

Arystoteles w swojej *Mechanice* (współcześnie nie przypisuje się tej pracy Arystotelesowi) formułuje paradoks, który ma pokazać trudności w stosowaniu myślenia abstrakcyjnego matematycznego do rzeczywistości materialnej (paradoks koła Arystotelesa). Weźmiemy dwa koła o wspólnym środku O i różnych promieniach r i R $(r < R)$, które są ze sobą sztywno zespolone. Jeśli większe koło toczy się bez poślizgu po prostej l, to A, punkt styczności tego koła z prostą l, wyznaczy na prostej odcinek AA' (A' *jest końcem odcinka*) o długości $2\pi R$ (obwód koła). W tym czasie punkt B leżący na brzegu mniejszego koła (odpowiadający punktowi A jako punkt przecięcia prostej łączącej środek koła O z punktem A) zakreśli na prostej k (prosta równoległa do prostej l, przechodząca przez punkt B) odcinek BB' o tej samej długości, co odcinek AA'. Z drugiej jednak strony koło to wykona też pełen obrót, a więc odcinek ten ma długość $2\pi r$, czyli nie jest tej samej długości. Otrzymujemy tym samym sprzeczność. Otrzymujemy jakby „równość" obwodu małego i dużego koła. Paradoks ten w dużej mierze motywował do pracy nad krzywymi i ich własnościami (i szerzej nad własnością continuum

[79] R. Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge 1999, s. 272–277.

geometrycznego). Łatwo zauważyć, że dowolny punkt na krzywej porusza się, podczas toczenia się koła, po krzywej (nazwanej cykloidą), która powstaje jako złożenie dwóch ruchów: liniowego i kołowego[80].

Kolejnym kluczowym *novum* w badaniach Arystotelesa, mającym również związek z wizją nauki jako wiedzy ogólnej, jest podjęcie refleksji nad dokonaniami innych uczonych. Są to dogłębne analizy krytyczne, prowadzące często do interesujących syntez i uwag metodologicznych. Od czasów Arystotelesa pojawiają się więc takie metanauki (nazywane tak współcześnie), jak historia nauki i filozofii, filozofia i metodologia nauk oraz bardzo istotna metoda komentarzy prac naukowy rozwinięta później w sposób doskonały przez scholastyków. Dzięki tym badaniom wiele wyników uczonych przetrwało przynajmniej we fragmentach, gdyż – jak wspomniałem wcześniej – prawie całość dorobku matematyków tamtego okresu zaginęła i nie mamy dostępu do oryginalnych tekstów.

Szkoła Arystotelesa to również szerokie badania przyrodnicze. Szczególny wkład ma tutaj uczeń Arystotelesa i jego następca na stanowisku scholarchy Likejonu – **Teofrast z Erezu** (ok. 370–286 p.n.e.). Prowadził on badania w ramach biologii, szczególnie w zakresie botaniki, oraz geografii, medycyny, fizyki i meteorologii. Jest również autorem prac etycznych oraz znanej *Historii filozofii,* w której przedstawił poglądy filozofów przyrody. Kolejnym scholarchą Likejonu w latach 286–268 p.n.e. był **Straton z Lampsaku** (ok. 335–269 p.n.e.), jeden z największych uczonych starożytności, przyrodnik, fizyk, twórca mechanicznej wizji świata, nauczyciel Arystarcha. Prowadził, między innymi, badania nad spadaniem ciał oraz nad próżnią. Wszystkie z jego licznych dzieł zaginęły. Informacje o nim znajdują się u Diogenesa z Laertios i u Symplicjusza.

Stoicy, poczynając od założyciela szkoły **Zenona z Kition** (ok. 333–261 p.n.e.), uznali logikę za jeden z trzech, obok etyki i fizyki, działów nauki. Rozszerzyli jednak zakres logiki na szeroko rozumianą teorię języka (w tym rozpoczęli badania języków naturalnych), do której zaliczali również teorię poznania. Co najważniejsze, jak zauważył Jan Łukasiewicz, wprowadzili do logiki zmienne zdaniowe. Tym samym wprowadzili istotną zmianę do logiki Arystotelesa, która oparta była na zmiennych nazwowych. Dla stoików zdania były bardziej podstawowe niż nazwy, a ich logikę można uznać za prekursorkę współczesnej logiki formalnej. Za twórcę tego systemu logiki zdań uważa się **Chryzypa z Soloi** (ok. 279–204 p.n.e.), jednego z najwybitniejszych uczonych starożytnych. Z jego ogromnego dorobku (ponad 700 prac)

80 T.L. Heath, *Mathematics in Aristotle,* s. 246–252.

zostało tylko niewiele w odpisach u innych filozofów. Konsekwentnie stosował metodę dialektyczną, przywołując w swoich rozważaniach przeciwstawne poglądy jako podstawę wnioskowania.

Również w szkole epikurejskiej pojawiły się umysły idące torem badań logicznych. Żyjący w latach 150–70 p.n.e. **Zenon z Sydonu** był jednym ze scholarchów „Ogrodu", czyli szkoły filozoficznej założonej przez Epikura w 306 roku p.n.e. Poddał krytyce system geometrii Euklidesa, w tym przyjęte aksjomaty jako podstawę wnioskowania. Jego krytyka miała poważne podstawy, gdyż był człowiekiem wszechstronnie wykształconym, tak w logice i w teorii wiedzy, jak i naukach matematycznych. W odróżnieniu od swojego mistrza, Epikura, znał matematykę. Badając aksjomaty Euklidesa, zauważył, że wśród aksjomatów brakuje takiego, który stwierdzałby, że dwie linie proste przecinają się co najwyżej w jednym punkcie. Zauważył, że aksjomat taki jest wykorzystywany w dowodach *Elementów*, a nie można go wyprowadzić z innych aksjomatów (jest od nich niezależny). Spostrzegł również, że dowód o równości dwóch kątów prostych zakłada istnienie takiego kąta, co nie pojawia się u Euklidesa. Również nie mamy istotnego dla przeprowadzanych dowodów założenia o nieskończonej podzielności krzywej, a takie założenie znów nie wynika z przyjętych aksjomatów. Jak zauważył T. Heath, Zenon argumentował, że przyjęcie zasad leżących u podstaw geometrii jako pewnych i prawdziwych przesłanek dowodzenia nie daje możliwości ścisłego i jednoznacznego wyprowadzania twierdzeń, gdyż zawsze trzeba przyjąć jakieś dodatkowe założenia, niewynikające z przyjętych aksjomatów. Krytyka Zenona nie wzbudziła zainteresowania starożytnych matematyków. Traktowano aksjomaty Euklidesa jako niewzruszoną podstawę geometrii, nie dostrzegając możliwość ich zmiany lub uzupełnienia. Dopiero współcześnie dostrzeżono konsekwencje tego typu krytyki, co między innymi zaowocowało powstaniem geometrii nieeuklidesowych. Gdyby wówczas za analizami Zenona poszły badania *stricte* matematyczne, może inaczej potoczyłyby się dzieje matematyki[81].

Jednak, jak pokażę w dalszej części, badania podstaw geometrii prowadzono już w starożytności. Przy okazji prób matematyzacji kolejnych obszarów wiedzy dostrzeżono konieczność rozbudowy podstaw geometrii. Miało to miejsce, na przykład, przy budowaniu geometrii sferycznej jako narzędzia niezbędnego w budowaniu matematycznych modeli astronomicznych, w pracach wspomnianego już Autolykosa z Pitane oraz w kontynuujących

81 Jak pokażę w dalszej części, późniejsze badania dotyczyły, między innymi, budowania geometrii sferycznej.

jego badania dziełach Teodozjusza z Bitynii oraz Menelaosa z Aleksandrii. Tutaj pojawiła się już geometria nieeuklidesowa, ale jako uzupełnienie płaskiej geometrii euklidesowej. Wiązało się to jednak z rozbudową matematyki jako wiedzy ogólnej. Dokładniej o tym powiem w kolejnym paragrafie.

6. Etapowość rozwoju matematyki abstrakcyjnej

Na początku VI wieku p.n.e. rozpoczął się kolejny okres w dziejach matematyki. Przez około dwieście lat w kilku szkołach starożytnej Grecji rodziła się matematyka jako wiedza abstrakcyjna. Czerpała dużo z osiągnięć matematyki okresów poprzednich, szczególnie babilońskiej (i sumeryjskiej) oraz egipskiej. Pojawiały się nowe idee fundujące matematykę tego okresu: myślenie dedukcyjne, dowodzenie matematyczne (konstrukcyjne, oparte na założeniach czy nie wprost), rozumowanie dialektyczne, idea symetrii, podobieństwa, harmonii, współmierności (i niewspółmierności), elementarności, inteligibilności rzeczywistości, intelektualnej rekonstrukcji zjawisk, kosmosu, mikrokosmosu, analogii czy *dynamis* (jako metod dowodzenia).

W czwartym wieku p.n.e. można mówić już w pełni o abstrakcyjnym charakterze matematyki greckiej. W odróżnieniu od okresu poprzedniego, dowodzenia matematyczne mogły być prowadzone bez trzymania się rzeczywistości zmysłowej. Okazało się, że wnioski i wyniki otrzymane na drodze abstrakcyjnej stosują się do rzeczywistości materialnej, a ponadto odpowiednie konstrukcje i przedmioty matematyczne są rozpoznawane w rzeczywistości. Oczywiście, skuteczność matematyki i jej zastosowania nie były konieczne, aby uznać wartość działalności matematycznej, wręcz uznawano, że presja skuteczności i zastosowań niszczy substancję matematyki i blokuje jej rozwój. W piątym wieku stał się widoczny przełom w matematyce po odkryciu zjawiska niewspółmierności oraz pojawieniu się paradoksów eleackich. Mógł on doprowadzić do wycofania się matematyki do etapu matematyki konkretnej. Jednak wobec sukcesów matematyki abstrakcyjnej w poznawaniu i rozumienia świata te problemy były dodatkowym impulsem do jej dalszego rozwoju. Nastąpiło włączenie matematyki w obszar kultury, stała się elementem procesu edukacji jako wartość niezbędna do kształtowania dobrego człowieka i obywatela oraz urządzania sprawiedliwego państwa. Okazało się bowiem, że myślenie matematyczne pozwala usunąć sprzeczności kulturowe i pokazać siłę i wolność myślenia. A w ramach samej matematyki doszło do doprecyzowania pojęć, przezwyciężenia paradoksów i antynomii poprzez wygenerowanie nowych metod i teorii. W końcu doszło do opracowania nowych technik pomiaru, konstrukcji i obliczeń oraz do licznych zastosowań technicznych matematyki, gdy osiągnęła ona wystarczającą ścisłość.

Można więc wskazać pięć okresów rozwoju matematyki w czasie, gdy otwarła się na myślenie abstrakcyjne i pokazała wartość tego myślenia w uprawianiu matematyki:

(1) pojawienie się nowych idei matematycznych (VI–V wiek p.n.e.);
(2) przełom w matematyce, nauce i kulturze spowodowany pojawieniem się nowych idei (V wiek p.n.e.);
(3) włączenie matematyki w proces edukacji powszechnej (IV wiek p.n.e.);
(4) przezwyciężanie paradoksów, wypracowanie nowych metod dowodzenia matematycznego, powstanie nowych teorii matematycznych i matematyzacja różnych dyscyplin naukowych (IV–III wiek p.n.e.);
(5) zastosowania techniczne matematyki i powstanie techniki naukowej (od IV wieku p.n.e.).

W okresach poprzedzających powstanie matematyki abstrakcyjnej matematyka objawiła pewną swoją właściwość, którą można traktować jako pierwszy etap służący do jej zrozumienia, określenia. Na etapach rozwoju matematyki konkretnej matematyka została rozpoznana jako narzędzie do ukazywania i budowania w świecie harmonii i porządku. W matematycznej praktyce badawczej realizowana była i coraz bardziej rozjaśniana kwestia **odpowiedniości między obiektami matematycznymi a rzeczywistością**. Ta właściwość matematyki – generowanie i ustalanie odpowiedniości między różnymi bytami – stała się kluczowym i stałym elementem działalności matematycznej. Odsłaniała się stopniowo liczbowa struktura rzeczywistości, następnie rozpoznawano w niej własności geometryczne oraz zależności matematyczne. Budowano też różne obiekty i przedmioty, wykorzystując struktury i zależności matematyczne. Było to rozpoznawanie matematyczności świata. Matematyka okazywała się wiedzą pozwalającą zrozumieć rzeczywistość i sprawnie się w niej organizować.

W okresie matematyki abstrakcyjnej objawiała się natomiast **autonomia matematyki wobec rzeczywistości zmysłowej i możliwość jej modelowania i uzupełniania przy pomocy matematyki** (rzeczywistość okazała się matematyzowalna).

Przejście od matematyki konkretnej do abstrakcyjnej dokonuje się w szkole milezyjskiej, pitagorejskiej, a w pewnym sensie także eleackiej i atomistycznej (rzeczywistość staje się zrozumiała, poznawalna i inteligibilna dopiero po zastosowaniu metody matematycznej, a z ukazaną antynomicznością poznania może poradzić sobie tylko matematyka). To przejście nie wiązało się jednak z zerwaniem ciągłości z wcześniejszym okresem rozwoju matematyki. Nastąpiło wejście na nowe obszary matematyczne i ukazanie nowych doświadczeń matematycznych. Dorobek poprzedniego okresu został wykorzystany, czasem przebudowany, a wspomniane wcześniej stałe zdobycze – dalej realizowane i rozwijane.

Natomiast u Platona mamy do czynienia z syntezą wcześniejszych dokonań matematyki abstrakcyjnej, z wielkim projektem matematyki jako wiedzy abstrakcyjnej i propozycją włączenia różnych „matematyk" do systemu nauczania[82]. Była to nowość o nieobliczalnych skutkach dla edukacji i całej kultury[83]. Na przełomie IV i III wieku p.n.e., już w okresie hellenistycznym, doszło do rewolucji kulturowej spowodowanej przełomem w matematyce. Uważam, że bezpośrednim czynnikiem rewolucji było wejście matematyki w system kształcenia. W konsekwencji uznano, że zjawiska można tłumaczyć i rozumieć poprzez użycie opisu matematycznego, a człowieka można odpowiednio kształtować poprzez nauczanie matematyki. Nawet po upadku matematyki starożytnej to przeświadczenie nigdy całkowicie nie zniknęło i odradzało się w kolejnych okresach dziejów. Ponadto zmagania matematyki z nagłośnionymi przez sceptyków paradoksami stały się powszechnie znane i miały istotne reperkusje społeczne. Matematyka wyszła w tym czasie z tego kryzysu zwycięsko. Odpowiedzią była rozbudowa metod naukowych i powołanie nowych działów matematyki lub rozszerzenie zakresu już istniejących. W wieku IV i III p.n.e. pojawiło się kilku wybitnych matematyków, którzy podnieśli istniejące dyscypliny matematyczne na bardzo wysoki poziom wiedzy abstrakcyjnej i dokonali matematyzacji kilku kolejnych dyscyplin naukowych (było to *de facto* zbudowanie tych dyscyplin od początku jako matematycznych). Byli nimi: Hipokrates z Chios, Archytas, Teajtet, Eudoksos, Arystarch, Euklides, Archimedes, Eratostenes, Apoloniusz. Ktesibios z Aleksandrii, Filon z Bizancjum.

Osiągnięty przez matematykę w IV wieku wysoki stopień ścisłości wraz z rozbudową siatki pojęć stał się kolejną przyczyną przełomu. Dopiero taki poziom ścisłości umożliwił rozwój antycznej techniki naukowej (metodyczne stosowanie wiedzy matematycznej do różnych konstrukcji i rozwiązań technicznych). Ścisłość umożliwiała interpretowanie obiektów matematycznych jako obiektów fizycznych (przy odpowiednim zmniejszeniu rygo-

[82] W pewnym sensie konkurencyjny wobec Platona jest projekt Demokryta jako innego rodzaju synteza. Wobec ogromnej liczby jego dzieł oraz ich istnienia w ówczesnym obiegu naukowym (np. komentarze u Arystotelesa, Archimedesa) nie można wykluczyć oddziaływania koncepcji Demokryta na kulturę.

[83] Por. H.I. Marrou, *Historia wychowania w starożytności,* s. 121–125.

rów ścisłości), a odpowiednio gęsta siatka pojęć pozwala opisywać obserwowane zjawiska i tworzyć obiekty techniczne[84]. Póki matematyka była wykorzystywana do rozwiązywania konkretnych zagadnień (jak w Egipcie czy Babilonii), to nie była w stanie wspiąć się na odpowiedni poziom ścisłości, a tym samym miała ograniczony zakres stosowalności.

84 L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 219.

Rozdział III
Rozwój matematyki jako wiedzy ogólnej i algorytmicznej

1. Ogólna charakterystyka matematyki w okresie aleksandryjskim

Przez wiele lat Ateny dominowały wśród państw greckich i stały się w V wieku p.n.e. stolicą kulturalną i naukową Hellady. Stan ten utrzymywał się aż do drugiej połowy IV wieku, kiedy to Ateny dostały się pod panowanie państwa macedońskiego po bitwie pod Cheroneą w 338 roku p.n.e. Pod przywództwem Aleksandra Macedońskiego w krótkim czasie Grecy złamali potęgę odwiecznego wroga, Persów, i zdobyli ogromne obszary na wschodzie, docierając aż do Indii, a także opanowali Egipt i inne państwa tego obszaru. Powstała kultura hellenistyczna jako mieszanka kultury greckiej i kultur podbitych narodów. Dominowała w niej kultura i język grecki. Po śmierci Aleksandra w 323 roku p.n.e. imperium rozpadło się na mniejsze części, jednak skutki polityczne i kulturowe podbojów pozostały. Szczególnie ważna dla nauki okazała się decyzja o założeniu miasta Aleksandria w Egipcie, nad brzegiem Morza Śródziemnego. Miasto w krótkim czasie stało się centrum kulturalnym i naukowym ówczesnego świata. Istotne jest to, iż celem Aleksandra nie były podboje dla samych podbojów, lecz pragnął on stworzyć cywilizację, w której dominantą miała być nauka, sztuka oraz inne elementy kultury. Dlatego z ogromnym rozmachem budowano nowe miasta i przebudowywano stare, a w miastach powstawały świątynie, biblioteki oraz inne budowle powszechnego użytku bogato zdobione rzeźbami. W miastach tych stawiano wiele posągów greckich filozofów, co odpowiednio ustawiało hierarchię wartości i kierowało uwagę ku kulturze.

Od śmierci Aleksandra datuje się nowy okres w dziejach – jest to epoka hellenistyczna (lub aleksandryjska). Z postacią wodza i króla macedońskiego związana jest postać jednego z największych filozofów w dziejach, Arystotelesa. Był on wychowawcą i nauczycielem Aleksandra, a po śmierci swojego ucznia musiał opuścić Ateny i rok później również zmarł. Można zauważyć, że bez działania Arystotelesa i jego szkoły Likejonu (oraz innych uczonych greckich) nie nastąpiłby przełom cywilizacyjny. Aleksander był tylko politycznym czynnikiem, który przyczynił się realizacji kulturowej przemiany[1].

W nowych warunkach politycznych Aleksandria staje się centralnym ośrodkiem aktywności matematycznej. Pierwszy wiek tego nowego okresu w dziejach nazywa się złotym wiekiem matematyki greckiej. Jednak pod koniec trzeciego wieku p.n.e. rozpoczęła się ekspansja Rzymu, która doprowadziła do podbicia Greków przez Rzymian w 146 roku p.n.e. (jest to też rok zakończenia III wojny punickiej i zniszczenia przez Rzym Kartaginy). Grecy stali się ich niewolnikami, jednak pod względem kulturowym po pewnym czasie zdominowali najeźdźców. Rzymianie stopniowo „cywilizowali się", poddając się urokowi greckiej kultury. Przejęli w znacznym stopniu grecką religię, pewne elementy filozofii (głównie etykę i filozofię społeczną) oraz nauki greckiej (już w znacznie mniejszym stopniu, chociaż w znakomity sposób rozwijali greckie idee prawne). Największe znaczenie uzyskała u nich retoryka, w dalszej kolejności dialektyka (w wymiarze praktycznym), natomiast abstrakcyjna filozofia (metafizyka, kosmologia) oraz matematyka i nauki przyrodnicze nie znalazły uznania w nacji rzymskiej. Starożytny Rzym bardzo niewiele wniósł do nauki i filozofii, a najmniej do matematyki.

Rzymianie wykorzystywali jednak istniejącą wiedzę (naukę) do wznoszenia wspaniałych obiektów architektonicznych i do innych technicznych zastosowań. Rozwijali więc technikę, ale nie technikę naukową (która była dominującym obszarem badań w hellenistycznych centrach naukowych), nie widząc w niej większej wartości. Interesowała ich też wiedza i sztuka medyczna oraz rolna. Tak naprawdę, te wspaniałe dzieła budowlane i inżynierskie wykorzystywały jedynie prostsze elementy nauk, bez wgłębiania się w bogate rozważania teoretyczne Greków. Najwybitniejsze dzieło naukowe okresu rzymskiego to *De Architectura* Witruwiusza[2] (z końca I wieku p.n.e.), którą autor poświęcił władcy Rzymu, Augustowi. Przywoływana jest tam tylko elementarna wiedza matematyczna (traktowana przez Witruwiusza jako szczyt osiągnięć matematycznych), m.in. niewspółmierność boku i przekątnej sześcianu, obliczenia Archimedesa dotyczące składu korony

[1] W. Brazil, *Alexandria: The Umbilicus of the Ancient World*, [w:] *The Library of Alexandria. Centre of learning in the Ancient World*, red. R. MacLeod, I.B. Tauris, London – New York 2010, s. 35–59.

[2] Marcus Vitruvius Pollio (80–15 p.n.e.) był nie tylko architektem, ale też konstruktorem machin wojennych. Jego dzieło *O architekturze* składało się z dziesięciu ksiąg i zawierało szczegółowy opis zasad budowlanych i pomysłów architektonicznych stosowanych przez Greków i Rzymian.

królewskiej oraz fakt, że trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jest trójkątem prostokątnym. Trzeba jednak przyznać, że w praktycznym wykorzystaniu skromnej wiedzy okazali się mistrzami[3]. Ponieważ jednak nie wnieśli do nauk matematycznych nic nowego, dlatego rezerwuar idei, z którego czerpali, musiał się z czasem wyczerpać. Ten brak zainteresowań badaniami teoretycznymi w zakresie matematyki u Rzymian doprowadził do tego, że znaczna część dorobku naukowego Greków z tego zakresu uległa zniszczeniu czy zapomnieniu. Spektakularnym wydarzeniem jest śmierć Archimedesa z rąk rzymskiego żołnierza w 212 roku p.n.e., po zdobyciu Syrakuz przez Rzymian. Podobno dzięki machinom wojennym skonstruowanym przez Archimedesa Syrakuzy broniły się aż trzy lata. Ta śmierć zamyka symbolicznie w dziejach nauki pewien znaczący okres – w niesprzyjających warunkach politycznych nauka przestaje się dynamicznie rozwijać, a wręcz następuje stopniowy zanik nauk matematycznych. Mają jednak miejsce okresy ożywiania i powstawania nowych idei i teorii naukowych.

Przez następne lata Rzymianie podbijają kolejne centra kultury hellenistycznej. Szczególnie tragiczny jest rok 145/144 p.n.e., kiedy to Ptolemeusz VIII rozpoczął prześladowania greckiej grupy etnicznej w Egipcie. Zakończyło to praktycznie działalność naukową w Aleksandrii na dłuższy czas. Kolejnym tragicznym epizodem jest zniszczenie Akademii i całych Aten przez rzymskiego dowódcę Sullę w 86 roku p.n.e. Nastąpiło rozproszenie uczonych, których *gros* przeniosło się do Aleksandrii. *De facto* po trzystu latach istnienia Akademia przestała istnieć. W późniejszych latach pojawiały się kolejne próby odnowienia idei akademii i samej instytucji. Akademia, którą Platon założył w 387 roku p.n.e., jest nieustannym źródłem inspiracji naukowych i edukacyjnych.

Wróćmy teraz do czasu, gdy (na przełomie IV i III wieku p.n.e.) centrum naukowe Grecji przesuwa się z Aten do Aleksandrii. W mieście tym ok. roku 300 p.n.e. wybudowana zostaje Biblioteka Aleksandryjska oraz Musejon (Świątynia Muz, a więc centrum naukowo-edukacyjne) – tu powstaje wiele szkół filozoficznych i prowadzone są liczne badania naukowe. W tym też czasie kultura grecka po połączeniu z kulturami podbitych przez Aleksandra narodów Wschodu staje się kulturą hellenistyczną (uzyskuje wymiar uniwersalny).

W tym czasie i w późniejszych wiekach działa w Aleksandrii wielu uczonych, rozwijane są stare działy nauki i powstają nowe. To w Aleksandrii astronomia stała się dyscypliną w pełni naukową (w pracach Hipparcha, kontynuującego badania Arystarcha) i zostały położone podwaliny pod

3 U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A History of Mathematics,* s. 142–143.

nowe dziedziny nauki: trygonometrię (Hipparch) i algebrę (Apoloniusz i Diofantos z Aleksandrii). Rozwijana była również mechanika (rozumiana jako sztuka konstrukcji różnych urządzeń mechanicznych i uznawana za dziedzinę matematyki), wprowadzona na wyżyny przez Archimedesa, Filona z Bizancjum oraz Ktesibiosa z Aleksandrii (III wiek p.n.e.), oraz pneumatyka, hydrostatyka oraz szerzej – technika naukowa, pokazująca matematyczne podstawy badań i konstrukcji technicznych[4]. Pojawiła się też geografia (fizyczna, jak również matematyczna) jako dyscyplina naukowa, stworzona przez Eratostenesa z Cyreny, który pierwszy obliczył poprawnie wielkość Ziemi. Już w Aleksandrii wykłada i pisze Euklides swoje *Elementy,* które przez wiele wieków uważane były za najdoskonalsze dzieło naukowe powstałe w starożytności i niedościgniony wzór realizacji metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Badania naukowe w aleksandryjskim centrum naukowym były w znacznej mierze finansowane przez Ptolemeuszy (do pewnego czasu), władców Egiptu. Byli oni zainteresowani tak praktycznym, jak i teoretycznym aspektem badań naukowych. To źródło państwowego wsparcia stopniowo zanikało po podbiciu Egiptu przez Rzymian i opanowaniu całego basenu Morza Śródziemnego po bitwie pod Akcjum w 31 roku p.n.e.

Po okresie rozkwitu w III wieku p.n.e. kolejne wieki to czas powolnego schyłku, chociaż kilkakrotnie miało miejsce w tym czasie ożywienie naukowe. Ostatnim dyrektorem Biblioteki Aleksandryjskiej był **Teon z Aleksandrii** (ok. 335–405 n.e.). Był matematykiem i astronomem (redaktorem wydań *Elementów* i *Optyki* Euklidesa), a jego córką była słynna **Hypatia**, która kontynuowała zainteresowania i pasje ojca. Założyła szkołę filozoficzną, była autorką wielu prac matematycznych, astronomicznych i filozoficznych (w tym komentarzy do Diofantosa, Ptolemeusza i Apoloniusza), które jednak zaginęły. Teon znany jest z opracowania *Elementów* Euklidesa oraz z *Komentarza* do *Almagestu* Ptolemeusza. W roku 391 cesarz Teodozjusz zamyka Bibliotekę, a w 415 zostaje zamordowana Hypatia. Jest to również (tak jak śmierć Archimedesa w 212 roku p.n.e.) symboliczny rok kończący okres aleksandryjski w rozwoju matematyki i nauki greckiej[5]. Jednak mimo tych trudności, w kolejnych latach miały miejsce próby odnawiania Musejonu i innych instytucji naukowych tamtego okresu.

Z Biblioteką Aleksandryjską konkurował inny ośrodek – była to Biblioteka Pergamońska założona w III wieku p.n.e. przez Attalosa I Sotera, władcę

[4] Powszechne w tamtym czasie było nazywanie matematykami znających sztukę konstrukcji urządzeń mechanicznych. Przez to wskazywano wyraźnie na źródło tych urządzeń.

[5] M. Dzielska, *Hypatia z Aleksandrii*, Universitas, Kraków 2010; T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, s. 528–529.

Pergamonu (Azja Mniejsza). Posiadała drugi, pod względem wielkości, zbiór zwojów pergaminowych (ponad 200 tys.). Przez kilka wieków Pergamon był ważnym ośrodkiem kultury i nauki, a biblioteka funkcjonowała co najmniej do II wieku n.e. Tam też udoskonalono i produkowano pergamin, ważny materiał piśmienniczy. Również w tym ośrodku pracował jeden z największych matematyków starożytności – Apoloniusz. Podobno Pergamon należał do najpiękniejszych ówczesnych miast i podobnie jak Aleksandria był miastem nadmorskim. Poza biblioteką na wspaniałym pergamońskim akropolu znajdowały się, między innymi, świątynie (Ateny i Dionizosa), ogromny teatr, gimnazjon oraz Wielki Ołtarz Zeusa. Również w wielu pomniejszych miastach hellenistycznych znajdowały się centra nauki i kultury[6].

2. Główne zagadnienia i odkrycia matematyki okresu aleksandryjskiego

Sokratejski ideał wiedzy ogólnej, realizowany przez Arystotelesa i jego szkołę, podjęli również matematycy. Nastąpiło to już na początku okresu aleksandryjskiego. W III wieku p.n.e., po największych osiągnięciach matematyki abstrakcyjnej czasów antycznych, pojawiają się nowe idee, które otwierają nowy okres w rozwoju matematyki. I znowu, jak poprzednio, wiele ówczesnych prac matematycznych zaginęło. W tym czasie powoli rodzi się też symbolika matematyczna, chociaż przez wiele jeszcze wieków rozumowania matematyczna prowadzone są *de facto* w sposób opisowy i rysunkowy. Mimo tego reprezentują duży stopień ścisłości, co pokazuje, że język symboliczny nie jest niezbędny do uprawiania „dobrej" matematyki (przynajmniej w pewnym zakresie).

Zauważmy, że w matematyce aleksandryjskiej z jednej strony poszukiwano rozwiązań dla postawionych wcześniej problemów: podwojenia sześcianu, kwadratury koła, trysekcji kąta i innych. Chodziło jednak również o skonstruowanie obiektów matematycznych, w szczególności krzywych, które spełniały pewne ogólne warunki. Niektóre z tych krzywych można było użyć do zrealizowania potrzebnych konstrukcji, co dawało rozwiązanie problemów. Wcześniej działanie w schemacie konstrukcji platońskich (przy pomocy okręgu i linii prostej) nie dawało efektu. Zasada elementarności Platona mówiąca, że konstrukcji należy dokonywać przy pomocy najprost-

[6] Por. J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, Y.V. Chebotyrevskiy, *Od piramid do gwiazd. Rola matematyki i mechaniki w rozwoju cywilizacji,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003, s. 23–36.

szych, ustalonych elementów, wydawała się nie przynosić efektów. Trzeba było rozszerzyć metodę matematyki i liczbę obiektów służących do wykonywania potrzebnych konstrukcji (jedną z ważniejszych prób jest metoda *neusis*, o której powiem w dalszej części, omawiając dokonania Pappusa). Jeszcze za czasów Platona i w kolejnych wiekach pojawiały się takie rozszerzenia. Wydawało się, że uderza to w zasadę elementarności. Okazało się jednak, że wymagane konstrukcje można było otrzymywać w oparciu o proste operacje geometryczne (np. kwadratrysę przy pomocy translacji i obrotu) lub algebraiczne (punkty tych krzywych spełniały pewien ogólny warunek). Zasada elementarności zaczęła przyjmować inną, mechaniczną czy algebraiczną postać, chociaż nie zrezygnowano z prób konstrukcji przy pomocy cyrkla i linijki jako doskonalszych (tak przynajmniej na początku zakładano). Podjęto też badania w ramach geometrii przestrzennej[7] (co postulował Platon) jako wstęp do astronomii. Kontynuowano badania nad geometrią sferyczną Autolykosa, która wykraczała poza płaską geometrię euklidesową. Badania te prowadzili Teodozjusz z Bitynii oraz Menelaos z Aleksandrii. Z dzisiejszego punktu widzenia były to propozycje budowania geometrii nieeuklidesowych na wzór metody zawartej w *Elementach* Euklidesa. Te wszystkie propozycje i badania były efektem podjęcia prac nad strukturą matematyki, jej metodami dowodowymi i konstrukcyjnymi oraz (w zgodzie z projektem platońskim rozwijania matematyki) nad aksjomatami, postulatami i pojęciami, które przyjęto nie jako niezmienne prawdy, lecz jako hipotezy, które należy poddać analizie (metoda hipotetyczno-dedukcyjna i analizy).

Najważniejsze dokonania miały miejsce w pracach czterech największych uczonych starożytności: **Euklidesa, Arystarcha, Archimedesa i Apoloniusza.** Ich dokonania były, z jednej strony, wielką synteza dokonań poprzedników, ale z drugiej – otwierały nowe obszary badań.

Euklides, którego szczyt aktywności przypadał na przełom IV i III wieku p.n.e., dokonał wielkiej syntezy matematyki greckiej. Jego największe dzieło *Elementy* (w XIII księgach) było obecne w kulturze praktycznie przez cały okres dziejów i stanowiło ważny składnik edukacji. *Elementy* są w dużej mierze syntezą poprzednich prób aksjomatyzacji geometrii, które on zebrał, opracował, uzupełnił (podał dowody znanych wcześniej twierdzeń) i nadał im ścisłą logiczną formę. Są tam wyniki ze szkoły pitagorejczyków, Hipokratesa z Chios, Teajteta oraz Eudoksosa. Praca rozpoczyna się od podania defi-

---

[7] Mimo że nie ma proporcji (arytmetycznej) między bokiem kwadratu a jego przekątną, to kwadraty zbudowane na tych odcinkach są proporcjonalne. Rozpatrywanie więc obiektów w wymiarze wyższym (drugim lub trzecim) może być drogą do rozwiązania istniejących problemów.

nicji dwudziestu trzech pojęć, a następnie pojawia się pięć postulatów (w tym słynny piąty postulat o równoległych) i pięć aksjomatów (pojęć wspólnych) wprowadzonych przez Eudoksosa. Warto zauważyć, że zgodnie z założeniami cała treść powinna dedukcyjnie wynikać z przyjętych definicji, postulatów i aksjomatów, co nie zostało w pełni w pracy zrealizowane. Wszystkie konstrukcje geometryczne wykonywane są jedynie przy pomocy cyrkla i linijki, a wszelkie dowody empiryczne (na przykład poprzez pomiary) są zabronione. Ten euklidesowy ideał matematyki aksjomatycznej przez całe wieki był poza zasięgiem analityków i dopiero koniec XIX wieku przyniósł znaczące sukcesy. Oczywiście, takie próby podejmowano w czasach nowożytnych już wcześniej, na przykład w pracach Galileusza i Newtona, jednak nie były to próby udane.

Poza *Elementami* przetrwały jeszcze cztery prace Euklidesa: *Dane, Podział figur, Zjawiska* (praca z astronomii) oraz *Optyka.* W pracy *Dane* zajmuje się badaniem minimalnej liczby założeń potrzebnych do właściwego określenia i rozwiązania danego problemu.

Jednak część prac Euklidesa (wydaje się, że o dużym znaczeniu) zaginęła. Należy do nich traktat o stożkowych w pięciu księgach, praca o błędach (fałszywym wnioskowaniu) oraz *O porizmatach*. Pappus podaje, że porizmat jest to coś pomiędzy twierdzeniem do udowodnienia a problemem, w którym podaje się możliwość i opis przeprowadzenia konstrukcji; inna sugestia określa *porizmat* jako związek między wielkościami znanymi a nieokreślonymi czy zmiennymi, zbliżony do współczesnego pojęcia funkcji[8].

Kolejny z wielkich matematyków trzeciego wieku, Arystarch z Samos (ok. 310–230 p.n.e.), był uczniem Stratona z Lampsaku, trzeciego scholarchy Lykejonu. Witruwiusz, słynny architekt rzymski, zalicza Arystarcha do jednego z nielicznych uczonych (obok Filolaosa, Archytasa, Apoloniusza, Archimedesa i Eratostenesa), którzy posiadali wiedzę o wszystkich gałęziach nauki i byli konstruktorami urządzeń mechanicznych o matematycznych podstawach działania. Podobno Arystarch wynalazł zegar słoneczny w kształcie półkulistej czaszy ze wskazówką do rzucania cienia umieszczoną na środku czaszy.

Arystarch stosował matematykę teoretyczną jednak przede wszystkim do badań astronomicznych i można go uznać za współtwórcę astronomii matematycznej. Był pierwszym, który podał geometryczny model dla hipotezy heliocentrycznej[9]. To do niego, po wielu wiekach, nawiązywał Kopernik, który tę teorię podjął i rozwinął. Podobnie jak u Kopernika podejście Ary-

[8] U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A History of Mathematics,* s. 90–108.

[9] Praca, w której Arystarch przedstawia koncepcję heliocentryczną, zaginęła. Wspomina o niej Archimedes w swoim dziele *O zliczaniu piasku*.

starcha podbudowane było argumentami matematycznymi. Istotne jest to, iż wprowadzając teorię heliocentryczną, trzeba było przezwyciężyć arystotelesowską koncepcję siły ciążenia (ciała ciężkie dążą do środka Ziemi, a lekkie do sfery Księżyca) i wprowadzić teorię policentryczną (Słońce i inne ciała niebieskie też mają własności grawitacyjne, nie tylko Ziemia).

W pracy *O rozmiarach i odległościach Słońca i Księżyca* (jedynej ocalałej) Arystarch rozwija metody trygonometryczne, aby wyliczyć wzajemne odległości Słońca, Ziemi i Księżyca oraz rozmiary tych ciał niebieskich. Mimo że z powodu niedokładnych pomiarów astronomicznych nie podał prawidłowych wielkości, to jednak sama metoda obliczania była prawidłowa. Wyliczył, że odległość Ziemi od Słońca jest około 20 razy większa niż Ziemi od Księżyca.

Arystarch podobno też zauważył (słusznie), że rozmiar świata jest znacznie większy niż ten, który zakłada model geocentryczny. Wielkość Słońca czy odległość Ziemi od Słońca są znikome wobec wielkości świata, na przykład Arystarch odkrył, że pozorna średnica kątowa Słońca wynosi około 1/720 części koła zodiakalnego. Archimedes w pracy *O zliczaniu piasku* wspomina, że Arystarch twierdził, że Ziemia krąży po okręgu wokół Słońca wraz z innymi planetami oraz że krąży też wokół własnej osi. Podaje również ciekawe porównanie Arystarcha, zgodnie z którym koło, po którego brzegu porusza się Ziemia, ma taką proporcję do odległości gwiazd stałych, jak środek kuli do jej powierzchni(czyli promień kuli gwiazd stałych jest nieskończenie duży w porównaniu z orbitą Ziemi). Porównanie to sugeruje właściwie „nieporównywalność" tych dwóch wielkości. Z całą pewnością możemy założyć, że wg koncepcji Arystarcha (a więc przyjmując, że Słońce i gwiazdy stałe są nieruchome) wszechświat heliocentryczny jest wielokrotnie większy od wszechświata geocentrycznego. To założenie było konieczne, aby wyjaśnić brak obserwowalnego efektu paralaksy (w przypadku ruchu Ziemi wokół Słońca widok gwiazdozbiorów powinien ulegać zmianie). Seleukos z Seleucji (II wiek p.n.e.) poparł hipotezę heliocentryczną pewnymi empirycznymi dowodami (podobno przy pomocy obserwacji cykliczności pływów morskich)[10]. W starożytności jednak ta hipoteza została odrzucona z powodu niezgodności z obserwacjami oraz pod wpływem autorytetu Arystotelesa, Hipparcha i Ptolemeusza, którzy nie byli zwolennikami tego modelu świata. Sytuacja nie zmieniła się pod tym względem zbytnio osiemnaście wieków później, gdy Kopernik podjął ideę heliocentryzmu. Głównym argumentem Kopernika była prostota matematyczna systemu heliocentrycznego, natomiast na empiryczne potwierdzenie trzeba było czekać jeszcze ko-

---

[10] L. Russo, *Zapomniana rewolucja,* s. 332–338.

lejne kilka wieków[11]. Było to właśnie stwierdzenie istnienia efektu paralaksy, co wymagało znacznego rozwoju dokładności pomiarowych[12].

Dokonania Archimedesa (287–212 p.n.e.) przekraczają ramy czasów, w których żył. Uznaje się go za największego matematyka w dziejach. Był nie tylko matematykiem, ale też konstruktorem i wynalazcą. Skonstruował globus i planetarium z hydraulicznym napędem, ale też wiele innych maszyn i urządzeń, m.in. zegary wodny, katapulty, przenośniki ślimakowe (konstrukcja odpowiedniej śruby oparta o krzywą zwaną ślimacznicą), kołowrotki, zwierciadła paraboliczne. Był też twórcą statyki i hydrostatyki. Ponadto opracował metodę badań matematycznych, którą można traktować jako konkurencyjny, wobec platońskiego i pitagorejskiego, program badawczy. Przez całe swoje życie był związany z Syrakuzami, chociaż wykształcenie zdobył w Aleksandrii.

Euklides i jego *Elementy* miały ogromne szczęście. Nie tylko przetrwały do naszych czasów, były też przechowywane, czytane i komentowane w wielu miejscach i trwały w nieprzerwany sposób, oddziałując na kulturę i rozwój nauki. Prace matematyczne starożytnych w ogromnej większości nie przetrwały okresu upadku cywilizacji hellenistycznej. Również w przypadku Archimedesa, największego matematyka czasów starożytnych, nie mamy ciągłości ich występowania w kulturze. Były okresy, w których nie były znane żadne jego prace. Znany komentator dzieł starożytnych, Eutocjusz, znał tylko trzy prace Archimedesa: *O równowadze płaszczyzn*, *Pomiar okręgu* oraz *O kuli i walcu*. Jedna z ważniejszych prac *Metoda* była nieznana przez całe wieki aż do roku 1906, gdy została przypadkowo odkryta.

Metoda Archimedesa pokazuje, w jaki sposób dokonywał on swoich odkryć matematycznych. W innych jego pracach znajdują się tylko „suche" wyniki, wraz z rygorystycznymi dowodami twierdzeń. Archimedes opisuje swoje „mechaniczne" badania, eksperymenty, które doprowadziły go do twierdzeń i wzorów matematycznych. W tej metodzie zakładał, niezgodnie z przyjętą konwencją matematyczną, że dany obszar możemy traktować jako ograniczony sumą odcinków (a nie linią zakrzywioną w sposób ciągły).

W pracy Archimedesa znajduje się kilkanaście twierdzeń wysłanych w liście do Eratostenesa. Autor zauważa, że bardzo pomocne w opracowaniu

---

[11] Thomas J. Henderson, dokonując w latach 1832–1833 obserwacji gwiazdy Alfa Centauri, zaobserwował efekt paralaksy. Następnie na przykładzie obserwacji innych gwiazd pod koniec lat 30. XIX wieku dokonali potwierdzenia tego efektu Wilhelm Struve (gwiazda Wega) i Friedrich Bessel (gwiazda 61 Cygni). Wyraźny wzrost możliwości obserwacyjnych dała technika fotografii oraz misje satelitarne.

[12] Por. T. Heath, *A History of Greek Mathematics,* vol. II, New York 1981, s. 23–60.

dowodu jakiegoś twierdzenia jest posiadanie najpierw wiedzy o tym, jak ten dowód działa. Przytacza jako przykład dowód Eudoksosa na temat obliczania objętości stożka i ostrosłupa, łatwiejszy do wykonania dzięki wcześniejszym stwierdzeniom Demokryta (podanym bez ścisłego dowodu). Następnie Archimedes przyznaje, że „mechaniczne" podejście pozwoliło mu opracować wiele dowodów matematycznych. W ten sposób znalazł wzór na pole odcinka paraboli. Ten wzór odkrył poprzez wyważenie linii w ten sposób, jak się mechanicznie wyważa wagę. Do wzoru na pole odcinka paraboli doszedł w ten sposób, że zauważył, iż odcinek paraboli ABC i trójkąt AFC (CF jest styczną do paraboli w punkcie C, a odcinek AF jest równoległy do średnicy paraboli BQ) się równoważą. Zakładamy, że tak odcinek paraboli, jak i trójkąt zbudowane są z odcinków równoległych do QB (odpowiednio OP i OM). Przez punkty C i B poprowadźmy prostą. Przetnie ona odcinek AF w punkcie K. Zaznaczmy na tej prostej punkt H, taki, aby $CK = KH$. Jeśli przeniesiemy odcinek OP do punktu H, to zrównoważy on odcinek OM (środkiem ciężkości jest punkt K). Stąd wynika, że również cały odcinek paraboli ABC (przeniesiony „po kawałku" do punktu H) zrównoważy trójkąt AFC, jeśli cały jego ciężar umieścimy w jego środku ciężkości (a znajduje się on na prostej CK, w odległości $\frac{1}{3}$ od punku K). Stąd wynika, z prawa dźwigni, że pole odcinka paraboli ABC równa się jednej trzeciej pola trójkąta AFC[13].

W oparciu o aksjomat Eudoksosa Archimedes formułuje i dowodzi lemat, który staje się ważnym narzędziem w dowodzeniu twierdzeń (geometrycznych) już w sposób ścisły, zgodnie z przyjętą konwencją matematycznego dowodzenia.

Lemat Archimedesa. Jeśli pole figury F jest mniejsze od pola koła K, to istnieje taki wielokąt W wpisany w to koło, że pole tego wielokąta jest większe od pola figury F. Analogicznie, jeśli pole F jest większe od pola pewnego koła K, to istnieje również pewien wielokąt W taki, że jego pole jest mniejsze od pola figury F.

W pracy *O wymierzeniu koła* Archimedes zauważa, że pole koła K jest równe polu trójkąta o podstawie równej obwodowi tego koła C i o wysokości równej promieniowi. Wystarczy założyć (stosując metodę Demokryta), że koło jest zbudowane z nieskończenie wielu trójkątów równoramiennych o wspólnym wierzchołku w środku koła, o wysokościach równych promieniowi, których podstawy leżą na obwodzie. Oznacza to, że $K = \frac{1}{2}rC$. Ten fakt można udowodnić formalnie, w oparciu o powyższy lemat, co Archimedes czyni.

---

13 U.C. Merzbach, C. B. Boyer, *A History of Mathematics,* s. 122–126.

Z tego wzoru wynika, że $\frac{K}{r^2} = \frac{C}{2r}$, a więc, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest taki sam, jak stosunek pola koła do pola kwadratu zbudowanego na promieniu danego koła. Ten wspólny stosunek został dużo później oznaczony literką π (pochodzi ona od pierwszej litery greckiego słowa περίμετρον – *perimetron*, oznaczającego obwód).

Jest to jedno z najważniejszych twierdzeń odkrytych przez Archimedesa. Stosunek π wykorzystywał Archimedes do wykonania wielu obliczeń geometrycznych oraz w ramach mechaniki, między innymi policzył pole odcinka paraboli, objętość walca, stożka i kuli. Zauważmy jednak, że stosunek objętości kuli do sześcianu jej promienia nie wynosi π, lecz $\frac{4}{3}\pi$ (co obliczył Archimedes). Otrzymujemy więc zmieniający się stosunek podobieństwa (zmniejsza się on, gdy zwiększamy wymiar). I tak, gdy do ustalenia stosunku podobieństwa weźmiemy średnicę d i odpowiednio długość okręgu O, pole koła P i objętość kuli V, to dostajemy następujące zależności: $\frac{O}{d} = \pi, \frac{P}{d^2} = \frac{1}{4}\pi$ oraz $\frac{V}{d^3} = \frac{1}{6}\pi$. Wszędzie jednak występuje stosunek π (nie uznawany wtedy za liczbę ani nawet za wielkość) służący do ustalenia odpowiedniej proporcji[14].

Ostatnim z wielkiej czwórki matematyków hellenistycznych jest Apoloniusz z Perge (Pamfilia w Azji Mniejszej, ok. 260–190 p.n.e.), który kształcił się w Aleksandrii i tam też przez większość swojego życia nauczał. Przez krótki czas przebywał też w Pergamonie, gdzie znajdowała się druga co do wielkości i znaczenia, po aleksandryjskiej, biblioteka.

Jest twórcą teorii stożkowych oraz prekursorem geometrii analitycznej, rozwiniętej w czasach nowożytnych przez Fermata i Kartezjusza. Najsłynniejszą jego pracą jest traktat *Stożkowe*. Opisał właściwości krzywych stożkowych, a więc krzywych otrzymanych jako przekroje stożka (okrąg, elipsa, hiperbola i parabola), i pokazał ich wspólną podstawę, naturę. Był to ważny krok w kierunku odejścia od uznawania jedynie okręgu jako krzywej doskonałej, ponieważ tę samą „naturę" miały też inne krzywe. W dalszej perspektywie nic nie stało na przeszkodzie, aby je również (a nie tylko ruchy po okręgach) wykorzystywać do opisu ruchu ciał niebieskich i innych ruchów.

Wiele jego dzieł zaginęło, mamy jednak tytuły niektórych z nich, czasem z krótkim opisem zawartości. Znany jest opis sześciu prac Apoloniusza wraz z zaginionymi traktatami Euklidesa sporządzony przez Pappusa z Aleksandrii, nazwanymi przez niego „Skarbami Analizy". Pappus opisuje te prace jako korpus metod i technik, które pozwalają rozwiązywać zagadnienia do-

---

14 Por. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics,* t. 2, s. 50–56; A. Aaboe, *Matematyka w starożytności*, tłum. R. Ramer, PWN, Warszawa 1968.

tyczące krzywych. Interesująca jest też inna, nieznana w Europie aż do początku XVIII wieku, praca *O odcinaniu stosunku,* która zajmuje się zagadnieniem rozwiązywania równań kwadratowych przy pomocy wyznaczania proporcji geometrycznych. Te informacje zawarte są w pracy Pappusa *Zbiór* (*Synagoge*). W przypadku Apoloniusza, jak i innych Greków, nie pojawia się ogólna idea układu współrzędnych, jest on dobierany jednak w przypadku danej krzywej na potrzeby badanego zagadnienia. Grecy uprawiali ponadto algebrę geometryczną, a więc rozpatrywane równania rozwiązywali metodami geometrycznymi, a równania były określone przez odpowiednie krzywe. Ważnym elementem dowodzenia było pokazanie, że dane krzywe są przekrojami pewnych brył, albo że można je otrzymać przy pomocy odpowiednich konstrukcji (sam opis algebraiczny nie wystarczył). Zasadniczym ograniczeniem było mała liczba krzywych (głównie kombinacja ruchów po okręgu) i brak rozwiniętej algebry.

W pracach Apoloniusza pojawia się wiele zagadnień, których rozwiązanie wymagało nowych ogólnych metod i pojęć. Między innymi w pracy *O odcinaniu stosunku* postawiony jest następujący problem: mając dwie linie proste i po jednym punkcie na każdej z nich, poprowadzić przez trzeci punkt taką prostą, która odcina na tych danych prostych odcinki o z góry ustalonym stosunku.

Interesujący jest traktat Apoloniusza *O określonym przekroju*, który może być uznany za pracę z geometrii analitycznej jednowymiarowej. Przedstawiona jest tam algebraiczna analiza różnych zagadnień w formie geometrycznej. Przykładowo, dla dowolnych czterech punktów A, B, C i D znajdujemy na tej prostej taki punkt P, aby zachodził ustalony stosunek między polami prostokątów, zbudowanych odpowiednio na odcinkach AP i CP oraz BP i DP. Apoloniusz pokazuje, że ten problem redukuje się do rozwiązania odpowiedniego równania kwadratowego[15].

Waga dokonań naukowych tych czterech matematyków jest tak wielka, że można mówić o przełomie w naukach rozpoczynającym się wraz z ich odkryciami. Po nich pojawiła się w kolejnych wiekach pewna liczba znaczących matematyków, którzy kontynuowali ich badania, a byli to, między innymi: Nikomed, Diokles, Perseus, Zenodoros, Hypsikles, Dionysodorus, Geminus[16]. Istnieje bardzo mało informacji na temat ich osiągnięć. Przetrwały tylko nieliczne fragmenty, a informacje dostępne są z komentarzy Pappusa i Eutocju-

---

15 U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A History of Mathematics,* s. 128–9.

16 Por. T. Heath, *History of Greek Mathematics,* vol. II, s. 197–234. W tej części swojej pracy Heath dokładnie opisuje dokonania tych matematyków. Częściowo korzystam z tych informacji.

sza. Z tych fragmentów widać, że matematyka była dalej uprawiana na dość wysokim poziomie. Z całą pewnością ci matematycy rozumieli odkryte wcześniej metody i umieli je stosować. Przykładowo zobaczmy kilka charakterystycznych dla tego okresu wyników.

Jedną z ważniejszych postaci był Hypsikles (około 190 –120 p.n.e.), który kontynuował badania Apoloniusza, ale również Euklidesa i Archimedesa. Podejmuje badania Apoloniusza nad bryłami platońskimi. Zauważa, że stosunek powierzchni dwunastościanu do dwudziestościanu foremnego wpisanych w tę samą kulę jest taki sam, jak stosunek objętości tych brył, i wynosi $\sqrt{\frac{10}{3(5-\sqrt{5})}}$. Są to więc dalsze badania w ramach teorii stosunków i rozszerzenie jej obszaru zastosowań. Bada też różne własność liczb wielokątnych oraz postępów arytmetycznych. Interesujące jest to, iż jedna z jego prac uznawana była przez dłuższy czas za kolejną, XIV, księgę *Elementów* i przypisywana Euklidesowi.

Ciągle w centrum zainteresowań tego okresu były problemy starożytnych, a próby ich rozwiązania prowadziły do konstrukcji kolejnych krzywych. Badania nad krzywymi miały podwójne znaczenie. Z jednej strony dawały nowe możliwości wykonywania konstrukcji geometrycznych (w sposób elementarny, ale niekoniecznie jedynie przy pomocy cyrkla i linijki), a z drugiej – skonstruowane krzywe pozwalały na wykonywanie różnych urządzeń mechanicznych, w których własności tych krzywych znajdowały praktyczne zastosowanie.

Nikomedes (280–210 p.n.e.) skonstruował krzywą, zwaną konchoidą, przy pomocy której zrealizował trysekcję kąta i podwojenie sześcianu. Eutocjusz pisze, iż Nikomedes był niezwykle dumny ze swoich konstrukcji, uważał, że spełniają rygory ścisłości czystej geometrii, natomiast krytykował mechaniczne urządzenie Eratostenesa (mezolabium) – służące do otrzymywania odpowiednich średnich wykorzystywanych przy konstrukcji podwajania sześcianu – jako niezgodne z duchem geometrii. Natomiast Diokles (ok. 250–180 p.n.e.) skonstruował znów krzywą, zwaną cysoidą, dzięki której rozwiązał problem podwojenia sześcianu. Udowodnił też, że promienie odbite od powierzchni zwierciadła parabolicznego skupiają się w jej ognisku. Odpowiednio ustawiając więc zwierciadło, można wywołać pożar w miejscu ogniska, poprzez odbite od zwierciadła promienie Słońca. Było to kontynuowanie badań w ramach teorii stożkowych Apoloniusza i pokazywania praktycznego zastosowania tej teorii.

Bardzo ciekawą postacią jest **Geminius** (I wiek p.n.e.), który poza pracami z zakresu astronomii jest autorem obszernej pracy *Teoria matematyki.*

Praca ta nie przetrwała, jednak była komentowana przez Proklosa i Eutocjusza, także perskiego matematyka o imieniu Al-Nayziri (Naziriusz, 865–922) i wielu innych. Praca stanowiła ważną refleksję nad matematyką i jej podstawami (badała aksjomaty i postulaty geometrii). Geminius podzielił matematykę na czystą (umysłową) i stosowaną (obserwowalną), przy czym do matematyki czystej zaliczył geometrię i arytmetykę, natomiast do stosowanej – mechanikę, optykę, astronomię, geodezję, harmonię muzyczną i logistykę. Wobec licznych ataków na wartość matematyki ze strony sceptyków podjął się jej obrony. Pokazywał logiczną strukturę matematyki opartą na fundamencie pierwszych zasad i uzasadniał prawomocność matematycznych dowodów. Analizował osobno definicje, aksjomaty i postulaty oraz pokazywał różnice między nimi. Interesujące jest analizowanie definicji różnych pojęć matematycznych w ujęciu historycznym (u różnych autorów). Geminus poświęcił wiele uwagi rozróżnieniu między postulatami a aksjomatami, podając poglądy wcześniejszych filozofów i matematyków (Arystotelesa, Archimedesa, Euklidesa, Apoloniusza, stoików) na ten temat. Zauważył, że błędem są próby udowodnienia aksjomatów, które nie są możliwe do udowodnienia ze swojej natury, jak również przyjmowanie za pewnik niektórych postulatów, które wymagają uzupełnienia, wyjaśnienia lub nawet dowodu (czwarty postulat Euklidesa o równości kątów prostych i piąty o równoległych). Według niego, matematycy nauczyli nas, aby nie polegać zbytnio na naszej wyobraźni, lecz aby odwołać się do rozumowania w oparciu o metodę naukową. Wiele rzeczy nieprawdopodobnych i paradoksalnych okazuje się możliwe przy dokładniejszym zbadaniu. Przykładowo wydaje się niemożliwe, aby dwie linie zbliżały się do siebie w nieskończoność, a nigdy się nie przecięły, jednak przykład hiperboli i jej asymptoty ukazuje taką możliwość. Podobnie musimy uważać z oczywistością postulatu o równoległych.

> And, though the controversial arguments against the meeting of the straight lines should contain much that is surprising, is there not all the more reason why we should expel from our body of doctrine this merely plausible and unreasoned (hypothesis)? It is clear from this that we must seek a proof of the present theorem, and that it is alien to the special character of postulates[17].

Największe osiągnięcia matematyki rozwijanej w pierwszym okresie po III wieku p.n.e. dotyczą astronomii, stereometrii (a dokładniej – geometrii sferycznej, potrzebnej w badaniach astronomicznych) oraz mechaniki (i innych dyscyplin z nią związanych). Były to badania w dużej mierze teoretyczne, nawiązujące do rygorów ścisłości geometrii, ale coraz większe zna-

---

[17] Ibidem, s. 228.

czenie zaczęły odgrywać zastosowania techniczne (można mówić też o powstaniu w tym okresie techniki naukowej, jako nauki zbudowanej na podstawach matematycznych). Powstanie mechaniki jako dyscypliny naukowej oraz przykłady badań nad zastosowaniami technicznymi matematyki omówię osobno w kolejnym rozdziale (ze względu na ich wagę).

Przez całe wieki astronomia była królową nauk matematycznych i już od czasów sumeryjsko-babilońskich i egipskich inspirowała rozwój innych obszarów matematyki. Starożytny okres rozwoju astronomii kończy się wielkim systemem astronomicznym Ptolemeusza z II wieku n.e. Na początku wieku II n.e. Menelaos formułuje teorię geometrii sferycznej, będącej podsumowaniem kilku wieków prac, w dziele *Sphaerica*. Miała ona nie tylko znaczenie dla zbudowania astronomii teoretycznej, ale również wpłynęła na badanie podstaw geometrii i w czasach nowożytnych była impulsem dla skonstruowania geometrii nieeuklidesowych.

Jednym z największych astronomów, poprzednikiem Ptolemeusza w konstrukcji teoretycznej astronomii, był **Hipparch z Nikei** (ok. 190–120 p.n.e.). Przede wszystkim podał metodę obliczania sferycznych trójkątów. Opracował jako pierwszy tablicę cięciw (tablice trygonometryczne), przez co można go uznać za twórcę trygonometrii, a ponadto pokazał związek między astronomią teoretyczną a astronomią praktyczną, predykcyjną. To on sporządził katalog gwiazd stałych, bo chciał, aby kolejne pokolenia mogły potwierdzić przewidywane przez niego przesunięcia gwiazd (taki efekt zaobserwował dopiero Halley w 1718 roku, czyli dwa tysiące lat później, w oparciu o tablice Hipparcha). Odrzucał też istnienie sfery materialnej, na której gwiazdy miałyby być osadzone. Przesunięcia gwiazd stałych jako całości świadczyłoby raczej o ruchu Ziemi, a to oznacza, że Hipparch taką możliwość przyjmował. Mimo wielkości naukowej Hipparcha nie ma prawie żadnych informacji o jego życiu, a z licznych prac przetrwał tylko *Komentarz do „Zjawisk" Aratosa i Eudoksosa* oraz sporządzony przez niego katalog gwiazd[18].

Ważną postacią w ciągu badań nad geometrią sferyczną był **Teodozjusz z Bitynii** (ok. 160–90 p.n.e.). Napisał dzieło *Sfery* w trzech księgach oraz komentarz do *Metody* Archimedesa (które później zaginęły). Praca *Sfery* w zamierzeniu miała być uzupełnieniem *Elementów* Euklidesa o twierdzenia związane z geometrią sferyczną (adaptacje księgę III *Elementów* do potrzeb tej geometrii) i niezbędnym narzędziem do badań astronomicznych. Prze-

[18] G.J. Toomer, *Biography in Dictionary of Scientific Biography,* New York, 1970–1990; T. Heath, *History of Greek Mathematics,* vol. II, s. 253–260.

trwały jeszcze jego dwie prace: *Domostwa* oraz *Dni i noce*, w których bada i opisuje różnice w obserwowanych zjawiskach astronomicznych w zależności od położenia geograficznego oraz zjawisko równonocy i zmianę długości dnia i nocy w ciągu roku. Podobno skonstruował uniwersalny zegar słoneczny (według Witruwiusza), który można było używać w różnych regionach Ziemi[19].

Ukoronowaniem prac nad geometrią sferyczną są badania **Menelaosa z Aleksandrii** (ok. 70–130). Przede wszystkim zbudował geometrię sferyczną na wzór geometrii euklidesowej (płaskiej), stosując odpowiednie rygory ścisłości i pokazał jej zastosowanie w astronomii. Napisał wiele prac, ale zachowała się tylko *Sphaerica*, w której badał trójkąty sferyczne (pierwszy podał ich definicję, są to trójkąty na powierzchni sfery wyznaczone przez koła wielkie) i ich wykorzystanie w astronomii. Użycie łuków wielkich sprawia, że można traktować trójkąty sferyczne w wielu przypadkach analogicznie do trójkątów płaskich. Jest to punkt zwrotny w geometrii sferycznej. Wiele dowodów dla geometrii płaskiej „przechodzi" dla geometrii sferycznej, jednak Menelaos stara się unikać dowodów nie wprost, których, według niego, jest u Euklidesa za dużo. Formułuje ważne twierdzenie geometrii sferycznej i je dowodzi (twierdzenie Menelaosa). Twierdzenie w wersji płaskiej brzmi: jeśli prosta przecina trzy boki trójkąta (jeden z boków jest przedłużony poza wierzchołki trójkąta), to iloczyn trzech nieprzylegających w ten sposób utworzonych odcinków jest równy iloczynowi trzech pozostałych odcinków linii trójkąta. Niestety, inne dzieła (wspominają o nich arabscy autorzy) nie przetrwały ani w greckim oryginale, ani w arabskim tłumaczeniu. Napisał podobno: *Księgę o twierdzeniach sferycznych*, *Trzy księgi na temat „Elementów geometrii"* oraz *Księgę o trójkącie*[20].

Jednym z najbardziej wszechstronnych matematyków starożytności był **Klaudiusz Ptolemeusz** (ok. 100–168 n.e.). Zajmował się przede wszystkim astronomią, ale też geografią i optyką. Swoje główne dzieło, znane pod nazwą *Almagest* (największy), zatytułował *Mathematike Syntaxis*, co oznaczało, że była to praca z astronomii teoretycznej (wykorzystanie ogólnych struktur matematycznych do opisu systemu świata). Dzieło jest syntezą poprzedników (poczynając od Eudoksosa i Hipparcha), tak w zakresie astronomii, jak i trygonometrii, z niezbędnymi uzupełnieniami i poprawkami samego Ptolemeusza. Model geocentryczny stworzony przez Ptolemeusza obowiązywał aż do czasów nowożytnych, gdy zastąpił go prostszy model he-

19 T. Heath, *History of Greek Mathematics,* vol. II, s. 245–246.
20 Ibidem, s. 260–273.

liocentryczny (również opisany geometrycznie) Kopernika. Dopiero w XIX wieku teoria Kopernika uzyskała lepsze potwierdzenie obserwacyjne od teorii Ptolemeusza (potwierdzenie paralaksy heliocentrycznej związanej z ruchem Ziemi wokół Słońca)[21].

W ostatnim okresie matematyki aleksandryjskiej kontynuowany był pitagorejski nurt matematyki. Była to czysta teoria liczb, której mistyczna interpretacja znalazła zainteresowanie w okresie renesansu. W dużej mierze inspirowane badaniami algebry geometrycznej pojawiły się też nowe zagadnienia i obszary badawcze: początki algebry jako samodzielnej dyscypliny badawczej, metody przybliżone, badanie metod dowodzenia stosowanych w matematyce, pierwsze idee geometrii rzutowej.

Matematyka pitagorejska rozwijana była przez **Nikomacha z Gerazy** (II wiek n.e.). Warto zauważyć, że czysta teoria liczb, którą się zajmował, nie była w czasach hellenistycznych szerzej rozwijana i dopiero czasy nowożytne (od czasów Eulera) przyniosły ponowne nią zainteresowanie i ogromny rozwój. Najbardziej znane jest jego *Wprowadzenie do arytmetyki* (zachował się jeszcze *Podręcznik harmonii*), które miało duże znaczenie dla rozwoju późniejszych koncepcji neoplatońskich. Nie są to jednak prace zaawansowane matematycznie i świadczą już o upadku wiedzy matematycznej. Przywołuje pitagorejską teorię liczb parzystych i nieparzystych, odkryte wcześniej własności liczbowe (np. opis sita Eratostenesa znajdowania liczb pierwszych), obszerne fragmenty o obliczaniu średnich. Ciekawym wynikiem jest wzór pokazujący, że odpowiednie sumy kolejnych liczb nieparzystych są sześcianami liczb całkowitych: $3 + 5 = 2^3, 7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3, \ldots$ Jest to wynik analogiczny do twierdzenia mówiącego, że suma kolejnych liczb nieparzystych jest kwadratem ilości występujących w tej sumie liczb: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2$. Otrzymamy wzór następujący: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$, gdy połączymy te poprzednie[22].

Kolejnym ze znaczących matematyków końca okresu hellenistycznego był **Diofantos z Aleksandrii** (ok. 200–284), uznawany za ojca algebry. Znane jest jego dzieło *Arytmetyka,* zawierające rozwiązania równań algebraicznych (pierwszego i drugiego stopnia) oraz wyniki z teorii liczb. Diofantos, jak i inny Grecy, nie wychodził poza liczby naturalne, dlatego też tylko takich naturalnych rozwiązań poszukiwał (równania diofantyczne). Przyjmuje się, że praca zawierała 13 ksiąg, z których ocalało tylko sześć. Jest

21 Ibidem, s. 273-297.

22 C.B. Boyer, U.C. Merzabach, *A History of Mathematics*, s. 201–203.

w nich 130 zadań, w tym określone z jednym rozwiązaniem i nieokreślone. Równania, które nie dawały rozwiązań w liczbach naturalnych, uważał za bezużyteczne, a ewentualne rozwiązania – za absurdalne. W pracy Diofantosa brak jest rozbudowanej symboliki algebraicznej. Występują jedynie skróty dla wielkości niewiadomych i ich potęg oraz dla równości. Był to istotny krok w kierunku symboliki algebraicznej. Większość operacji i równań opisywał jednak słowami. Na dzieło Diofantosa zwrócił uwagę w Europie dopiero Regiomontanus w 1463 roku. Dużo wcześniej *Arytmetyka* znana była w krajach muzułmańskich i tłumaczona na język arabski. Jak wiadomo, algebra stała się główną dziedziną badań u Arabów przez całe średniowiecze i to oni właśnie podjęli dzieło Diofantosa[23].

W końcowym okresie matematyki greckiej dalej analizowane były problemy starożytnych i podawane kolejne propozycje rozwiązań. Znaczącym przykładem jest **Sporus z Nicei** (ok. 240–300), który zajmował się kwadraturą koła i podwojeniem sześcianu, a przede wszystkim poddawał krytycznej analizie inne tego typu konstrukcje. Wiemy o nim jedynie z pism Pappusa (najprawdopodobniej był uczniem Sporusa) i Eutocjusza. Jego rozwiązanie problemu podwojenia sześcianu szło tropem Dioklesa, jednak unikał wykorzystania krzywej cysoidy, chcąc zachować maksymalną prostotę konstrukcji. Stosował też przy obliczeniach metodę przybliżeń, co można uznać za wczesne próby całkowania. Zauważył słusznie, że metoda Hippiasza kwadratury koła za pomocą kwadratrysy zawiera błędne koło. Do konstrukcji kwadratrysy trzeba znać bowiem stosunek promienia okręgu do jego obwodu, a konstrukcja tego stosunku jest równoważna kwadraturze koła[24].

Prace Sporusa wywarły bardzo duży wpływ na **Pappusa z Aleksandrii** (ok. 290–350), który zamyka historię wielkich twórczych matematyków greckich. Głównym jego dziełem jest *Synagoge* (*Matematyczna kolekcja*) napisana w ośmiu księgach. Księga I nie przetrwała, a była poświęcona arytmetyce, natomiast w księdze II opisana jest metoda Apoloniusza operowania dużymi liczbami przy pomocy potęgowania (kolejne potęgi miriady – 10000). Księga III poświęcona jest konstrukcjom różnych średnich oraz opisom paradoksów geometrycznych. Znów w księdze IV mamy opis krzywych np. spirali Archimedesa, kwadtratrysy Hippiasza, ich właściwości i możliwości rozwiązywania problemów geometrycznych przy ich pomocy. Pappus zauważa, że do wykonywania pewnych konstrukcji nie wystarczą klasyczne okręgi i linie proste czy nawet stożkowe, lecz potrzebne są krzywe powsta-

[23] Ibidem, s. 203–206.

[24] M.E. Szabo, *Sporus*, [w:] *Dictionary of Scientific Biography,* New York 1970–1990.

jące z nieregularnych powierzchni i ze złożonych ruchów. Proponuje geometryczne konstrukcje, w których wykonuje dodatkowe manipulacje linijką, aby znaleźć istotne dla dalszych konstrukcji *neusis*[25]. W *neusis* chodzi o umiejętne (nieznaczne, z wyczuciem) zwiększenie narzędzi konstrukcyjnych, aby otrzymać rozwiązanie problemów geometrycznych. Wprowadzając przykładowo linijkę z zaznaczonymi punktami, można było zrealizować podwojenie sześcianu. Czasami trzeba było przyjąć dodatkową linię, punkt, czasem wprowadzić ruch, a czasem podać warunki analityczne (np. odległość od ustalonych punktów prostych czy proporcje tych odległości). Tego typu konstrukcje stosowali, przykładowo, Archimedes, Apoloniusz, Heron, Nikomed i matematycy arabscy[26]. Apoloniusz sklasyfikował płaskie i przestrzenne „problemy *neusis*" pod kątem linii potrzebnych do rozwiązania problemów geometrycznych. Starał się zminimalizować liczbę potrzebnych do konstrukcji warunków. Zmierzał do podania ogólnych warunków dla całej geometrii i możliwych konstrukcji[27].

W księdze V dostrzega „wiedzę" pszczół na temat najbardziej ekonomicznego kształtu budowanych przez nich plastrów. Pszczoły wiedzą, że sześciokąt, przy tej samej ilości materiału, pomieści więcej miodu niż kwadrat czy trójkąt. Pappus dostrzega ogólniejszą zasadę, a mianowicie, że ze wszystkich równobocznych figur płaskich mających równy obwód ta, która ma większą liczbę kątów, jest zawsze większa, a największą z nich jest okrąg o równym obwodzie. Również w księdze V Pappus omawia trzynaście półregularnych brył odkrytych przez Archimedesa. Porównuje obszary figur o równych obwodach czy powierzchniach i udowadnia, że kula ma większą objętość niż jakakolwiek regularna bryła o tej samej powierzchni. Udowadnia również związany z tym wynik, że dla dwóch regularnych brył o tej samej powierzchni ta z większą liczbą ścian ma większą objętość.

Księgi VI i VII są ważne głównie z tego powodu, że omawia w nich poglądy kilku znaczących matematyków, w tym Arystarcha, Euklidesa, Apoloniusza i Eratostenesa oraz Autolikosa, Teodozjusza i Aristajosa (jest to tzw. *Mała astronomia* w odróżnieniu od *Wielkiej* Ptolemeusza).

Bardzo interesujący jest tzw. *Skarbiec analizy* (VII księga), a więc zbiór idei, które można wykorzystać do rozwiązywania problemów geometrycznych. Są to idee Euklidesa, Apoloniusza i Aristajosa, które opierają się na metodzie analizy i syntezy. W analizie przyjmujemy, że mamy to, czego poszu-

---

25 *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, red. H. Fefrin-Weis, Springer, London 2010, s. XVII.

26 Ibidem, s. XX–XXI.

27 Ibidem, s. 145.

kujemy, aby to wykonać, i potem badamy, z czego to, co otrzymaliśmy, się wywodzi, i szukamy przyczyny, aż dojdziemy krok po kroku do pierwszej zasady. W metodzie syntezy jest odwrotnie: zakładamy, że zostało zrobione to, co osiągnęliśmy poprzez analizę, i układamy te przyczyny w naturalnym porządku jako następniki te elementy, co wcześniej były poprzednikami, i łącząc je, otrzymujemy konstrukcję tego, czego szukano.

Pappusa uważa się za prekursora geometrii rzutowej. Ponadto sformułował twierdzenie (jeśli wierzchołki sześciokąta leżą na przemian na dwóch prosty i dwie pary przeciwległych boków są parami równoległe, to również boki trzeciej pary są do siebie równoległe), którego prawdziwość nie jest możliwa do udowodnienia w oparciu o aksjomaty Euklidesa, a mimo tego można wykazać jego prawdziwość. Dowodzi to niezupełności tych aksjomatów. Duże znaczenie mają też jego komentarze do *Elementów* Euklidesa oraz *Almagestu* Ptolemeusza[28].

3. Zastosowania techniczne jako efekt rozwoju i ścisłości matematyki greckiej

Powszechnie przyjmuje się przy przedstawianiu dziejów matematyki greckiej, że w pracach wielkiego Archimedesa i Apoloniusza matematyka grecka osiągnęła swój szczyt. Wskazuje się, że z metod opracowanych w okresach wcześniejszych nie dało się już wiele otrzymać bez pojawienia się nowych idei. Brakowało ogólnej idei układu współrzędnych, a ponadto poważnym ograniczeniem było rozwijanie metod algebraicznych w oparciu o geometrię (algebra geometryczna). Równania, którymi się zajmowano, związane były jedynie z liniami, powierzchniami, objętościami (a więc były to równania maksymalnie stopnia trzeciego). Jedynie teoria proporcji pozwalała wykroczyć poza te ograniczenia, operując stosunkami między odpowiednimi wielkościami geometrycznymi. Brak było ogólnych pojęć i charakterystyk, które ujmowałyby rozpatrywane wielkości. Ponieważ wielkości niewymierne miały reprezentacje jedynie w postaci wielkości geometrycznych (odpowiednich niewspółmiernych linii), można było mnożyć jedynie dwie lub trzy takie wielkości, przedstawiając je w postaci prostokąta lub prostopadłościanu (ograniczenie trójwymiarowością przestrzeni geometrycznej). Rozwijała się wprawdzie geometria przestrzenna, jednak okazało się, że wszystkie możliwości zostały pokazane w *Elementach* Euklidesa,

[28] C.B. Boyer, U.C. Merzabach, *A History of Mathematics*, s. 206–213.

w księgach XI–XIII. Tutaj również barierą w rozszerzeniu twierdzeń bryłowych okazał się brak ogólnych metod[29].

Według T. Heatha, jednym z rozwiązań tych problemów zdawało się poszukiwanie obszarów zastosowań dla matematyki, aby otworzyć zamkniętą przestrzeń badań. Najbardziej naturalne zdawało się budowanie geometrii pomiarów. To wymagało jednak rozbudowanej czystej teorii, która dostarczałaby odpowiednich narzędzi. Dla zastosowań w astronomii potrzebna była trygonometria, tak płaska, jak i sferyczna. Drugim obszarem było rozwijanie stereometrii, a mianowicie pomiary powierzchni i objętości brył o różnych kształtach oraz przybliżenia arytmetyczne tych wielkości (z wykorzystaniem stosunku π między obwodem koła i jego średnicą). Pozwalało to na praktyczne zastosowania i konstruowanie różnych technicznych urządzeń. Tutaj najbardziej znany jest Heron z Aleksandrii, a wcześniej sam Archimedes i inni. Jeśli natomiast chodzi o trygonometrię, była ona rozwijana i wykorzystywana w astronomii przez Hipparcha, Menelaosa i Ptolemeusza.

Można jednak spojrzeć na wejście w okres zastosowań jako na kolejny, naturalny okres rozwoju. Zastosowania techniczne i inne przełożyły się na rozwój cywilizacyjny państw hellenistycznych, jak również imperium rzymskiego. Jednak o ile Rzymianie ograniczyli się jedynie do zastosowań wiedzy matematycznej już przez Greków zdobytej we wcześniejszych okresach, o tyle uczeni hellenistyczni próbowali dalej rozwijać czystą matematyką w powiązaniu z jej zastosowaniami. Traktowali ją w pewnym stopniu jako matematykę stosowaną. Takimi obszarami matematyki stosowanej była przede wszystkim astronomia, ale też geografia, mechanika, hydrostatyka, pneumatyka i inne. Jednym z ważniejszych twórców matematyki stosowanej jest oczywiście, wspomniany wcześniej, Archimedes.

Z drugiej strony matematyka stosowana była również „czysta", bo były przez nią używane te same metody i matematyczny sposób rozumowania. Była to więc technika naukowa, mająca podstawy matematyczne, a więc tworząca obszerną dziedzinę matematyki.

Jednym z ważniejszych uczonych hellenistycznych tej nowej matematyki był **Eratostenes** (276–194 p.n.e.), który dokonał matematyzacji geografii. Był wybitnym matematykiem i astronomem, ale również filozofem i poetą. W dziele *Geographica* zbudował matematyczne podstawy geografii. Natomiast w pracy *Catasterismi* przedstawił katalog 675 gwiazd. Od 255 roku p.n.e. działał w ośrodku aleksandryjskim, a w roku 236 p.n.e. został kierownikiem Biblioteki Aleksandryjskiej. Wykorzystując własności wielkości pro-

29 Por. T. Heath, *History of Greek Mathematics,* vol. II, s. 468–472.

porcjonalnych, przeprowadził eksperyment, w którym z dużą dokładnością obliczył obwód Ziemi, a już tylko szacunkowo Słońca i odległość Księżyca od Ziemi. Prace matematyczne Eratostenesa były często przywoływane przez kolejne pokolenia matematyków; znany jest prosty algorytm do wyznaczania liczb pierwszych, tzw. sito Eratostenesa. Skonstruował proste, acz pomysłowe, urządzenie mechaniczne (mezolabium) pozwalające na wyznaczenie wielkości potrzebnych do zrealizowania podwojenia sześcianu (na podstawie metody „podwójnej średniej proporcjonalnej" Hipokratesa z Chios)[30].

Wielkim wynalazcą i konstruktorem był **Ktesibios z Aleksandrii** (III wiek p.n.e.). Napisał *Dowody pneumatyczne* (przedstawia w nich podstawy teoretyczne pneumatyki) oraz *Zapiski* (opisuje tam konstrukcje różnych maszyn). Dzieła te zaginęły, a znane są z prac Filona z Bizancjum oraz Herona. Był wynalazcą pompy wodnej, udoskonalił również zegar wodny, sprawiając, że stał się bardzo precyzyjny, skonstruował organy wodne oraz różne urządzenia działające w oparciu o sprężone powietrze (np. katapulty)[31].

Filon z Bizanjum (III wiek p.n.e.) kontynuował prace Ktesibiosa. Był również wybitnym wynalazcą i mechanikiem, autorem czterotomowego dzieła *O mechanice,* którego prace znane są jedynie fragmentarycznie w arabskim tłumaczeniu. Znany jest jako ten, który sporządził listę siedmiu cudów świata, na której znalazły się wiszące ogrody Semiramidy, posąg Zeusa, rzeźba kolosa rodyjskiego, piramidy egipskie, świątynia Artemidy, mury Babilonu, mauzoleum w Halikarnasie oraz latarnia morska na Faros (dzieło architekta Sostratosa). Jak wiadomo, żadna z tych wspaniałych budowli nie przetrwała (poza piramidami). Ponieważ był znawcą w dziedzinie techniki, można zakładać rzetelność dokonanego wyboru i wiarygodność opisu. Przypisuje mu się kilka znaczących wynalazków, takich jak termoskop, katapulta, atrament sympatyczny. W swoim dziele opisał wiele wspaniałych urządzeń, w tym kuszę, kubełkowy podnośnik wody, koło wodne, przegub krzyżowy czy iniektor parowy[32].

Kilka wieków później działał **Heron z Aleksandrii** (I wiek n.e.). Napisał bardzo dużo prac z zakresu niemal całej matematyki, ale był również wynalazcą i konstruktorem. W dużej mierze jego prace mają charakter encyklopedyczny. Zachowało się wiele z jego prac, w tym: *Mechanika, Pneumatyka, Metryka, Zwierciadła oraz Automaty.* Interesująca jest historia jego dzieła *Metryka*, które zostało odkryte w Konstantynopolu dopiero w 1896 roku. Sytuacja jest analogiczna do odkrycia *Metody* Archimedesa, chociaż odkryty

---

30 I. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 85–88; 289–294.

31 Ibidem, s. 158–161; 261–263.

32 Ibidem, s. 94–97; 124–127.

rękopis pochodził z 1100 roku i był kolejnym egzemplarzem tego dzieła. Z tego wynika, że Heron był znany i czytany przynajmniej w Bizancjum. Praca Herona pokazuje silny związek ówczesnej geometrii z pomiarami. Sam Heron zajmował się też „czystą" geometrią (słynny wzór Herona na pole trójkąta czy inne na pola i objętości), jednak widać, że w tym czasie równolegle i w połączeniu ze sobą rozwijane były oba obszary matematyki. Była to jakby synteza praktycznej matematyki sumeryjskiej i babilońskiej z czysto racjonalną matematyką grecką. Dla Herona wynik matematyczny miał swoją wartość niezależnie, czy uzyskany był w sposób czysto dedukcyjny i precyzyjny, czy w sposób przybliżony i związany z matematycznymi konstrukcjami. Mechanika była dla niego najważniejszą dziedziną nauki. Rozumiał ją bardzo szeroko i zaliczał do niej tak dyscypliny „czysto" matematyczne (geometria, arytmetyką, astronomia), jak i fizykę oraz dyscypliny praktyczne (architektura, obróbka metali, stolarstwo, malarstwo i inne). W pracach Herona przedstawionych jest wiele metod naukowych oraz wiele konstrukcji, np. we fragmentach astronomicznych podana jest metoda obliczania odległości miedzy Aleksandrią i Rzymem na podstawie obserwacji zaćmień Księżyca w tych miastach i różnic między lokalnymi czasami. Konstrukcje Herona były wykorzystywane nie tylko jako atrakcje techniczne (np. fontanna Herona, bania Herona – rodzaj maszyny parowej, poruszające się figurki przy pomocy systemu przekładni), lecz także do budowania instalacji mających praktyczne zastosowanie w gospodarce (pompy do zaopatrywania w wodę, machiny wojenne, systemy nawadniania i ogrzewania)[33].

4. Archimedesowski projekt nauki

W oparciu o *Metodę* Archimedesa oraz inne jego prace (szczególnie *O równowadze płaszczyzn*) można sformułować archimedesowski projekt matematyki. Jak zauważają Reviel Netz i William Noel w książce *The Archimede Codex,* kluczem do zrozumienia koncepcji Archimedesa jest budowana przez niego matematyka nieskończoności oraz zastosowanie matematyki do fizyki. To połączenie matematyki i fizyki (a również zbudowanie matematycznej techniki) stało się możliwe dzięki wprowadzeniu przez niego pojęcia środka ciężkości różnych figur geometrycznych (punktem wyjścia było znalezienie i ścisłe wykazanie istnienia środka ciężkości trójkąta) oraz metody obliczania pól figur ograniczonych krzywymi i zakrzywionymi powierzchniami. Przedstawiona wcześniej metoda obliczenia powierzchni odcinka pa-

[33] Ibidem, s. 115–120; 141–151.

raboli jest tego najlepszym przykładem. Aby dało się rozpatrywać oddziaływania grawitacyjne pomiędzy ciałami niebieskimi, trzeba traktować te ciała jako punkt o zaniedbywanej małej wielkości (środek ciężkości tych ciał), w których skupiona jest cała masa (parametr ciała odpowiedzialny za grawitację). W modelu newtonowskim układu planetarnego rozpatrujemy jako poszczególne planety punkty materialne, w których skupiona jest cała masa tych ciał. Inaczej trzeba byłoby rozpatrywać nieskończenie wiele oddziaływać między różnymi punktami tych ciał, znajdującymi się przecież w innych odległościach. Pomysł Archimedesa ze środkiem ciężkości (grawitacji) różnych ciał skupionych w jednym punkcie pozwolił na opisanie matematyczne oddziaływania na siebie dużych ciał i ich ruchu (a więc ruchu planet i innych ciał niebieskich). W przypadku koła środek ciężkości pokrywa się z jego środkiem geometrycznym (podobnie jest w przypadku kwadratu i ogólnie równoległoboku). W przypadku innych figur sytuacja nie jest już taka oczywista. W odniesieniu do trójkąta Archimedes wykazał, że jego środek ciężkości musi znajdować się na jego środkowej. A dokładniej, posługując się dowodem *a contrario*, pokazał, że nie może znajdować się w żadnym punkcie poza środkową trójkąta. A ponieważ rozumowanie dotyczy każdej z trzech środkowych, tym samym środek ciężkości jest punktem ich przecięcia. Do dowodu wykorzystywał własności trójkątów podobnych.

Wiadomo, że każdy wielokąt zbudowany jest z trójkątów, więc jest to również metoda znajdowania środka ciężkości dowolnych wielokątów. Skoro inne figury dają się przybliżać wielokątami, to otrzymujemy również przybliżoną (czy graniczną) metodę otrzymywania środka ciężkości dowolnych figur geometrycznych (przynajmniej płaskich). Skąd jednak wiemy, że taki środek ciężkości w ogóle istnieje? Wydaje się, że wystarczy na przykład papierowe modele trójkątów podwieszać na nitce do sufitu i sprawdzać, czy i w którym punkcie trójkąt zachowuje równowagę. Wygląda to na dobry empiryczny dowód istnienia takiego punktu. Jednak, tak naprawdę, nie mamy metody otrzymywania takiego punktu w sposób generalny. W przypadku kolejnych figur trzeba by powtarzać całą żmudną empiryczną procedurę. Archimedes natomiast opracował znajdowanie takiego punktu w sposób matematyczny. Najpierw wprowadził pojęcie środka ciężkości, a następnie bez żadnego doświadczenia (przy pomocy siły swojego rozumu i metody matematycznej) pokazał, jak taki punkt można znajdować. Ten dowód znajduje się w pracy *O równowadze płaszczyzn* (jako twierdzenie trzynaste). Metodę tę można nazwać metodą analityczno-dedukcyjną. Nawet, jeśli na początku, aby przekonać się, że możliwe jest zrównoważenie trójkąta, trzeba było posłużyć się doświadczeniem empirycznym, to później już, bez żadnego eksperymentu, możemy policzyć środek ciężkości dowolnych ciał, a tym samym sprowadzić badanie oddziaływań między ciałami do oddziaływań między punktami materialnymi jako środkami grawitacji.

> Minds rules over matter – because, ultimately, even brute matter must follow logic […] This is the principle discovered by Archimedes. This is science in action[34].

Jednak w metodzie Archimedesa nie tylko matematyka jest stosowana do świata materialnego i rządzi nim, lecz również odwrotnie, świat materialny staje się elementem pracy umysłu, świat fizyczny „odkrywa" też prawa matematyczne i rządzi światem matematycznym. Fizyczne fakty (dokładniej w przypadku rozważań Archimedesa jest to prawo równowagi czy prawo dźwigni) pokazują swoją ogólną naturę. Niezależnie od rodzaju pracy różne urządzenia podlegają temu samemu ogólnemu prawu, które możemy ująć w prostą matematyczną zasadę: dwa ciężary są zrównoważone, jeśli ich odległości od punku podparcia (równowagi) są odwrotnie proporcjonalne do tych ciężarów. Widzimy, że ta zasada mieści się w ogólnej teorii stosunków, jednak odpowiednie wielkości (ciężary i długości) muszą być fizycznie zmierzone. Jest to wkroczenie (poprzez zasadę dźwigni) teorii stosunków (jednej z najdoskonalszej teorii matematycznej) w świat materialny.

Słynnym archimedesowskim punktem podparcia, który jest potrzebny, aby poruszyć Ziemię (na podstawie prawa dźwigni), jest czysta myśl wystarczająca do poznania rzeczywistości. Ta czysta myśl to logiczna analiza pojęć i matematyczne metody dowodzenia, które działają pod warunkiem, że rzeczywistość dostarcza nam odpowiedniego materiału badawczego i faktów.

5. Matematyka antyczna w stosunku do innych nauk

Jak zauważyłem wcześniej, w nauce greckiej pojawiały się kolejne działy dzięki wyodrębnieniu specyficznych idei i metod poznawczych, poczynając od kosmologii (filozoficznej, jako nauki o przyrodzie), geometrii, poprzez arytmetykę, dialektykę, teorię harmonii, logikę, gramatykę, retorykę, optykę aż po medycynę, mechanikę, akustykę, hydrostatykę i astronomię. Większość z tych działów nauki (poza kosmologią, dialektyką, logiką, medycyną. gramatyką i retoryką) została objęta jedną nazwą „matematyka". Aż do wieku XIX dialektyka i logika pozostawały poza zasięgiem matematyki, natomiast gramatyka i retoryka, poszerzając stopniowo swój zakres badań,

---

[34] R. Netz, W. Noel, *The Archimedes Codex. Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest,* Weidenfeld & Nicolson, London 2007, s. 144.

rozwinęły się odpowiednio w blok nauk humanistycznych i nauk społecznych. Nie należy zapominać o szczególnej roli filozofii, która powstając i rozwijając się równolegle z matematyką grecką, miała podstawowe znaczenie w całym systemie nauk i poza głównymi jej działami (czyli metafizyką i epistemologią) obejmowała różnorodne zagadnienia antropologiczne, etyczne, społeczne i kosmologiczne. Kosmologia jednak, poza swoim czysto filozoficznym wymiarem, miała również składnik, który stopniowo rozwijał się w blok nauk przyrodniczych. Przyczyniły się do tego między innymi prace wielkich filozofów greckich: Empedoklesa i Arystotelesa, oraz lekarzy, w tym przede wszystkim Hipokratesa, Galena oraz Herofilosa. Medycyna (w swoim naukowym wymiarze) rozwijała się od początku w ścisłym związku z naukami przyrodniczymi i była dla nich znaczącą inspiracją.

Bezpośredni związek medycyny i matematyki jednak istniał – miało to miejsce poprzez astrologię, która w pewnych okresach dziejów (w pierwszych wiekach naszej ery oraz od XII do XVII wieku) uznawana była za jedną z najważniejszych teorii naukowych, a w XVIII wieku została zdegradowana i stała się pseudonauką. Astrologia była w dużym stopniu teorią „matematyczną" (była też związana z kosmologią), badającą wpływ położenia i ruchów gwiazd i planet na życie i zdrowie człowieka (astrologami byli przykładowo tacy uczeni, jak Albert Wielki, Regiomontanus, Cardano, Ficino, Galileusz, Kepler, Newton). Ukształtowała się w klimacie kultury i nauki greckiej, gdzie wydawała się remedium na nieuchronność losu (fatum). W pewnym zakresie zawierała solidną wiedzę matematyczną, wymagała bowiem umiejętności ustalenia położenia ciał niebieskich w danej chwili (ważnej dla człowieka, którego przyszłość starano się określić w oparciu o położenie ciał niebieskich w momencie narodzin), sporządzenia mapy nieba w ustalonym badanym momencie (jest to właśnie horoskop) i dokonania odpowiedniej interpretacji – przyporządkowania położeń ciał niebieskich do badanych wydarzeń. Ponieważ w greckiej kulturze człowiek był rozumiany jako mikrokosmos, istnienie takiego przyporządkowania i związku między Kosmosem a Mikrokosmosem nie wydawało się niczym dziwnym, było wręcz całkiem naturalne. Nastąpiło jednak daleko idące rozszerzenie tego przyporządkowania między strukturami rozpatrywanych bytów (i pewnymi stałymi określającymi je elementami) na zależności w czasie, co prowadziło do skrajnego, i *de facto* irracjonalnego, determinizmu. Te praktyki miały pozytywny skutek dla nauki, gdyż ciągły trening w tworzeniu precyzyjnych map nieba oraz ścisłych przyporządkowań przyczynił się do wytworzenia myślenia funkcyjnego, tak znaczącego dla tworzenia matematyki czasów nowożytnych i współczesnych, gdzie pojęcie funkcji stało się kluczowym pojęciem budowanych teorii. Tym „działem" matematyki nie będę się jednak w tej pracy zajmował[35].

Jak już wcześniej wspomniałem, analizując powstanie metody dialektycznej w szkole eleackiej oraz dialektykę platońską, związek matematyki i dialektyki jest istotny i w głównej mierze sprowadza się do realizowania metody dialektycznej w matematyce. Paradoksy Zenona z Elei zostały sformułowane jako argumenty przeciwko wielkości i ruchowi, w celu obrony eleackiej koncepcji stałości i niezmienności bytu. Można je jednak również traktować jako argumenty kwestionujące możliwość kontaktu ze światem w oparciu o zmysły lub podważające racjonalność myślenia, albo w końcu jako uderzające w możliwość jakiegokolwiek kontaktu poznawczego z rzeczywistością. Eleaci, mając wybór między świadectwem zmysłów, ukazujących istnienie ruchu i wielości, a rozumowaniem dialektycznym, które doprowadza do sprzeczności założenie o tym, że ruch istnieje, wybierają dialektykę.

Decyzja eleatów miała ogromne konsekwencje dla całej nauki. Dzięki niej można było wypracować różne metody dowodzenia, których znaczenie i stosowanie okazało się uniwersalne. Metoda dowodzenia *a contrario*, metoda aksjomatyczno-dedukcyjna czy analizy starożytnych są tego najlepszym przykładem. Metoda analizy wiąże się oczywiście z platońską metodą hipotetyczno-dedukcyjną, będącą zasadniczym składnikiem dialektyki Platona. Przyjmuje ona, że siła ścisłego rozumowania dedukcyjnego jest tak duża, że możemy wyciągać wnioski i dochodzić do prawdziwych rezultatów nawet, jeśli przypuszczenia, na których opieramy nasze wnioskowanie, nie są prawdziwe. Dowód opiera się na logicznym fakcie, że z fałszu może wynikać prawda, podobnie jak dowód nie wprost korzysta z tego, że konsekwencją prawdy nigdy nie może być fałsz. Nawet jeśli nie mamy wiedzy na temat prawdziwości naszych przesłanek (a takiej wiedzy najczęściej nie mamy), możemy z nich wyciągać poprawne formalnie, ale i prawdziwe, wnioski. Na tej myśli opiera się stosowanie metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Budowanie teorii matematycznych w oparciu o przyjęte aksjomaty jest badaniem analitycznym tych aksjomatów (i sprawdzeniem, co one, tak naprawdę, opisują). Dopiero rozpatrzenie wszystkich możliwych założeń i wniosków, jakie z nich wypływają, pozwala nam uzyskać „prawdę" o rzeczywistości, która „objęta" jest poprzez przyjęte aksjomaty. Wszystkie aksjomaty i postulaty zawarte na przykład w *Elementach* Euklidesa domagają się takich alternatywnych badań i budowania kolejnych teorii powstałych poprzez ich zane-

[35] Te zagadnienia poruszone są w książce: J. Włodarczyk, *Astrologia. Historia. Mity. Tajemnice*, Świat Książki, Warszawa 2008.

gowanie czy dopełnienie. Analiza starożytnych jest więc metodą, w której badamy różne przypuszczenia oraz ich konsekwencje, aby dojść do poznania rzeczywistości.

Kolejną możliwością zastosowania metody analizy starożytnych są dowody konstrukcyjne, w których konstruujemy dany obiekt, nie wiedząc, czy założenia, na których ta konstrukcja jest oparta, są prawdziwe. Założenia mogą być wzięte z różnych obszarów: przypuszczenia, intuicji, doświadczenia zmysłowego, rozważań metafizycznych. Dobrym przykładem jest różniczka Leibniza jako podstawa konstrukcji rachunku różniczkowego. Abstrahując od statusu ontologicznego różniczki, otrzymaliśmy konkretne i dobre metody obliczeń i dowodów. Analiza matematyczna Leibniza jest tylko jednym z przykładów zastosowania metody analizy starożytnych. Istotna jest, jak widać, sama konstrukcja i metoda jej otrzymania (wypracowana w trakcie tych badań).

Metoda analizy w tym dialektycznym i matematycznym rozumieniu ściśle wiąże się z metodą syntezy. Te metody nawzajem się dopełniają. Mamy bowiem prostą sytuację logiczną. Jeśli, wychodząc z danego zdania, otrzymujemy zdanie fałszywe, to automatycznie to wyjściowe zdanie jest fałszywe, otrzymujemy więc zdanie prawdziwe jako jego zaprzeczenie. Jeśli natomiast, wychodząc z danego zdania, otrzymujemy zdanie prawdziwe, to nie wiemy, czy przesłanka naszego rozumowania jest prawdziwa, czy fałszywa. Możemy jednak w oparciu o otrzymany prawdziwy wniosek dedukcyjnie wyprowadzić (udowodnić) przesłankę (jest to wtedy dowód syntetyczny).

Arystoteles i stoicy, podobnie jak matematycy, wykorzystali i przetworzyli zasady dialektyki do opracowania metod badań logicznych. Kolejną nauką stosującą metody dialektyki była erystyka (sztuka prowadzenia sporów), jako istotna część retoryki. Wszystkie te nauki próbowały podjąć wyzwania wynikające z paradoksów eleackich, megaryjskich czy innych. Jednak to matematyka wyszła z tych zmagań zwycięsko i stała się dla tych nauk wzorem ścisłego dowodzenia i argumentacji.

Jak zauważyłem wcześniej, dla Izokratesa matematyka była istotnym elementem w przygotowywaniu umysłu do opanowaniu sztuki retoryki. Uczyła bowiem systematyczności i precyzji, ponadto rozjaśniała, wysubtelniała i wyostrzała umysł – była propedeutyką retoryki. Dzięki metodzie matematycznej człowiek był w stanie uczynić z wiedzy wartość społeczną – jednak to już sama retoryka budowała konkretne argumenty, mające przekonać innych do danych prawd i zasad oraz stworzyć przez to spójne i trwałe więzi społeczne. Retoryka, aby była skuteczna, musiała posługiwać się doskonałym językiem. Język potoczny do takiego nie należał. Trzeba więc było go udoskonalić, aby pojęcia były precyzyjne i adekwatne, aby używane zwroty i zdania oddawały odpowiednie treści, emocje i trafiały do słuchaczy. W tym budowaniu języka, który ma być precyzyjny i skuteczny w docieraniu do rzeczywistości, istnieje zasadnicze podobieństwo retoryki do matematyki. Język matematyki pokazywał realizację takiej możliwości w przypadku rzeczywistości materialnej (matematyka konkretna, technika matematyczna), natomiast retoryka w odniesieniu do rzeczywistości społecznej.

Jeśli mówimy o matematyce osiągającej poziom wiedzy ogólnej, to przychodzi na myśl metafizyka jako najważniejsza w czasach starożytnych dziedzina filozofii, mająca najwyższy stopień ogólność. Badała „byt jako byt", dociekała jego pierwszych przyczyn, wnikała w jego naturę i istotę, nie wnikała jednak w jego szczegółowe własności, lecz chciała wiedzieć, co naprawdę istnieje. Siłą rzeczy miała być podstawą innych nauk, które badały jakiś konkretny rodzaj bytu. Jeśli traktujemy matematykę jako naukę o ustalonej kategorii bytu (o ilości i wielkości, jak chciał Arystoteles), to musiałaby ona uwzględniać rozstrzygnięcia dokonane na gruncie metafizyki. Wydaje się jednak, że matematyka rozwijała się niezależnie od metafizyki. Nawet w przypadku pitagorejczyków matematyka po prostu zastępuje metafizykę w odkrywaniu i badaniu prawdziwego bytu. W innych koncepcjach, w których nie mamy aż takiej dominacji matematyki, te dziedziny wiedzy działają niezależnie od siebie. W najlepszym razie (na przykład u Platona i neoplatończyków) matematyka jest przygotowaniem do rozważań metafizycznych. Jednak większość matematyków starożytnych nie angażuje się w spory *stricte* metafizyczne i nie korzysta bezpośrednio z ustaleń metafizyki. Świat matematyki zdaje się rządzić swoimi własnymi prawami i badać obiekty niezależne, tak wobec świata zmysłowego, jak i idealnego (jakkolwiek byśmy go nie rozumieli). Ta autonomia matematyki budowała więc, od początku istnienia nauki europejskiej, obraz autentycznej działalności naukowej jako niezależnej od wszelkich wpływów zewnętrznych. Dla wielu matematyka stała się *sensu stricto* teorią prawdziwego bytu albo drogą pozwalającą ten prawdziwy byt osiągnąć, poznawać. Matematyka staje się dziedziną poznania stopniowo ogarniającą całą rzeczywistość, a więc zastępującą w końcu rozważania metafizyczne albo wymagającą, aby te rozważania wychodziły z wnętrza matematyki czy nauk matematycznych. Nie jest to jednak założenie aprioryczne, gdyż ta uniwersalność matematyki objawia się w trakcie jej rozwoju.

Ten związek matematyki oraz metafizyki istnieje mimo braku wpływu rozstrzygnięć metafizycznych na matematykę. Może on być jednak dostrzeżony dopiero wtedy, gdy obserwujemy dłuższy rozwój matematyki i badamy jej podstawy. Okazuje się bowiem, że matematyka nawiązuje w swoich badaniach do podstawowych kategorii bytowych, analizuje je i znajduje ich ścisłe matematyczne konkretyzacje. Chodzi o takie kategorie, jak: odpowiedniość, ilość, wielkość, tożsamość, harmonia, podobieństwo, symetria, continuum, nieskończoność, forma (np. geometryczna, algebraiczna). Są to kategorie, które otwierają kolejne obszary rzeczywistości, umożliwiają proces poznawania, uzasadniają realność i inteligibilność świata oraz racjonalność człowieka. Pojawia się też kilka zagadnień związanych z rozumieniem i sensem matematyki jako wyzwanie dla filozofii: próba zdefiniowania matematyki, określenia jej zakresu, zrozumienia skuteczności matematycznych metod dowodzenia oraz sposobu istnienia bytów matematycznych. Pojawia się również problem jedności i uniwersalności matematyki wobec jej ciągłego rozwoju i wchodzenia na kolejne obszary badawcze.

Od początku zastanawiał też fenomen obecności matematyki w świecie i sposób tej obecności (status ontologiczny obiektów matematycznych), co doprowadziło do sformułowania już w czasach nowożytnych zagadnienia matematyczności przyrody (szerzej świata) oraz matematyzowalności nauk.

Jednym z najważniejszych zagadnień metafizycznych okazał się spór o uniwersalność matematyki. Jak pokazuję w tej pracy, matematyka, rozwijając się, ukazuje coraz nowsze aspekty tej uniwersalności. Jak zauważyłem, taką uniwersalną rolę podstawy w badaniach świata (i podstawową dla innych nauk) przypisywali matematyce pitagorejczycy, Platon czy Archimedes, natomiast nie uznawał jej Arystoteles. Pretendentami do miana nauki uniwersalnej były dialektyka, logika czy metafizyka, chociaż w nieco innym znaczeniu terminu „uniwersalność". Żadna z innych nauk nie była w stanie zająć miejsca matematyki. Współczesnym przykładem jest program logicyzacji matematyki i jego klęska. Coraz bardziej uwidacznia się **fenomen niezastępowalności matematyki i podejmowanie przez nauki matematyczne rozważań metafizycznych**. Omawiając w dalszej części zagadnienie uniwersalności matematyki, dokładniej to zagadnienie przedstawię.

6. Próba syntezy i ocalenia dorobku. Metoda komentarzy

Matematyka, jako działalność i wiedza, była kluczowym punktem odniesienia greckich myślicieli. Przywołajmy w tym miejscu znany napis, który wisiał nad wejściem do Akademii Platona: „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii". To stwierdzenie to nie tylko przenośnia, ukazująca dużą rangę matematyki w szkole platońskiej. Mówi ono coś znacznie więcej – bez znajomości podstawowych idei matematycznych nie można zrozumieć filozoficznych rozważań Platona. Tracą one wiele ze swojej głębi i gubi się przekaz głównych myśli, gdy nie posiadamy wcześniejszego przygotowania matematycznego. Dotyczy to nie tylko filozofii Platona, lecz ogólnie greckiej filozofii, a szczególnie Arystotelesa, u którego mamy nie tylko analizę osiągnięć matematyków, ale również wykorzystywanie idei i metod do swoich rozważań. Niektóre koncepcje podważały wprawdzie wartość matematycznego poznania, jednak nawet w krytyce przeważnie odnosiły się do niego, analizując podstawy matematyki i pokazując alternatywne propozycje.

Jednak stopniowo, poczynając od przełomu III i II wieku p.n.e., słabnie zainteresowanie matematyką, jest ona eliminowana z kultury antycznej i rozpoczyna się jej powolny schyłek. To sprawiło, że większość dzieł matematyków greckich i aleksandryjskich zaginęła, gdyż nie miał ich kto przepisywać i przechowywać. Przetrwały niekoniecznie te dzieła, które były najwartościowsze, lecz te zrozumiałe i budzące zainteresowanie. Już w III wieku p.n.e. miała miejsce znamienna próba zawłaszczania nauk matematycznych przez literaturę. Aratos, który nie był matematykiem, przedstawia główne zagadnienia astronomiczne nie przy pomocy języka matematyki, lecz stosując język heksametru i różnych figur literackich. W pracy Aratosa treści matematyczne schodzą na plan dalszy, stają się tylko tłem dla artystycznych i retorycznych popisów. Dzieło to stawało się bardzo popularne i w końcu wyparło z nauczania autentyczne teksty matematyczne.

Kolejnym elementem przyczyniającym się do zaniku nauki greckiej były niesprzyjające wydarzenia polityczne, w tym wielokrotne niszczenie zbiorów Biblioteki Aleksandryjskiej i rozpraszanie uczonych. Ostatnie zniszczenie biblioteki miało miejsce w roku 641, po zdobyciu Aleksandrii przez wojska arabskie (muzułmańskie). Część dzieł na szczęście przetrwała.

Spójrzmy teraz całościowo na rozwój matematyki w czasach antycznych. W czasach helleńskich rozwija się intensywnie filozofia i nauka grecka, przy czym geometria i arytmetyka stają się synonimem prawdziwej wiedzy, a więc nauki. Ma to miejsce od przełomu VII i VI wieku do końca IV wieku. Centralnym miastem, gdzie rozwijana jest nauka, stają się od piątego wieku Ateny. Grecy w dużej mierze korzystają z ogromnej wiedzy matematycznej wypracowanej przez Sumerów, Babilończyków, Chaldejczyków i Egipcjan. Często jeżdżą w te rejonie, aby zaczerpnąć z tych źródeł wiedzy. Jeszcze Eudoksos, największy matematyk tego okresu, kształci się w zakresie matematyki i astronomii w Heliopolis w Egipcie. Jest to w dużej mierze czas absorpcji przez Greków dokonań tamtej cywilizacji. Przez dłuższy czas Grecy stoją kulturowo i cywilizacyjnie niżej od ludów zamieszkującej te tereny. Jednak wnieśli do matematyki kilka istotnych elementów, co zaowocowało ogromnym jej postępem. Były to następujące metody oraz idee: metoda aksjomatyczno-dedukcyjna, wiara w siłę racjonalnego myślenia, analiza podstaw, na których oparte są dowody matematyczne, rozumowanie dialektyczne (metoda hipotetyczno-dedukcyjna), metody analogii czy *dynamis* (jako metody dowodzenia), idea symetrii, podobieństwa, harmonii, elementarności, inteligibilności rzeczywistości, intelektualnej rekonstrukcji zjawisk, związku kosmosu z mikrokosmosem. Matematyka poprzez dokonania Greków wchodzi na poziom wiedzy abstrakcyjnej, rozwijanej niezależnie od rzeczywistości materialnej i zastosowań. Po podbojach Aleksandra następuje synteza cywilizacji greckiej z cywilizacją Wschodu. Szczególne znaczenie ma to w przypadku matematyki, gdzie bardziej praktyczna nauka Wschodu łączy się z abstrakcyjną nauką Greków i powstaje technika naukowa i różne „matematyki" stosowane. W III wieku p.n.e. ma miejsce szczytowy rozwój matematyki i jej zastosowań. Od II wieku p.n.e. impet rozwojowy słabnie, spowodowany głównie czynnikami politycznymi. Rzymianie, którzy podbili państwa hellenistyczne, nie byli szczególnie zainteresowani rozwojem matematyki, jedynie jej zastosowaniami. Matematyka i inne nauki są jednak w Aleksandrii i w innych ośrodkach (raczej na wschodzie imperium rzymskiego) uprawiane, jednak nie ma znaczących osiągnięć, poza kilkoma epizodami (Heron, Diofantos, Pappus). W 476 roku n.e. upada cesarstwo zachodniorzymskie, po wcześniejszym podziale na część wschodnią i zachodnią. Już w 330 roku cesarz Konstantyn przenosi stolicę imperium do miasta Bizancjum, co jest wyraźnym dowodem słabości zachodniej części państwa. Zresztą cesarstwo wschodnie przetrwało jeszcze tysiąc lat i zostało ostatecznie zdobyte przez Turków dopiero w 1453 roku. Do upadku Bizancjum przyczyniły się w znacznym stopniu ciągłe wojny z napierającym islamem, z państwami Europy Zachodniej (wyprawy krzyżowe rujnujące chrześcijańskie państwo), Słowianami czy innymi ludami. Natomiast Rzym (zachodni) upadł w dużej mierze pod wpływem własnej zapaści cywilizacyjnej. Po wspaniałym okresie rozwoju na początku nowej ery, od początki III wieku zaczął chylić się ku upadkowi. Jedną z głównych przyczyn był spadek wykształcenia społeczeństwa rzymskiego, w tym jego elity. Do władzy dochodzą niepiśmienni cesarze, a poziom wykształcenia zrównuje się z poziomem atakujących Rzym plemion barbarzyńskich[36]. Nic dziwnego, że został przez nich podbity, a na gruzach imperium powstały barbarzyńskie państwa, stopniowo cywilizujące się. Trzeba zauważyć, że proces cywilizacyjny przebiegał

[36] J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, Y.V. Chebotyrevskiy, op. cit., s. 51–54.

w tych państwach bardzo powoli, przez kolejne wieki. O wyraźnym postępie w zakresie nauk matematycznych (w stosunku do czasów antycznych) możemy mówić dopiero na przełomie XVI i XVII wieku, a wyraźne przyspieszenie rozwoju nastąpiło dopiero w wieku XIX. Zresztą cały czas miało i ma miejsce odzyskiwanie i poznawanie dorobku starożytnych uczonych, na przykład poprzez prowadzenie wykopalisk w Aleksandrii i innych ośrodkach kultury i nauki antycznej. Ma miejsce odkrywanie pozostałości zaawansowanych urządzeń technicznych tamtego okresu[37]. Dzięki współczesnym wykopaliskom został odrzucony mit o braku zainteresowania uczonych hellenistycznych zastosowaniami technicznymi oraz nieistnieniu w tych czasach techniki naukowej opartej na teoriach matematycznych.

Po upadku Rzymu matematyka (i inne nauki) dalej jest uprawiana – w Bizancjum, w innych państwach pohellenistycznych, w państwach muzułmańskich oraz na Dalekim Wschodzie – w Chinach i w Indiach. Matematyka hellenistyczna – ostatniego okresu istnienia tej cywilizacji (a więc głównie trygonometria, sztuka mierzenia, astronomia) – wzbudziła w naturalny sposób (bo mieli z nią bezpośredni kontakt) zainteresowanie uczonych hinduskich i arabskich (a właściwie muzułmańskich pozaarabskich, z innych kręgów kulturowych), a następnie uczonych europejskich.

Neoplatończycy, działający w III wieku n.e. oraz później, powtarzając naukę Platona, ciągle jednak głosili potrzebę wstępnego oczyszczenia umysłu poprzez naukę matematyki. W tym okresie młodzież otrzymywała jednak wykształcenie wyłącznie literackie. Przykładowo, Proklos zaczął uczyć się matematyki dopiero po rozpoczęciu studiów filozoficznych, gdy dostrzegł jej konieczność do zrozumienia i rozwijania podstawowych kwestii filozofii platońskiej. Był on związany ze Szkołą Ateńską założoną w V wieku przez neoplatoników, uważających się za kontynuatorów Akademii Platona.

Matematyka była potrzebna nie tylko przy odczytywaniu teksów greckich filozofów, lecz stała u źródeł zastosowań technicznych. Świadomość ta nigdy do końca nie zaniknęła, nawet w końcowych wiekach starożytności. Ciągle korzystano z odkryć i wynalazków technicznych (architektura, urządzenia do nawigacji, akwedukty, fontanny, łaźnie, itp.), które powstawały głównie w okresie od Hipparcha do Herona i Ptolemeusza, a rozwijane wtedy astronomia, mechanika i optyka były uznawane za koronę nauk matematycznych.

Poczynając już od Arystotelesa i jego uczniów, rozwija się sztuka analizy i komentarzy dzieł naukowych, które mają również charakter badań histo-

[37] L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 88–91.

rycznych. Komentatorzy nawet jeśli nie wnosili nowych idei i rozwiązań do nauki, to jednak mieli istotne znaczenie dla jej późniejszego rozwoju. Przede wszystkim dzięki analizom oryginalnych prac i cytowania ich fragmentów przyczynili się do ich – przynajmniej częściowego – zachowania. Prace, do których mieli wówczas dostęp, w ogromnej mierze w późniejszym okresie zaginęły. Dzięki dziełom komentatorów mamy zachowaną ciągłość nauki. Ponadto w ich analizach ma miejsce próba ogarnięcia całości spuścizny naukowej i filozoficznej i doprowadzenia do naukowej syntezy najważniejszych dokonań. Ich pracy często towarzyszyły tłumaczenia oryginalnych dzieł na łacinę lub arabski, co przyczyniło się do szerszego udostępnienia wcześniejszych dokonań. Był to w wielu przypadkach impuls do uzupełniania niejasnych fragmentów, poszukiwania źródeł oraz rozwijania prezentowanych koncepcji. Przez wiele wieków (w średniowieczu i później) były to często jedyne wiadomości na temat dokonań uczonych starożytnych.

Jednym z ważniejszych historyków nauki był **Eudemos z Rodos**, uczeń Arystotelesa, żyjący na przełomie wieków IV i III p.n.e. Był autorem prac z historii geometrii, astronomii oraz teologii. Jego prace w dużej części zaginęły, jednak wielu uczonych starożytności z nich korzystało[38].

W badaniach historii nauki, jak i szerzej, w odkrywaniu tekstów starożytnych uczonych i ich poglądów, kluczową rolę odegrał uczeń Zenona z Kition – **Filodemos z Gadary** (ok. 110–39 p.n.e.). Był równie wszechstronny jak jego mistrz, zajmował się logiką, historią filozofii, etyką, teorią literatury i muzyki, był też poetą. Bardzo intensywnie szerzył w swoich pismach i licznych podróżach koncepcje epikurejskie. Swoje poglądy logiczne przedstawił w pracy *O sposobach znakowania*, napisał również biografię Epikura, polemikę z poglądami stoików oraz dzieje szkół filozoficznych. W roku 75 p.n.e. przybył do Herkulanum w Italii i w osobie rzymskiego arystokraty Lucjusza Kalpurniusza Pizona znalazł swojego ucznia i przyjaciela. Zamieszkał w jego willi, do której przeniósł pokaźny zbiór swoich papirusów. W 79 roku n.e. miał miejsce potężny wybuch Wezuwiusza, który zniszczył kilka miejscowości, w tym Herkulanum wraz z willą Pizona. Papirusy Filodemosa zostały pokryte grubą warstwą lawy i popiołu i w takim stanie znajdowały się aż do połowy XVIII wieku, kiedy je odnaleziono. Wśród nich były też prace Filodemosa (ok. 30 zwojów), w znacznym stopniu zniszczone. Współcześnie, przy wykorzystaniu nowoczesnej techniki, są stopniowo odczytywane. W 2001 roku ukazał się pierwszy tom[39], w kolejnych latach następne. Odzyskiwane

[38] Informacje biograficzne czerpię z: Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy…*.

[39] Philodemus: *On Poems, Book 1*, Oxford University Press, Oxford 2001.

papirusy zawierają w dużej mierze poglądy Zenona z Sydonu przedstawione przez Filodemosa. Są tam zawarte argumenty w obronie koncepcji epikurejskiej w polemice ze stoikami, jak również argumenty za tezą, że cała wiedza ludzka pochodzi z doświadczenia. Interesujący jest z naszego punktu widzenia odzyskany tekst, w którym opisane są dzieje Akademii Platona. Znajduje się w formie appendiksu w cytowanej już książce *Plato's Academy. Its Working and Its History*[40].

Jednym z najbardziej znanych komentatorów starożytności jest **Porfiriusz** (ok. 232–305 n.e.), najzdolniejszy uczeń Plotyna i redaktor jego dzieł. *Isagoga* Porfiriusza (będąca komentarzem do *Kategorii* Arystotelesa) stała się główną pracą z logiki wykorzystywaną w średniowieczu. Komentował również Euklidesa i napisał wiele prac z astronomii i muzyki. Podobnie jego uczeń, **Jamblich** (ok. 250–326), założyciel platońskiej szkoły syryjskiej, pisał liczne komentarze do Platona, Arystotelesa oraz badał życie, naukę i teologię Pitagorasa (*Zbiór nauk pitagorejskich*)[41].

Jak wspomniałem wcześniej, pod koniec starożytności nastąpiło odrodzenie Akademii oraz szkoły aleksandryjskiej. Miało to istotne znaczenie dla ocalenia wielu dzieł naukowych i filozoficznych, szczególnie tych związanych z filozofią platońską. Założycielem Szkoły Ateńskiej był Plutarch z Aten (ok. 350–432 n.e.), który kształtował Akademię w duchu neoplatońskim. Znany jest z licznych komentarzy do Platona, Arystotelesa, Parmenidesa i Gorgiasza. W ogromnej większości prace te zaginęły. Jego następcą w Akademii był Syrian, który objął funkcję kierownika po śmierci mistrza w 432 roku. Pisał również liczne komentarze, które miały duże oddziaływanie filozoficzne i kulturowe. Szczególnie warto wspomnieć o komentarzu do *Metafizyki* Arystotelesa (który częściowo przetrwał do naszych czasów) i zaginionych komentarzach do *Timajosa*, *Parmenidesa* i *Państwa* Platona czy do wielu pism logicznych i przyrodniczych Arystotelesa. Bronił platońskiego rozumienia matematyki w opozycji do koncepcji Arystotelesa[42].

Na stanowisku kierownika szkoły Syriana zastąpił Proklos z Konstantynopola (ok. 410–485) (był jego uczniem oraz uczniem Plutarcha), i prowadził tę placówkę aż do swojej śmierci. Rozwijał filozofię neoplatońską (to za jego pośrednictwem średniowiecze otrzymało wiedzę na temat filozofii platońskiej), badał również historię greckiej geometrii i chyba jako ostatni posiadał *Historię geometrii* Eudemosa. W swoim komentarzu do *Elementów*

---

40 *Appendix. Philodemus' History of the Philosophers,* [w:] *Plato's Academy*, s. 276–383.

41 G. Reale, *Historia filozofii starożytnej. Szkoły epoki cesarstwa*, tłum. E.I. Zieliński, t. 4, Wydawnictwo KUL, Lublin 1999, s. 625–638.

42 G. Reale, *Historia filozofii starożytnej*, t. 4, s. 656–660.

zamieścił obszerne streszczenie tej pracy, które jest istotnym źródłem na temat wczesnej greckiej matematyki. Ten komentarz ma również duże znaczenie dla recepcji Euklidesa. Proklos bada podstawy geometrii, przyjęte przez Euklidesa aksjomaty i postulaty, i sprawdza, czy piątego postulatu – o równoległych – nie da się wywieźć z pozostałych. Zamieszcza tam również ważne dla rozwoju nauki nowożytnej tzw. twierdzenie Kopernika: jeśli okrąg toczy się bez poślizgu we wnętrzu okręgu o dwa razy większym promieniu, to dowolny punkt na mniejszym okręgu porusza się po średnicy dużego. Przypisuje mu się również następujące twierdzenie: jeśli odcinek przesuwa się tak, że jego końce są stale na pewnych dwóch przecinających się prostych, to dowolny wewnętrzny punkt tego odcinka zakreśli fragment elipsy. Pisał liczne komentarze do dzieł Platona (do *Kratyla*, *Parmenidesa*, *Państwa*, *Timajosa*, *Alcybiadesa*), Arystotelesa, oraz traktaty filozoficzne dotyczące wszystkich ówczesnych dziedzin wiedzy. Napisał wiele prac, z których około dwie trzecie zaginęło. Dążył do syntezy różnych obszarów wiedzy. Podobnie w przypadku religii pogańskich dążył do ich połączenia i uzgodnienia z teologią pitagorejczyków i Platona. Była to summa teologii pogańskiej, mająca ukazać jej wyższość nad chrześcijaństwem. Był autorem koncepcji, że do prawdy prowadzą trzy drogi: naukowa, mityczna i religijna, wykorzystujące odpowiednio rozum, wyobraźnię oraz mistyczne zjednoczenie z Absolutem. Rozum, dostrzegając sprzeczności w poznaniu zmysłowym, kieruje do wyższych rodzajów poznania[43]. Następcą Proklosa zostaje Marinos z Neapolis (Samaria) (ok. 440–po 486), autor zachowanego komentarza do dzieła Euklidesa *Dane,* biografii swojego mistrza Proklosa oraz zaginionego komentarza do *Parmenidesa* Platona[44]. Ostatni scholarcha Szkoły Ateńskiej, Damascjusz z Damaszku (ok. 462–po 538), przeżył jej zamknięcie w 529 roku. Jak w przypadku innych uczonych, jego prace w większości zaginęły. W całości przetrwał komentarz do *Parmenidesa*, traktat *O pierwszych zasadach* oraz fragmenty komentarzy do *Fedona* i *Fileba*[45].

Dzięki Ammoniuszowi (ok. 435–po 515), uczniowi Proklosa, w szkole aleksandryjskiej przyjęła się metoda komentowania jako klucza w dochodzeniu do prawdy. Pod koniec V wieku zaczął kierować tą szkołą i miał wielu uczniów, a wśród nich: Damascjusza, Symplicjusza, Jana Filipona oraz Eutocjusza. Z jego licznych komentarzy zachowały się jedynie komentarze do *O interpretacji* Arystotelesa i *Isagogi* Porfiriusza. Już tylko częściowo przetrwały komentarze do *Kategorii*, *Analityk pierwszych*, *O niebie* oraz *Fedona*.

43 T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 2, s. 529–537.

44 Ibidem, s. 537–538.

45 G. Reale, *Historia filozofii starożytnej*, t. 4, s.. 677–685.

Niektóre komentarze jego uczniów oparte są na zaginionych później pracach mistrza, np. *Komentarz do „Metafizyki"* czy do *Komentarz do „Wprowadzenia do matematyki" Nikomacha*. Istotnym elementem studiów były prace nad dziełami Arystotelesa wg ustalonego schematu, w którym rozpoczynano od prac logicznych, aby następnie przejść do etyki, fizyki, matematyki i metafizyki. Ten schemat w dużej mierze się utrwalił. Chodziło też o umiejętność dostrzeżenia i uzasadnienia spójności dzieł Arystotelesa i Platona oraz zgodności między ich systemami[46].

Eutocjusz z Askelon (ok. 480–540) został następcą Ammoniusza. Napisał komentarze do prac Archimedesa (*O kuli i walcu, O kwadraturze koła, O równowadze, O pomiarze koła*), do Apoloniusza (zachowały się komentarze do pierwszych czterech ksiąg *Stożkowej*) oraz do pierwszej księgi *Almagestu* Ptolemeusza. Prace Eutocjusza mają ogromne znaczenie dla badań historii matematyki. Dzięki niemu ocalało wiele wyników autorów, których oryginalne prace zaginęły. Jego komentarze miały nieco inny charakter. Nie komentował kolejnych fragmentów prac, lecz analizował je pod kątem badanych problemów, przywołując różnych autorów. Badał przykładowo zagadnienie podwojenia sześcianu czy znalezienie dwóch średnich proporcjonalnych i wskazywał na propozycje rozwiązań u Platona, Menaichmosa, Archytasa, Filona z Bizancjum, Nikomedesa, Eratostenesa, Dioklesa, Herona i Pappusa. Odkrył również rozwiązanie równania sześciennego $(a-x)x^2 = bc^2$ przy pomocy krzywych stożkowych (uzupełnił brakujące rozwiązanie problemu postawione przez Archimedesa w *Kuli i walcu*)[47].

Kolejnym wybitnym komentatorem był filozof bizantyjski Symplicjusz z Cylicji (ok. 490–560), który swoją edukację zdobył w Aleksandrii u Ammoniusza. Był też uczniem Damascjusza, w jego więc osobie mamy kontynuację idei Akademii. Był autorem licznych komentarzy do Arystotelesa (*Kategorie*, *Fizyka*, *O niebie*), Euklidesa (zachował się tylko w części) oraz Platona (*Fedon* nie zachował się). Próbował stworzyć syntezę filozofii Platona i Arystotelesa. Prowadził też pogańską (w duchu neoplatońskim) polemikę z ideami chrześcijańskimi. Kiedy jednak cesarz Justynian podjął decyzję o zamknięciu w 529 roku szkoły (w ramach zamknięcia wszystkich szkół pogańskich), życie filozoficzne Akademii zamarło. *De facto* za koniec tej instytucji można uznać moment śmierci Symplicjusza w 560 roku.

Komentując *Kategorie* Arystotelesa, Symplicjusz przywołuje całą historię komentarzy do tego dzieła (w tym Porfiriusza, Aleksandra z Afrodyzji, Archytasa, Jamblicha). Mamy tu do czynienia z kompleksowym ujęciem za-

---

[46] Źródło: https://plato.stanford.edu/entries/ammonius/ [stan z 25.05.2021].
[47] Ibidem, s. 540–541.

gadnienia i pokazaniem, jak te komentarze pozwalają w pełni zrozumieć myśl Arystotelesa. Zawierają też liczne cytaty z analizowanych i przywoływanych prac i odnoszą się do całości poglądów danego filozofa. Wiele zaginionych dzieł zostało zrekonstruowanych dzięki pracom Symplicjusza.

Symplicjusz podejmuje też samodzielnie ważne kwestie filozoficzne. Próbuje rozwiązać paradoks związany z podziałem czasu na przeszłość, teraźniejszość i przyszłość (żadna z tych części *de facto* nie istnieje). Broni realności czasu, uzasadniając za Arystotelesem, że ma charakter ciągły, a podział jest jedynie konstrukcją umysłu. Uważa też, za Arystotelesem, że świat jest nieskończony i niezniszczalny. Natomiast nie zgadza się z poglądem Arystotelesa na temat miejsca. Według niego, miejsce nie jest granicą ciała, lecz obejmuje wszystkie jego części. Jest kategorią bytu (różną od kategorii ilości) organizującą jego strukturę. Kluczowe znaczenie ma odrzucenie Arystotelesowskiego wykluczenia matematyki z badania przyrody. Postuluje matematyzację fizyki i uważa, że istnieje naturalne przejście od fizyki do matematyki. Te uwagi znajdują się w komentarzu do *Fizyki* Arystotelesa[48].

Oczywiście, komentarze do greckich matematyków i filozofów nie ustają wraz z końcem czasów antycznych. Kolejna epoka, średniowiecze, przyjęła metodę komentarzy jako kluczowy element badań naukowych. Ta metoda wiązała się z uznaniem wartości wielkich uczonych greckich i hellenistycznych i prowadziła do prób kontynuowania i rozwijania ich dorobku. W dużej mierze przez wiele wieków było to odzyskiwanie tego dorobku i jego rozpowszechnianie.

Istotne znaczenie dla uratowania dorobku antycznego miały też komentarze i tłumaczenia dokonywane przez muzułmańskich uczonych. Najwybitniejsi z nich to, m.in.: Hunajn Ibn Ishak, Al-Kindi, Sabit Ibn Kurra, Hubajsz Ibn al-Hasan oraz Kusta Ibn Luka.

Pewne znaczenie dla ocalenia i przekazania dorobku matematycznego miała też nauka rzymska. Tutaj szczególną postacią jest Boecjusz (ok. 480–524 n.e.), jeden z najwybitniejszych uczonych rzymskich, działający pod koniec starożytności. Był filozofem, matematykiem oraz teologiem. Przetłumaczył z greki na łacinę wiele prac, w tym teksty Arystotelesa (głównie logiczne), Euklidesa (*Elementy*), Ptolemeusza, Archimedesa (mechanikę), prace Nikomacha, ponadto fragmenty teologiczne Platona i muzyczne pitagorejczyków. Boecjusz był mężem stanu, doradcą na dworze gotyckiego cesarza Rzymu, Teodoryka. Żyjąc w kończącej się cywilizacji, chciał ocalić podstawy wiedzy i przekazać kolejnym pokoleniom. Dlatego pisał podręczniki

[48] Ibidem, s. 538–540.

sztuk wyzwolonych. Napisał wprowadzenie do arytmetyki oraz do muzyki. Planował przetłumaczyć na łacinę całość dzieł Platona i Arystotelesa, i pokazać, że te dwa systemy filozoficzne dopełniają się i dopiero ujęte w całości mówią prawdę o świecie. Tragiczna śmierć (został ścięty) sprawiła, że tylko w niewielkim stopniu zrealizował ten projekt. Napisał jednak wiele komentarzy do tekstów starożytnych uczonych i filozofów, które stały się ważnym źródłem wiedzy dla ludzi średniowiecza. Najbardziej znane są komentarze do *Isagogi* Porfiriusza i do teksów logicznych Arystotelesa. Podobno pisał też komentarze do dzieł astronomicznych, które jednak nie przetrwały. Uznaje się śmierć Boecjusza za koniec nauki starożytnego Rzymu. W dziełach powstających na początku średniowiecza korzystano w dużym stopniu z tekstów Boecjusza, które jednak przekazywały naukę starożytnych w znacznie okrojonej formie, np. twierdzenia geometryczne podawane były bez dowodów. Interesowały go zasadniczo dwa aspekty matematyki: jej związek z filozofią oraz jako narzędzie pomiarów. I w tym też zakresie matematyka starożytnych była przekazana Europie Zachodniej w pierwszych wiekach średniowiecza[49].

Pod koniec istnienia starożytnego Rzymu działał jeszcze jeden matematyk rzymski, Wiktorinus, pracujący nad ulepszeniem kalendarza. Opracował teorię paschalin, w której skoordynował cykl księżycowy (19 lat) z cyklem słonecznym (28 lat), pozwalające na dokładne wyznaczanie terminu Wielkanocy[50].

7. Rozwój matematyki hellenistycznej w późniejszym okresie dziejów

Matematyka hellenistyczna nie upadła, mimo że różne czynniki, głównie polityczne, doprowadzały do niszczenia jej dorobku i blokowania rozwoju. Jeżeli warunki zewnętrzne na to pozwalały – znów się odradzała. Po likwidacji ośrodka w Aleksandrii i w Atenach uczeni przeważnie przenoszą się do Bizancjum, nowej stolicy Imperium Rzymskiego.

Już w roku 425 został założony uniwersytet w Konstantynopolu, jako uczelnia mająca korzenie hellenistyczne, jednak utworzona na potrzeby państwa chrześcijańskiego. Powoli zaczęli pojawiać się rodzimi uczeni. Najwybitniejszymi z nich na początku istnienia Bizancjum byli **Antemiusz z Tralles** (ok. 474–534) oraz **Izydor z Miletu** (ok. 442–537). Wznieśli oni w latach 537–562 monumentalny kościół Hagia Sophia (Kościół Mądrości

49 C.B. Boyer, U.C. Merzabach, *A History of Mathematics*, s. 171–172.

50 J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, Y. V. Chebotyrevskiy, *Od piramid do gwiazd,* s. 64.

Bożej) jako wizytówkę imperium bizantyjskiego. Było to już po upadku Rzymu (zachodniego) w 476 roku i wcześniejszym przeniesieniu stolicy cesarstwa do Bizancjum w 330 roku przez cesarza Konstantyna. Ogromną budowlę wieńczy wspaniała, wielka kopuła, której postawienie wymagało bardzo wymyślnej konstrukcji, a co za tym idzie – dużej wiedzy technicznej i matematycznej[51].

Konstruktorzy świątyni byli architektami i mechanikami, ale przede wszystkim matematykami, autorami komentarzy do dzieł Euklidesa, Archimedesa i Herona (który właśnie pisał prace o konstrukcji sklepień). Izydor, w ramach działalności matematycznej, wydał traktaty Archimedesa i Euklidesa oraz opatrzył je swoimi komentarzami. Obaj byli architektami stolicy i mieli udział w wielu pracach architektonicznych. Studia odbyli w Aleksandrii, a następnie nauczali geometrii. Antemiusz poza nauczaniem geometrii prowadził badania nad zwierciadłami zapalającymi. Kontynuował badania Herona nad maszynami parowymi, które również konstruował. Praca Antemiusza *O znaczących urządzeniach mechanicznych* znana była matematykowi arabskiemu Alhazenowi oraz Witelonowi. Tam właśnie Antemiusz opisuje tzw. płonące lustra oraz pokazuje (rozwiązuje postawiony wcześniej problem), jak sprawić, aby promień słońca przechodzący przez małą szczelinę padał o każdej porze dnia i roku w to samo miejsce[52].

Również w zachodniej części imperium rzymskiego, już po jego upadku, nie zanika całkowicie nauka. Działa wspomniany już Boecjusz. Jest doradcą cesarza Teodoryka, ostatnim uczonym rzymskim i pierwszym chrześcijańskim znającym naukę grecką. To właśnie z jego tłumaczeń (na łacinę) i komentarzy Europa Zachodnia przez wiele wieków zdobywa wiedzę o greckiej nauce i filozofii. Powstają pierwsze zakony (529 r. – zakon benedyktynów, a następnie w XII – cystersi, a w XIII – franciszkanie i dominikanie). Powstają

[51] Kościół był wielokrotnie atakowany przez ludzi i siły natury. Jeszcze w trakcie budowy w 558 roku miało miejsce trzęsienie ziemi, które doprowadziło do zawalenia kopuły. Jednak szybko ją odbudowano. Podobnie, gdy w czasie różnych zamieszek czy działań zbrojnych był podpalany, w krótkim czasie przywracano jego wspaniały wygląd. W 989 roku kopuła uległa znowu zniszczeniu podczas kolejnego silnego trzęsienia ziemi. Odbudował ją ormiański architekt Trdat. W czasie IV krucjaty w 1204 roku kościół był splądrowany i zbezczeszczony przez krzyżowców. Ostatnia msza odbyła się 28 maja 1453 roku, na krótko przed zdobyciem miasta przez Turków. Skłócone do tej pory odłamy chrześcijan (katolicy i prawosławni) wspólnie odprawili tę uroczystość. Było już jednak za późno. Istniejące od ponad tysiąc lat chrześcijańskie Cesarstwo Bizantyjskie przestało istnieć. Por. *Encyklopedia kultury bizantyńskiej*, Warszawa 2002, s. 190–95; D.M. Nicol, *Konstantyn XI ostatni cesarz Bizancjum*, Gdańsk 2004, s. 65.

[52] T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, t. 2, s. 541–543.

liczne szkoły przyklasztorne, w których najpierw uczono elementarnych wiadomości (w tym uprawy roli i sztuki różnych rzemiosł). Stopniowo podnosił się poziom cywilizacyjny ludów, które opanowały i zasiedliły tereny dawnego imperium rzymskiego (zachodniego). Niektóre z tych szkół przekształcają się z czasem w ośrodki naukowe (szkoła w Chartes czy w Oksfordzie) i uniwersytety (od przełomu XI i XII wieku).

Każda z przedstawionych poprzednio idei związanych z nauką ogólną powodowała pojawienie się nowych pomysłów matematycznych (które były realizowane jako swoista konkurencja dla logiki Arystotelesa, dialektyki Platona czy pitagorejskiej koncepcji ukazywania obecności matematyki w świecie materialnym) i przyczyniała się do znaczącego rozwoju matematyki. Poczynając od Archimedesa, Apoloniusza i jego następców, rozwijana jest matematyka ogólna. Okazała się ona syntezą koncepcji pitagorejskiej, demokrytejskiej, platońskiej i arystotelesowskiej, i ich dopełnieniem. Projekt nauki stworzony przez Arystotelesa i zorganizowany przez niego Likejon wyznaczyły w dużej mierze na kolejne wieki sposób organizowania badań naukowych i nauczania. Założony krótko po śmierci Arystotelesa Musejon w Aleksandrii utworzono na wzór szkoły Arystotelesa i można uznać go za kontynuację tej szkoły, chociaż sam Likejon jeszcze przez pewien czas istniał. Rozwijał się intensywnie przez pierwsze kilkadziesiąt lat, do 286 roku, za czasów pierwszych scholarchów (Arystotelesa, Teofrasta z Eresos i Stratona z Lampsaku). Późniejszy, już nie tak intensywny, rozwój został przerwany przez Sullę, który w 86 roku p.n.e. zdobył Ateny, zniszczył Akademię i również Likejon. Natomiast rękopisy Arystotelesa, jako cenną zdobycz wojenną, wywiózł do Rzymu i nakazał ich przetłumaczenie na łacinę. Ten epizod sprawił, że myśl Arystotelesa od początku oddziaływała znacząco na kulturę zachodnią.

Również inne naukowo-dydaktyczne ośrodki hellenistyczne, a także bizantyjskie, islamskie oraz zachodnioeuropejskie mają podobny sposób funkcjonowania. Arabowie, po powstaniu swojej religii (w 622 roku) i po podbiciu znacznych terenów na wschodzie, włączyli w obszar swojej religii i kultury osiągnięcia państw stojących na znacznie wyższym poziomie cywilizacyjnym (Persja, Chorasan, Syria, Mezopotamia, Egipt), gdzie tradycje naukowe były ogromne i nauka hellenistyczna (w tym badania matematyczne) ciągle była uprawiana. Od połowy VIII wieku trwał okres znaczącego rozwoju kultury i nauki w państwach islamskich, związany z otwarciem na kultury obce, tolerancją i dopuszczeniem uczonych do badań naukowych, a wręcz stworzeniem dla nich bardzo sprzyjających warunków. Powstają różne ośrodki naukowe, badawcze i edukacyjne związane z rozwojem nauk ścisłych, przyrodniczych i filozofii (nastąpiło wyraźne „przekroczenie" idei tkwiącej u powstania szkół muzułmańskich, jako czysto religijnych szkół badających Koran). Czytano, tłumaczono na arabski, analizowano i badano teksty głównie uczonych greckich i hellenistycznych. Język arabski stał się językiem nauki, w którym powstało wiele wybitnych dzieł z matematyki, astronomii, medycyny i innych nauk. Złoty okres rozwoju arabskiej nauki i filozofii to VIII i IX wiek, a upadek nastąpił po podbojach mongolskich w XII wieku, kiedy zostały zniszczone główne ośrodki naukowe wraz z księgozbiorami.

Przyjrzyjmy się teraz kilku najważniejszym islamskim ośrodkom naukowym. Jednym z nich stał się (na początku IX wieku) Merw w Chorasanie (Azja Środkowa) pod rządami kalifa al-Mamuna[53]. Innym ważnym ośrodkiem jest Harran, miasto mezopotamskie, położone we wschodniej części Azji Mniejszej, na skrzyżowaniu ważnych dróg, znane już w XIV wieku p.n.e. Tutaj właśnie, po zamknięciu Szkoły Ateńskiej, schroniła się grupa filozofów neoplatońskich, z Symplicjuszem na czele. Miasto to stanowiło centrum hellenizmu jeszcze przez kilka wieków. To centrum naukowe było naturalnym pomostem między antyczną Grecją a czasami islamu i wzorem uprawiania nauki dla budowanych przez Arabów ośrodków naukowych.

Wśród ośrodków islamskich kluczowe znaczenie miał Bagdad. To w nim powstał potężny ośrodek tłumaczeniowy i badawczy. Założony przez al-Mamuna (z rodu Abbasydów) w 830 roku w Bagdadzie „Dom Mądrości" (Bajt al-Hikma) stał się miejscem prowadzonych na ogromną skalę przekładów na język arabski dzieł greckich i hinduskich (głównie z matematyki, astronomii oraz medycyny), ale także miejscem edukacji oraz intensywnej twórczej pracy naukowej. Tam działał jeden z największych matematyków, pochodzący z Chorezmu[54], al-Chuwarizmi (ok. 780–850). Pochodził najprawdopodobniej z zaratustriańskiego rodu kapłańskiego (Zaratustra, perski prorok, założył swoją religię ok. 1000 roku p.n.e.).

Bagdad stał się stolicą kalifatu arabskiego i jednym z najpiękniejszych miast za rządów Abu Dżafara al-Mansura (budowany od roku 762 jako centrum polityczne i kulturalne). Natomiast kalif Harun ar-Raszid, rządzący

[53] Chorasan został opanowany przez muzułmanów w 651 roku. Miasto to zostało założone przez Aleksandra Macedońskiego jako Aleksandria Margiańska, a później po zburzeniu odbudowane przez Antiocha I Sotera i przemianowane na Antiochię Margiańską. Miasto Merw było jednym z centrów nauki i kultury aż do początków XIII wieku, kiedy to zostało zniszczone przez najazd Mongołów.

[54] Chorezm jest jednym z najstarszych ośrodków cywilizacji w Azji Środkowej (od III tysiąclecia p.n.e.). Jego znaczący rozwój datuje się od VIII wieku p.n.e., a szczególny okres rozkwitu to czas, ok. 300 lat, od momentu, gdy Aleksander Wielki opanowuje tę krainę w 328 roku p.n.e. Na początku VIII wieku dostaje się pod panowanie muzułmańskie.

w tym samym czasie, co Karol Wielki w Europie, postawił na naukę i zaczął gromadzić potężną bibliotekę. Warto wspomnieć, że wspólnym wrogiem obu władców było chrześcijańskie Cesarstwo Bizantyjskie. Jego następca udostępnił tę bibliotekę wszystkim uczonym ze świata islamu. Bajt al-Hikma była *de facto* islamską uczelnią wyższą, jedną z najważniejszych w ciągu miejsc naukowo-edukacyjnych, poczynając od Likejonu i Musejonu. Była tam nie tylko biblioteka (podzielona na działy tematyczne) i biuro tłumaczeń, ale również dział kopiowania (niezmiernie ważny dla zachowania dorobku nauki antycznej), obserwatorium astronomiczne i miejsce pracy badawczej (pielęgnowano szczególnie filozofię i nauki ścisłe). Podobnie jak Musejon, Bajt al-Hikma objęta była mecenatem państwowym, a książki zbierane, przeznaczone do kopiowania i tłumaczenia były wybierane przez specjalną grupę uczonych. Interesujący był sposób zdobywania księgozbioru, który pochodził w dużej mierze z Bizancjum. Al-Mamun, podpisując zawieszenie broni z władcą Cypru, zażądał od niego książek greckich, w zamian za pokój, natomiast cesarza bizantyjskiego prosił o możliwość zabrania wybranych dzieł. Wyboru dokonali uczeni muzułmańscy i książki przywieźli do Bagdadu.

Lata świetności tej uczelni przypadają na VIII i IX wiek, kiedy to liczba przechowywanych dzieł przekroczyła 400 tysięcy.

> W działalności przekładowej Bajt al-Hikma brali udział przedstawiciele wszystkich chyba nacji i religii wielkiego imperium Abbasydów – Arabowie, Persowie, Żydzi, Syryjczycy i Grecy, chrześcijanie rozmaitych obrządków i muzułmanie. W akademii tłumaczono z rozmaitych języków, ale główny korpus przekładów dokonywany był z języka greckiego[55].

Ostatecznie jej kres nastąpił w 1258 roku, kiedy wojska mongolskie zdobywają Bagdad i niszczą Dom Mądrości, wrzucając do rzeki Tygrys wszystkie zbiory biblioteki. Historia się powtarza, stało się podobnie jak z Biblioteką Aleksandryjską i innymi tego typu obiektami (instytucjami). Mimo tego, część dzieł przetrwała w kopiach i odpisach, które znalazły się w innych ośrodkach (również w Europie)[56].

W czasie rozkwitu kultury na Wschodzie (oraz w krajach Maghrebu i na Półwyspie Iberyjskim), w Europie Zachodniej mamy ciągle jeszcze okres barbarzyństwa, który nastąpił po upadku Rzymu i zaludnienia terenów dawnego imperium przez ludy znajdujące się na dużo niższym poziomie cywilizacyjnym. Jednak nawiązanie kontaktu z nauką hellenistyczną zaowocowało

---

[55] Por. M. Dziekan, *Działalność przekładowa w „Domu Mądrości"* (*Bajt al-Hikma*) *w Bagdadzie,* źródło: http://katedra.uksw.edu.pl/awicenna/bajt_al_hikma.pdf, s. 7 [stan z 24.04. 2021].

[56] Ibidem, s. 6.

powstaniem silnych ośrodków naukowych. Samo chrześcijaństwo stało się też ważnym czynnikiem zachowania i odzyskiwania dorobku nauki starożytnej. Z niektórych istniejących przy katedrach ośrodków edukacyjnych powstają uniwersytety jako wspólnota uczonych i studentów. Są to ośrodki naukowe, jak i edukacyjne, otwarte teoretycznie dla wszystkich (barierą mogły być potrzebne na studiowanie środki finansowe), pozwalające zdobyć nie tylko wiedzę na odpowiednim poziomie, ale również uzyskać stopnie naukowe, dające stosunkowo wysokie miejsce w hierarchii społecznej. Edukacja uniwersytecka otwierała więc drogę awansu społecznego, rozszczelniając istniejący system podziału społecznego na klasy i warstwy. Doprowadziła do powstania nowego stanu społecznego – stanu uczonych, opartego o budowaną hierarchię akademicką. Ten fakt miał kolosalne znaczenie dla rozwoju nauki i zmian społecznych, które dokonały się w kolejnych wiekach.

Idea uniwersytetu nawiązywała do pomysłów budowy ośrodków naukowych w poprzednich okresach, wnosiła jednak istotne *novum*, a były nim: autonomia uniwersytetu wobec władz państwowych, jak i kościelnych (uniwersytety stanowiły tak zwaną trzecią władzę w czasach średniowiecznych), charakterystyczne, wydzielone i odpowiednio zorganizowane miejsce (campus) oraz wewnętrzne prawo obowiązujące na terenie campusu (miejsce eksterytorialne). Nie mniej ważny był sposób działania uczelni, polegający ma budowaniu wspomnianej wspólnoty uczonych i studentów, zdobywaniu kolejnych stopni naukowych, organizacji nauczania i metody prowadzenia prac edukacyjnych i naukowych (metoda scholastyczna polegała na komentowaniu i rozwijaniu myśli wybitnych uczonych, głównie starożytnych).

Uniwersytety cechowały się „uniwersalnością", co oznaczało, że w ramach badań uniwersyteckich wszystkie obszary badań były dozwolone, nauka była dostępna dla wszystkich, a podstawą nauczania były tak zwane sztuki wyzwolone (nazwa nie była przypadkowa) oraz filozofia. Do dyscyplin uniwersyteckich zostały włączone prawo, medycyna oraz teologia jako ukoronowanie kolejnych szczebli edukacji. Jedność dyscyplin naukowych zapewniała, przynajmniej na początku, logika. Była istotną podstawą wszystkich nauk. Scholastycy doprowadzili do perfekcji logikę Arystotelesa i stoików, działali jednak w ramach arystotelesowskiego projektu nauki, co uniemożliwiło dalszy jej rozwój. Dopiero wejście mocniejsze matematyki w czasach nowożytnych ukazało pełniej uniwersalny charakter nauki uniwersyteckiej.

Poczynając od XII wieku, powstają w Europie kolejne uczelnie, a miasta, będące ich ośrodkami, stają się centrami nauki i kultury. Widzimy wyraźną analogię do okresu hellenistycznego, z jedną wszak kluczową różnicą. Tam uczelnie powstawały jako miejsca tworzenia syntezy greckiej i wschodniej kultury i nauki oraz ich rozwijania przez elity tych krajów. W średniowiecznej Europie natomiast uniwersytety były narzędziem podnoszenia poziomu cywilizacyjnego i budowania nowych elit oraz otwierania możliwości awansu społecznego. Trzeba zauważyć, że okres rozwoju i rozkwitu idei uniwersytetu zaowocował powstaniem wielu nowych idei i teorii, w tym matematycznych. Istotny był kontakt z tekstami uczonych antycznych, ich zdobywanie, „odzyskiwanie", powolne przyswajanie treści i rozwijanie. Dzieła greckie były zdobywane poprzez kontakt z Arabami lub (w późniejszym okresie) z Bizancjum. Pod koniec średniowiecza (i w renesansie) popularne stały się wyprawy handlowo-naukowe do Bizancjum w celu zdobycia greckich papirusów czy pergaminów.

Wraz z powstawaniem uniwersytetów również matematyka zaczęła stopniowo zdobywać uznanie w państwach Europy Zachodniej. Szersza wiedza matematyczna była zdobywana poprzez pisma arabskie i bizantyjskie. Przeszkodą była jednak słaba znajomość arabskiego i greki oraz duża przepaść cywilizacyjna[57] Europy w stosunku do tamtych kultur. Wprawdzie Karol Wielki (sam niepiśmienny, władający na przełomie VIII i IX wieku twórca imperium zachodnioeuropejskiego) próbował podnieść poziom wykształcenia w swoim państwie poprzez wiele inicjatyw edukacyjnych i naukowych (powstanie Szkoły Pałacowej, powołanie centrum naukowego we Frankfurcie, pomysł powszechnego kształcenia wszystkich warstw społeczeństwa), jednak z powodu małej liczby uczonych zrealizował te ambitne pomysły tylko w małym stopniu. W tym okresie (przed XII wiekiem) można wskazać w Europie Zachodniej niewielu matematyków. Jednym z nich był żyjący na przełomie VIII i IX wieku słynny **Alkuin** (735–804), twórca reformy nauczania w państwie Karola Wielkiego (pisał podręczniki z arytmetyki, geometrii i astronomii dla początkujących) i zarazem jeden z konstruktorów odrodzenia karolińskiego. Kolejnym był **Gerbert** (ok. 945–1003, w latach 999–1003 był papieżem Sylwestrem II), który pierwszy zaczął w Europie używać numeracji hinduskiej (umieszczone na desce rachunkowej, abaku, żetony, zwane apeksami, numerował oznaczeniami zbliżonymi do tych cyfr), chociaż musiało upłynąć jeszcze kilka wieków, zanim ta numeracja została uznana za przydatną w liczeniu i upowszechniona. W latach 972–982 kiero-

57 Matematyka w pierwszym okresie średniowiecza, poczynając od VIII wieku, była intensywnie rozwijana przez matematyków hinduskich i arabskich. Zajmowali się oni głównie algebrą i astronomią, jednak nie wszystkie najważniejsze idee matematyki antycznej były przez nich rozwijane. Wystarczy wspomnieć o tak wielkich matematykach arabskich, jak: al-Chuwarizmi, żyjący na przełomie VIII i IX wieku, czy Omar Chajjam (1048–1131).

wał szkołą katedralną w Reims, gdzie wykładał matematykę, logikę i filozofię. Jest autorem wielu prac, w których przybliżał dzieła Boecjusza i *Elementy* Euklidesa[58]. Na przełomie XII i XIII wieku następuje już znaczący rozwój nauki, przede wszystkim logiki, ale również matematyki. Rozwój ten osiąga swoje apogeum w XIV wieku i zostaje przerwany przez epidemię dżumy w połowie tego stulecia.

Istnieje kilka mitów związanych z powstaniem i rozwojem matematyki oraz, szerzej, nauki i metody naukowej. Bardzo powszechny jest ten, który głosi, że nauka narodziła się w czasach nowożytnych w pracach Kopernika, Galileusza, Kartezjusza, Keplera i Newtona (służy temu też pojęcie rewolucji naukowej), a to, co działo się wcześniej, to jedynie jakieś nieśmiałe przepowiadanie nauki nowożytnej. Dyskredytuje się nie tylko naukę średniowieczną, ale również tę z czasów greckich i hellenistycznych. Rzeczywiście, uczeni nowożytni wnieśli istotne *novum* do nauki, o którym powiem w kolejnym rozdziale, jednak w dużej mierze występowało nawiązanie do nauki antycznej (i częściowo średniowiecznej) oraz kontynuacja najważniejszych idei i teorii naukowych uczonych greckich.

Jak można zauważyć, w Europie[59] dochodziło do kilkukrotnego ożywienia naukowego, kiedy nawiązywano relację z nauką antyczną. Można za każdym razem w takich przypadkach mówić o europejskich renesansach. Wspominałem o dwóch takich „ożywieniach" naukowych, mających miejsce jeszcze w czasach starożytnych: okres cesarski (I–II wiek n.e.) oraz na pograniczu starożytności i średniowiecza (V i VI wiek). Ten drugi jest czasem działalności Boecjusza, ale również uczonych bizantyjskich. Jeden z ważniejszych renesansów wystąpił w czasach islamskich, poczynając od VIII wieku, związany z tłumaczeniem na język arabski traktatów hellenistycznych oraz rozwijaniem idei algebraicznych, optycznych (teoria zwierciadeł) oraz astronomicznych (i innych). Ten okres trwał do przełomu XII i XIII wieku, do czasu zniszczeń dokonanych przez najazdy mongolskie. Zgodnie z badaniami przywoływanymi przez L. Russo, wzrost zainteresowań matematyką

---

58 A.P. Juszkiewicz, *Matematyka w wiekach średnich,* s. 318–312.

59 Jest podstawowy problem związany z tym, jak rozumieć pojęcie „Europa" w sensie naukowym i kulturowym. Najbardziej naturalne wydaje się odniesienie do podstawy geograficznej i politycznej – do imperium zachodniorzymskiego i jego spadkobierców w Europie Zachodniej i Centralnej (oraz na innych kontynentach, które znalazły się pod wpływem politycznym i kulturowym Europy). Nauka europejska są to więc te idee, które rodziły się w tym kręgu politycznym. Jednak bez nawiązania do tradycji greckiej i – szerzej – antycznej ten rozwój byłby, tak naprawdę, niemożliwy. Nawet nowe idee znajdują swoje odniesienie do tekstów uczonych starożytnych.

hellenistyczną jest ściśle związany z rozwojem aktywności technicznej i przemysłowej. Z samą geometrią związane są takie nauki, jak: geodezja, nauka o przyrządach pomiarowych, o soczewkach i zwierciadłach, o automatach, o rurociągach wodnych i inne. I takie ożywienie gospodarcze w krajach, w których do matematyki nawiązywano, miało miejsce[60].

Natomiast od XII wieku rozpoczyna się „odrodzenie" naukowe w Europie Zachodniej (chociaż lepszym byłoby określenie, że w tym okresie dopiero pojawia się większe zainteresowanie matematyką i innymi naukami). Wiąże się to z szerszymi kontaktami handlowymi z kupcami arabskimi, ze zdobyciem Półwyspu Iberyjskiego i Sycylii, które wcześniej były w rękach muzułmańskich i gdzie znajdowały się ośrodki naukowe z bibliotekami (np. Toledo, Kordoba), ze zdobyciem na pewien czas części Bizancjum z licznymi hellenistycznymi rękopisami oraz z późniejszymi kontaktami z tym rejonem[61].

Kiedy w 1085 zdobyto Toledo (z rąk arabskich), w krótkim czasie powstała tam szkoła tłumaczy dzieł arabskich, greckich i innych na łacinę lub hiszpański. Tłumaczono głównie arabskie dzieła astronomiczne i zebrano je w tak zwaną *Księgę wiedzy astronomicznej*. Natomiast angielski uczony **Adelhard z Bath** (1090–1160) przetłumaczył na łacinę *Elementy* Euklidesa oraz tablice astronomiczne al-Chuwarizmiego (z wykładem trygonometrii) i traktat arytmetyczny (gdzie znajdował się nowy system liczbowy), a jego rodak Robert z Chester – traktat algebraiczny islamskiego uczonego. Adelhard był też autorem samodzielnego dzieła arytmetycznego *Reguły abaka,* w którym znacząco korzystał ze zdobytej literatury.

Ważną postacią dla rozwoju matematyki był żydowski uczony **Abraham bar Hiyya** (ok. 1070–1136), zwany Savasordą. Był autorem kilku dzieł matematycznych i astronomicznych, w tym ważnej pracy *Księga o pomiarach* (elementy geometrii praktycznej oraz algebry). Stała się ona ważnym punktem odniesienia dla największego matematyka tego okresu **Leonarda z Pizy** (1180–1240). Jego najważniejszym dziełem była napisana w 1202 roku *Księga abaku* (składająca się z piętnastu ksiąg). Kluczowa i całkiem oryginalna jest księga XII, w której przedstawia zadania na sumowanie postępów arytmetycznego i geometrycznego, a przede wszystkim umieszcza swój słynny ciąg Fibonacciego w zadaniu o królikach (ile par królików zrodzi się w ciągu roku z jednej pary, jeśli co miesiąc rodzi się kolejna para, która już po miesiącu też co miesiąc rodzi kolejne pary królików). Jest to ciąg rekuren-

60 L. Russo, *Zapomniana rewolucja,* s. 354.

61 W czasie IV wyprawy krzyżowej w 1204 roku zostało utworzone Cesarstwo Łacińskie ze stolicą w Konstantynopolu. Istniało do 1261, kiedy wróciło w granice Cesarstwa Bizantyjskiego.

cyjny, w którym każdy wyraz (od trzeciego) jest sumą dwóch poprzednich, tzn. $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. W przypadku tego zadania mamy: $1 + 1 + 2 + 3 + + 5 + 8 + \cdots + 144 = 376$.

Najwybitniejszym tłumaczem epoki był **Gerard z Cremony** (1114–1187), który przetłumaczył z arabskiego na łacinę około dziewięćdziesiąt prac, w tym Euklidesa (*Elementy* i *Dane*), *Stożkowe* Apoloniusza, *Mierzenie koła* Archimedesa, *Almagest* Ptolemeusza, prace Teodozjusza i Menelaosa, *Algebrę* al-Chuwarizmiego. Również **Wilhelm z Moerbeke** (ok. 1215–1286) prowadził intensywną pracę translatorską dzieł Arystotelesa, Proklosa, Archimedesa i Herona. Do ich rozpowszechnienia przyczyniło się wynalezienie druku w połowie XV wieku, a drukowano je jeszcze w XVII wieku[62].

Mimo tych cennych inicjatyw wiele prac uczonych starożytnych i arabskich zaginęło lub uległo rozproszeniu, szczególnie w burzliwym okresie, który rozpoczął się w Europie Zachodniej od XIV wieku (liczne epidemie, wojny). Szczególnym wstrząsem, który wstrzymał rozwój nauki w Europie, była wielka epidemia dżumy, która trwała w latach 1347–1352 i dotknęła głównie południowo-zachodnie rejony kontynentu (w znacznie mniejszym stopniu Europę Centralną). Zmarło około $\frac{1}{3}$ ludności tych obszarów, w tym wielu uczonych (na zarazę umiera m.in. Thomas Bradwardine). Na pewien czas zanika ciągłość przekazu wiedzy – w relacjach i pracach uczonych XV i XVI wieku trochę wygląda to tak, jak gdyby nauka zaczynała się od początku. Wyraźne i twórcze nawiązanie do osiągnięć uczonych XIV wieku ma miejsce dopiero w pierwszej połowie wieku XVII.

Mimo przeszkód powstawały ciągle kolejne trwałe ośrodki zainteresowane odzyskiwaniem nauki antycznej. Do najważniejszych należały Oksford i Paryż, gdzie zgromadzono pokaźne zbiory prac naukowych uczonych starożytnych (prace w językach greckim, arabskim oraz hebrajskim), ale też inne ośrodki uniwersyteckie. To właśnie w Oksfordzie działają Robert z Grosseteste i Roger Bacon, gorący zwolennicy nauk matematycznych, zachwycający się dorobkiem starożytnych w zakresie optyki, mechaniki i innych osiągnięć nauk matematycznych. Od XIII wieku są rozpowszechniane w Europie zegary mechaniczne oparte na reduktorach (znane i opisywane przez Herona w jego *Mechanice* i wykorzystywane do konstrukcji hellenistycznych planetariów i chińskich zegarów astronomicznych) oraz pojawiają się tablice astronomiczne wykorzystywane przez Hiszpanię i Portugalię do sporządzania w miarę precyzyjnych map, niezbędnych do morskich podróży. Przyspieszenie odrodzenia nastąpiło w XV wieku, krótko przed i po

[62] A.P. Juszkiewicz, *Matematyka w wiekach średnich,* s. 319–324.

upadku Bizancjum, gdy liczne grupy przywożą do Włoch rękopisy hellenistyczne. Był to dochodowy interes wobec wzrostu w Europie zainteresowania dorobkiem greckich uczonych i artystów. Słynny Giovanni Aurispa (kupiec i uczony) przywozi w 1423 rok aż 238 rękopisów[63]. Znane z dzieł Leonarda da Vinci (1452–1519) opisy fantastycznych maszyn pochodzą głównie z prac Herona oraz Filona z Bizancjum (przekładnie redukcyjne, fontanny Herona, młoty mechaniczne, łodzie napędzane kołami, piły wodne, łożyska kulkowe, maszyna parowa). Proponowane urządzenia ewidentnie przekraczały możliwości techniczne epoki i przez pewien czas traktowane były jedynie jako ciekawostki.

Jednym z fenomenów rozwoju nauki (w tym głównie matematyki) w czasach nowożytnych jest zależność tego rozwoju od odzyskiwania kolejnych dzieł matematyków greckich z czasów antycznych, czy od udostępniania dzieł antycznych szerszemu ogółowi poprzez ich tłumaczenie na łacinę oraz języki nowożytne. To odzyskiwanie i udostępnianie kolejnych dzieł wiązało się wręcz z przyspieszeniem cywilizacyjnym. Istotne było szersze udostępnienie wiedzy starożytnych, co wiązało się głównie z wynalezieniem druku w XV wieku, ale nie tylko. A oto kilka przykładów.

W 1260 roku ukazuje się kolejny przekład *Elementów* Euklidesa (wraz z księgami XIV i XV, których autorem, jak wiemy, nie był Euklides, oraz z komentarzami) na łacinę. Autor tłumaczenia Giovanni Campana zainteresował się pod wpływem lektury wielkościami ciągłymi oraz kątami rogokształtnymi. Zauważa, że mimo, iż kąt styczności między okręgiem i styczną jest mniejszy od dowolnego kąta prostoliniowego (jak dowodzi Euklides), to nie jest on wielkością zerową. Inni uważali inaczej, że jest równy zero albo że nie jest w ogóle wielkością. Spór nie został rozstrzygnięty, taki bowiem kąt jest przykładem wielkości niearchimedesowej („nieskończenie małej").

W 1406 roku Jacopo Angelo tłumaczy na łacinę *Geografię* Ptolemeusza (wychodzi drukiem w 1477). Zostaje na nowo odkryta geografia matematyczna, do rozwoju której kolejny impuls dało odnalezienie w XVI wieku dzieła Eratostenesa *Geographica*. Tłumaczony jest też na łacinę i wydawany wielokrotnie (pierwsze wydania w 1496) *Almagest* Ptolemeusza. Od XIII wieku wychodzą też kolejne dzieła Archimedesa, a w latach 1490–1551 wszystkie jego znane dzieła wraz z komentarzem Eutocjusza (w 1554 ukazuje się grecko-łacińskie wydanie jego dzieł). Wydano też *Stożkowe* Apoloniusza (1537 i 1566), *Zbiór* Pappusa (1588) i *Arytmetykę* Diofanata (1532–1576).

[63] L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 355–360.

Sam Kopernik, przychylając się do policentrycznej teorii grawitacji, nawiązuje do Arystarcha i Plutarcha (ich dzieła też były w tym czasie już dostępne). Jak wiadomo, Arystarch był twórcą koncepcji heliocentrycznej, natomiast Plutarch w swoich *Moraliach* w sposób literacki prezentował idee antycznego matematyka. Budując koncepcję heliocentryczną, Kopernik zrekonstruował matematyczną astronomię Ptolemeusza, dokonując ważnych korekt i formułując algorytm służący do obliczania położeń planet (pojawiło się też uproszczenie warstwy matematycznej).

> W rzeczywistości owa „rekonstrukcja” wcale nie była banalna, w *Almageście* bowiem nie zamieszczono wskazówek, jak opracować algorytm, którego stosowanie opisano i w którym zresztą trzeba było zmienić pewne parametry, aby uwzględnić błędy i zmiany, jakie nagromadziły się w ciągu czternastu poprzednich stuleci[64].

Z tego wynika, że między modelem matematycznym Ptolemeusza a Kopernika istnieje ciągłość, natomiast zmiana paradygmatu, o której pisze T. Kuhn w swojej *Strukturze rewolucji naukowej*, dotyczy obrazu świata, jaki ukształtował się w oparciu o model ptolemejski. Uczeni hellenistyczni opisywali nowe ciała niebieskie zgodnie z modelem geocentrycznym, jednak ukształtowany obraz statycznego świata (arystotelesowsko-ptolemejski) ignorował takie obserwacje i tłumaczył te zjawiska w sposób pozanaukowy (na przykład religijny). Nie było więc sporu między nauką Ptolemeusza a Kopernika, lecz między kulturowym obrazem świata ukształtowanym przez wieki w oparciu o model ptolemejski oraz o arystotelesowski system filozofii przyrody, jak również wierzenia religijne. Jednak w konsekwencji przyjęcia heliocentryzmu Kopernika, poprzez oddziaływanie kulturowe, nastąpiła zmiana obrazu świata, którego centralnym elementem stało się przyjęcie tego samego charakteru zjawisk ziemskich, jak i astronomicznych, oraz ogromu i dynamiczności wszechświata. Ziemia przestała być przytulnym domem w stosunkowo małym świecie, lecz stała się jednym z wielu ciał niebieskich „zagubionym” w niezmierzonych przestworzach Kosmosu.

Optyka była jedną z najwcześniej rozwiniętych teorii matematycznych w czasach hellenistycznych (oczywiście poza kanonem czterech teorii: arytmetyki, geometrii, astronomii i harmonii muzycznej). Była to w dużym stopniu nauka o widzeniu (teoria perspektywy), ważna dla właściwego urządzania scen w teatrach, w architekturze, rzeźbie czy w malarstwie, aby stworzyć iluzję głębi i perspektywę przestrzenną. Była też kluczowym przygotowaniem do astronomii (kwestia pozornej wielkości Słońca i innych ciał niebieskich). Wiązała się z geometrią (bada rozchodzące się prostoliniowo pro-

---

[64] L. Russo, *Zapomniana rewolucja*, s. 363

mienie: wzrokowe, świetlne), jednak wprowadza inne kryterium odpowiedniości – nie między kreślonymi liniami przez liniał i liniami geometrycznymi, lecz między różnymi kierunkami spojrzenia i liniami geometrycznymi. Rozszerza się tym samym zakres możliwości technicznych geometrii. W oparciu o optykę starożytni rozwijali katoptrykę, czyli technikę sporządzania różnorodnych luster, w tym wspominanych już luster zapalających (poprzez skupienie równoległych promieni słonecznych w jednym punkcie – ognisku paraboli). Zakłada się, że starożytni rozwinęli naukę o prawach rozchodzenia się światła, lecz niewiele wnieśli do teorii załamania i rozproszenia światła przy przechodzeniu przez różne ośrodki. Nie przetrwały do naszych czasów dzieła starożytne na ten temat. Jednak Roger Bacon w swoim *Opus Maius* zachwyca się umiejętnościami starożytnych powiększania i przybliżania odległych przedmiotów przy pomocy odpowiednio dobranego systemu soczewek i luster. Również o zjawisku załamania, ważnym przy budowie urządzeń powiększających, pisał Robert Grosseteste, nauczyciel Bacona, w dziele *De iride*. Obaj przypisują teorię załamania światła i teorię budowy odpowiednich urządzeń Arystotelesowi. Wygląda na to, że takimi pracami starożytnych dysponowali, które jakiś czas potem zaginęły[65].

W pracach Galileusza pojawia się zadanie odzyskania metody analityczno-dedukcyjnej stosowanej przez starożytnych i zbudowania nowej nauki zgodnie z tą metodą. Jest tu wyraźny zachwyt nad dokonaniami Archimedesa i polemika z fizyką Arystotelesa.

> W istocie Galileuszowi udało się przejąć od swoich dalekich mistrzów zarówno ideę metody eksperymentalnej, jak i naoczno-dowodowej. Brak mu jeszcze umiejętności panowania nad najbardziej wyrafinowanymi hellenistycznymi instrumentami matematycznymi. Albowiem potrafi on wprawdzie posługiwać się euklidejskimi technikami dowodzenia i algebrą geometryczną, lecz nie rozumie ani w ząb (jak zresztą po nim jeszcze przez ponad dwa stulecia nikt nie zdoła zrozumieć) tak zwanej „metody wyczerpywania" i teorii proporcji[66].

Jak bowiem zauważa Russo, teorii stosunku nie może zrozumieć ktoś, kto traktuje stosunki między wielkościami jedynie jako konkretne i realne byty. Jak zauważyliśmy, teoria stosunków wykracza w pewnym stopniu poza tak zwaną matematykę abstrakcyjną w kierunku matematyki ogólnej, gdzie otrzymywane obiekty matematyczne nie muszą odnosić się do realnie istniejącego świata (idealnego czy zmysłowego), lecz mają naturę czysto formalną. Mimo że brak mu dokładnych zegarów, jakimi dysponowali uczeni hellenistyczni, Galileusz stara się konstruować analogiczne do zegarów wod-

---

[65] Ibidem, s. 369–371.

[66] Ibidem, s. 372–373.

nych urządzenia do pomiaru czasu. Konsekwentnie trzyma się racjonalizmu greckiej nauki i odkrywane prawa, na przykład prawa spadania ciał, traktuje jako prawa matematyczne. Nie przyjmuje istnienia powszechnej grawitacji, mimo że metoda Archimedesa, jak zauważyliśmy (rozdział IV, paragraf 5), dawała podstawę do takiego rozwiązania.

Brak natomiast takiego konsekwentnego racjonalizmu u kolejnych twórców nauki nowożytnej – Johana Keplera i Izaaka Newtona. Mamy tam do czynienia z wymieszaniem różnego rodzaju wiedzy, pseudowiedzy i argumentacji pochodzącej z różnych źródeł (trudno mówić o ustalonej metodologii badawczej). Poza elementami nauki hellenistycznej występuje odwoływanie się do neoplatonizmu, pitagorejskiej numerologii, alchemii i astrologii, przy czym kluczowe argumenty dostarcza tym uczonym teologia. Kepler korzysta w równym stopniu z dzieł naukowych Apoloniusza i Pappusa, jak i z dzieł Pliniusza i Witruwiusza, opisujących jedynie w sposób mało ścisły wyniki zawarte u innych, nieznanych bliżej autorów starożytnych. Przyjmuje też istnienie kryształowej sfery gwiazd stałych, a o odległości między planetami wnioskuje z neoplatońskiej wizji kosmosu, gdzie Słońce jest w centrum, a wokół niego rozpościerają się kolejne koncentryczne sfery, na których opisane są bryły platońskie: na sferze Merkurego opisany jest ośmiościan foremny, który znów wpisany jest w sferę Wenus; na niej znów opisany jest dwudziestościan foremny wpisany w sferę Ziemi, a na niej opisana jest kolejna bryła platońska – dwunastościan, wpisany w sferę planety Mars; w podobny sposób pojawia się następna bryła platońska – czworościan foremny, wpisany w sferę Jowisza i sześcian w sferę Saturna[67]. Zgodnie z tą wizją kosmologiczną Układ Słoneczny kończy się na Saturnie. W sposób niewyjaśnialny występuje jednak duża zgodność odległości planet, wynikających z tego modelu, z obserwacjami. Jednak dla Keplera było to jak najbardziej racjonalne i wyjaśnione, gdyż – jak mniemał – Stwórca świata jest doskonałym Matematykiem i posługiwał się w dziele stwarzania zasadami geometrii.

Podobnie jest w przypadku **Izaaka Newtona** (1643–1727), który formułując swoje definicje i zasady nowej fizyki, korzysta z pracy Plutarcha *O obliczu widniejącym na tarczy Księżyca*[68]. Plutarch z Cheronei korzysta w swoim literackim opisie z dzieł astronomicznych (m.in. Arystarcha), które zaginęły. Było to, niestety, jedno z nielicznych źródeł pozwalających zrekonstruować astronomię antycznego uczonego. Podobnie czyni Kopernik. Te nawiązania do literackich opisów są jednak cenne, bo pokazują potrzebę od-

---

[67] J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum,* Tybinga 1596.

[68] Plutarch, *Moralia.* (Wybór), t. 2, tłum. Z. Abramowiczówna, seria „BKF", PWN, Warszawa 1988.

wołania się przy budowaniu nauki do źródeł starożytnych, nawet w tak okrojonej i zniekształconej formie. Newton korzysta również z zachowanych tekstów naukowych: prac Euklidesa i Archimedesa. Sam schemat *Principiów* budowany jest na wzór *Elementów* (podstawą są definicje siły, materii, ruchu oraz zasady, z których reszta ma być wyprowadzona), korzysta również z metody wyczerpywania Archimedesa, którą rozwija, oraz z kluczowej koncepcji budowy teorii fizycznej, zawartej w pracy *O równowadze płaszczyzn* (por. rozdział IV, paragraf 5). Korzysta też z różnorodnych komentarzy do dzieł Arystotelesa zawartych w pracach Symplicjusza czy Jana Filoponosa oraz z *Mechaniki* Herona i dzieła Pseudo-Arystotelesa pod tym samym tytułem, gdzie zawarte są rozważania na temat bezwładności ciał, siłach ciążenia i odśrodkowych i jakościowych rozwiązywaniach równań. Kluczowa jest analiza *Stożkowych* Apoloniusza, gdyż „orbity ciał podlegające oddziaływaniu centralnego pola grawitacyjnego są przecięciami stożkowymi". Dlatego teoria grawitacji jest z matematycznego punktu widzenia wyciąganiem odpowiednich wniosków z własności krzywych stożkowych[69]. W czasach przed publikacją *Principiów* (1687) znane były cztery z ośmiu ksiąg *Stożkowych*. Edmund Halley (1656–1742), przyjaciel Newtona, publikuje krytyczne wydanie siedmiu ksiąg dzieła Apoloniusza (cztery księgi po grecku, a trzy następne po łacinie, odtworzone z wydań arabskich). Interesujące jest stwierdzenie samego Newtona, że proporcja zawarta w prawie grawitacji, stwierdzająca, że siła oddziaływania ciał jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratów ich odległości, pochodzi z czasów antycznych, a dokładnie – od Pitagorasa. Badając harmonię sfer i wykonując liczne eksperymenty, w których porównywał interwały dźwięków z odstępami między sferami, a długości strun z odległościami planet od Słońca, Pitagoras zrozumiał, że ciężary planet względem Słońca są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich odległości[70].

Jak widać z przytoczonych fragmentów rozumowań Keplera i Newtona, odzyskiwanie metodologii badań uczonych czasów hellenistycznych nie było sprawa łatwą. Najlepszym przykładem jest powstanie geometrii nieeuklidesowych, które połączone było z badaniem podstaw geometrii i próbą udowodnienia słynnego piątego postulatu o równoległych (te próby rozpoczynają się już w czasach hellenistycznych, w epoce cesarskiej). Okazało się, że można sformułować niesprzeczne geometrie zbudowane na postulatach euklidesowych, w których jednak piąty postulat jest zastąpiony przez jego

[69] L. Russo, *Zapomniana rewolucja,* s. 389–397.

[70] Ibidem, s. 400.

zaprzeczenie (Łobaczewski, Gauss, Bolyai). Tak naprawdę, taka możliwość została jednak dostrzeżona i zrealizowana w dziele *Sphaerica* Menelaosa w I wieku n.e. Jest tam badana powierzchnia kulista w sposób wewnętrzny, a nie jako figura zanurzona w przestrzeni euklidesowej. Linie proste geometrii euklidesowej są interpretowane jako łuki kół wielkich i sformułowane jest stwierdzenie o nadwyżce sumy kątów trójkątów sferycznych w stosunku do trójkątów płaskich. W roku 1758 wychodzi w Oksfordzie pierwsze nowożytne wydanie pracy *Sphaerica.* Jak wiemy, geometria sferyczna budowana jest na sposób *Elementów* Euklidesa, a w czasach hellenistycznych powstało wiele systemów aksjomatycznych. Dopiero Łobaczewski podjął próbę takiego zbudowania swojej geometrii w dziele *Nowe zasady geometrii,* znaczną część książki poświęcając analizie pracy Menelaosa. Jednak dopiero pod koniec XIX wieku nowożytność była w stanie opracować w pełni poprawne systemy aksjomatyczne (aksjomatyka M. Pascha, G. Peano, D. Hilberta i inne).

Kolejnym przykładem postępu związanym z odzyskaniem wiedzy starożytnych jest uściślenie podstaw analizy matematycznej poprzez zbudowanie na nowo teorii proporcji Eudoksosa w pracach Weierstrassa i Dedekinda (w 1872 została wydana słynna praca *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* ze ścisłą definicją liczb rzeczywistych w oparciu o przekroje, zgodnie z teorią proporcji).

W ramach odzyskiwania metodologii nauk wypracowanych w czasach hellenistycznych pojawiło się w pewnym momencie zrozumienie, że te same zjawiska mogą być opisywane przez różne teorie (subdeterminacja teorii naukowych). W starożytności nie było sporu o to, która teoria jest prawdziwa: geocentryczna, heliocentryczna czy jeszcze inna, lecz o to, która lepiej wyjaśnia obserwowane zjawiska i posiada lepsze narzędzia matematyczne (w tym obliczeniowe). Kilka teorii może w sposób komplementarny wyjaśniać tę samą grupę zjawisk. Na tę kwestię zwrócili uwagę francuscy filozofowie, żyjący na przełomie XIX i XX wieku, Pierre Duhem (1861–1916) i Henry Poincare (1954–1912). W ich koncepcjach, nietrafnie nazwanych konwencjonalizmem (ponieważ nazwa sugeruje brak związku teorii z rzeczywistością, a te koncepcje taki związek podkreślają), mamy połączenie badań nad historią nauki, obserwacji jej aktualnego rozwoju z refleksją epistemologiczną nad możliwościami poznawczymi teorii naukowych.

Duże znaczenie miało odzyskanie *Metody* Archimedesa odkrytej przez J.L. Heiberga w 1906 roku. Jednak krótko po odkryciu praca Archimedesa znowu zaginęła i ponownie odnalazła się w 1998 roku. Treść jej była jednak dostępna w wydanych w latach 1910–1915 dziełach zebranych. Dostrzeżono, analizując pracę, że rozwój nauk matematyczno-przyrodniczych przebiegał w dużej mierze zgodnie z metodą badawczą Archimedesa-Galileusza (analityczno-dedukcyjną), a nie z eksperymentalno-indukcyjną Franciszka Bacona.

Jak zauważyliśmy, w ostatnim okresie starożytności rodzi się nowy dział matematyki – algebra, jako szczególnie charakterystyczny rodzaj wiedzy ogólnej. Badaniami algebraicznymi (m.in. rozwiązywaniem równań) zajmowano się jednak już dużo wcześniej. Były to badania uczonych sumeryjskich i babilońskich. Zagadnienia te rozwiązywano jednak dla konkretnych problemów, nie miały więc one charakteru ogólnego. Dopiero w pracach greckich matematyków, Apoloniusza i Diofantosa (zwanego ojcem algebry), algebra zaczyna nabierać charakteru wiedzy ogólnej. Istotne dla rozwoju algebry, jak i całej matematyki, był rozwój symboliki. Dzięki wprowadzeniu przez Diofantosa z Aleksandrii (wraz z istotnym uzupełnieniem w czasach średniowiecznych i nowożytnych) elementów notacji algebraicznych, algebra mogła zacząć rozwijać się jako nowy samodzielny dział matematyki. Jej istotny rozwój dokonał się za sprawą matematyków islamskich (głównie al-Chuwarizmiego, żyjącego na przełomie VIII i IX wieku, oraz Chajjama z przełomu XI i XII wieku).

Urodzony w Chorezmie **al-Chuwarizmi** (780–850) pracował w „Domu Mądrości" w Bagdadzie. Tam też w latach 813–830 wydał swoje dzieła, w których pojawiła się nazwa „algebra" oraz koncepcja algebry jako autonomicznej dyscypliny naukowej. Rozpoczął budowę uniwersalnej teorii rozwiązywania równań (w sposób algorytmiczny), do których dałoby się sprowadzać tak zagadnienia arytmetyczne, jak i geometryczne. Było to swoistą syntezą algebry konkretnej Babilończyków, algebry geometrycznej pitagorejczyków (przedstawionej w *Elementach* Euklidesa) oraz algebry Diofantosa. Ta nowa nauka mimo (a raczej dzięki) swojej ogólności miała mieć praktyczne zastosowania: w handlu, do pomiarów gruntu i innych obliczeniach. Al-Chuwarizmi wprowadził całą listę pojęć, określających tę dyscyplinę matematyki.

> Do głównych pojęć wprowadzonych następnie przez Alchwarizmiego należą: „rzecz" niewiadoma, równanie pierwszego stopnia, równanie drugiego stopnia, dwumiany i trójmiany sprzężone, postać normalna, rozwiązania algorytmiczne i dowody wzorów na rozwiązania. Nie są to obiekty oznaczające coś konkretnego, lecz przedmiot, który może być liczbą, jak i obiektem geometrycznym. Pojęcie równania pojawia się w dziele Alchwarizmiego dla oznaczenia nieskończonej kategorii problemów, a nie, jak na przykład u Babilończyków, w trakcie rozwiązywania konkretnego zadania[71].

[71] *Historia nauki arabskiej*, t. 2: *Nauki matematyczne i fizyka,* red. R. Rashed, R. Morelon, Wydawnictwo Akademickie DIALOG, Warszawa 2001, s. 28.

Istotne jest to, że zaczyna on od klasyfikacji równań, budując teorię równań od podstaw, jako teorię ogólną, a nie budowaną na doraźne potrzeby rozwiązywanych problemów, jak było poprzednio. Ponadto nie interesuje go sam wynik, lecz różne techniki dowodzenia (geometryczne, arytmetyczne, czysto algebraiczne), aby skonstruować ogólne, algorytmiczne metody dowodzenia. Al-Chuwarizmi zajmuje się tylko równaniami pierwszego i drugiego stopnia, a wynika to z jego projektu, w którym problemy omawiane odtąd według zasad algebry, arytmetyki i geometrii powinny zostać sprowadzone do równań co najwyżej drugiego stopnia z jedną niewiadomą i z dodatnimi, wymiernymi współczynnikami. Chodziło o zbudowanie nowej nauki na elementarnych podstawach jako syntezy arytmetyki i geometrii. Alcharizmi uważa, że również wprowadzany algorytm rozwiązywania i dowodzenia powinien zostać udowodniony. Ten projekt znalazł wielu następców (Ibn Turk, Tabit Ibn Qurra), którzy podjęli refleksję nad teorią dowodu oraz pokazaniem podobieństwa między metodami algebraicznymi i geometrycznymi (na przykład zagadnienie geometrycznej interpretacji metod algebraicznych)[72].

Kolejnym matematykiem islamskim o szczególnym znaczeniu dla konstrukcji matematyki jako wiedzy ogólnej był **Omar Chajjam** (1048–1131), perski uczony, uczeń Awicenny. Był postacią niezwykle barwną, przejawiającą aktywność na wielu polach – jako lekarz, poeta czy astronom. W swoim słynnym traktacie algebraicznym podał rozwiązania wszystkich równań trzeciego stopnia poprzez przekroje dwóch stożków. Wcześniej pojawiały się jedynie rozwiązania w konkretnych przypadkach. Próbowano przy pomocy geometrii określić dodatnie pierwiastki równania i w ten sposób pojawiła się technika wykorzystywania punków przecięć krzywych stożkowych. Natomiast Chajjam stworzył program rozwinięcia geometrycznej teorii równań stopnia nie większego niż 3. Jak sam mówi o swoim projekcie: „Ja zaś zawsze pragnąłem, nadal gorąco pragnę, poznać z pewnością te rodzaje i wyróżnić, wśród postaci każdego z nich, przypadki możliwe i przypadki niemożliwe, przez dowodzenie”[73]. Podejmuje się więc zadania ogólnego zrozumienia i wyrażenia relacji między algebrą i geometrią. W tym celu wprowadza „pojęcie jednostki miary, które odpowiednio sformułowane w stosunku do pojęcia wymiaru pozwala na zastosowanie geometrii do algebry”[74]. Okazuje się, że dzięki temu algebra jest nie tylko teorią równań, ale również teorią związków i podobieństwa między algebrą i geometrią. W ten sposób ro-

72 Ibidem, s. 29–33.
73 Ibidem, s. 37–41.
74 Ibidem, s. 40.

dzą się metody analityczne geometrii w połączeniu z metodami geometrycznymi algebry, oparte o analizę pojęcia wielkości algebraicznej, a w konsekwencji – rachunek geometryczny na podstawie jednostki długości. Jest to idea i rozwiązania przypisywane Kartezjuszowi, albowiem Chajjam nie podał wzorów algebraicznych na rozwiązania tych równań, a jedynie metody przybliżonego rozwiązywania przy pomocy tablic trygonometrycznych.

Od XII wieku rozwój algebry dokonuje się głównie w Europie. Poczynając od Leonarda z Pizy, poprzez Cardana, Viete'a, Kartezjusza, Eulera, d'Alemberta, Abela, aż po czasy współczesne. Szczególne znaczenie dla wprowadzenia symboliki algebraicznej (i szerzej, matematycznej) miały dokonania Viete'a i Kartezjusza.

François Viète (1540–1603) postawił sobie za cel przekształcenie algebry w rachunek matematyczny (nazwał go logistyką symboliczną), który będzie operował na wielkościach ogólnych, a nie na konkretnych liczbach. To operowanie wielkościami ogólnymi stanowić ma siłę matematyki. W tym celu tworzy odpowiednią symbolikę (symbole zmiennych danych wielkości, dla współczynników wielomianów, znaki „+" oraz „–"), aby w sposób jednolity ująć przekształcenia algebraiczne i teorię równań pierwszych czterech stopni[75].

Kartezjusz (1596–1650) też zaproponował stworzenie nowej matematyki, która za podstawę weźmie algebrę (a nie geometrię) i stanie się samodzielną gałęzią jako najbardziej uogólniony wyraz arytmetyki[76]. W celu sprowadzenia matematyki do algebry podejmuje się klasyfikacji wszystkich krzywych według stopnia równania (charakterystyka algebraiczna) oraz udoskonala symbolikę. W swojej *Geometrii* pokazuje znaczenie wielkości zmiennej dla prowadzonych badań nad krzywymi (i budowania ogólnych równań wiążących te zmienne), a wprowadzona przez niego symbolika stała się w następnych latach powszechnie używana w matematyce (m.in. ostatnie litery alfabetu – *x, y, z* – jako wielkości niewiadome, a pierwsze – *a, b, c* – jako wiadome). Budował też ogólną teorię równań, dla której rozwiązania Viete'a były przypadkami szczególnymi. To dążenie do stworzenia ogólnej, mechanicznie działającej teorii miało też znaczenie kulturowe. Praca matematyczna realizowana w oparciu o proste algorytmy staje się dostępna ogółowi, nie wymaga jakichś szczególnych zdolności matematycznych.

Główną ideą, która mu przyświecała, było przekonanie o jedności matematyki, a więc nie chodziło mu *de facto* o zredukowanie matematyki do ja-

---

75 *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 1, s. 335–342.

76 Por. W.F. Asmus, *Descartes,* Książka i Wiedza, Warszawa 1960, s. 195.

kiejś subdyscypliny, lecz o pokazanie wspólnej podstawy, jaką miała stać się algebra. W duchu matematyki hellenistycznej (a dokładniej – tak jak w badaniach i projekcie Archimedesa) traktował matematykę jako jedność matematyki i mechaniki oraz dążył do zbudowania ogólnej nauki o stosunkach (jak Eudoksos), chociaż, z drugiej strony, odcinał się od matematyki greckiej i uważał zjednoczenie matematyki (a właściwie projekt) za swoją zasługę[77].

Przyjrzyjmy się teraz niektórym problemom matematyki okresu antycznego, które doprowadziły do powstania bardziej zaawansowanych metod algebraicznych i wprowadzenia symboliki matematycznej. Wiązało się to z pełnym odkryciem „nowej" matematyki jako wiedzy ogólnej.

Pojawia się tu kilka kluczowych obszarów: symbolika liczbowa (wprowadzenia cyfr hinduskich i pozycyjnego systemu zapisu liczb), znajdowanie algorytmów niezmiernie przydatnych w różnych działaniach matematycznych i praktycznych (upraszczanie obliczeń i innych działań), problemy rozwiązane i nierozwiązane pojawiające się wraz z rozwojem algebry geometrycznej, np. kwadratura koła, oraz techniki rozwiązywania równań, a ponadto wspomniany już rozwój symboliki algebraicznej.

Grecki system liczbowy opierał się na literach alfabetu greckiego[78]. Oznaczano nimi najpierw jedności, następnie dziesiątki i w końcu setki. Dla odróżnienia od liter najczęściej nad literami (traktowanymi jako liczby) umieszczano poziomą kreskę. I tak A (alfa) oznaczała 1, B (beta) – 2, Γ (gamma) – 3, Δ (delta) – 4, E (epsilon) – 5, ζ (digamma) – 6, Z (dzeta) – 7, H (eta) – 8, Θ (theta) – 9, I (jota) – 10, K (kappa) – 20, Λ (lambda) – 30, M (mi) – 40, N (ni) – 50, Ξ (ksi) – 60, O (omikron) – 70, Π (pi) – 80, ς (koppa) – 90, P (ro) – 100, Σ (sigma) – 200, T (tau) – 300, Y (epsilon) – 400, Φ (phi) – 500, X (chi) – 600, Ψ (psi) – 700, Ω (omega) – 800 i *M* (san) – 900. Zapis przykładowo liczby 578 wyglądał następująco: $\overline{\mathrm{EZH}}$. Dla liczb większych trzeba było wprowadzać kolejne konwencje: i tak liczby 1000, 2000, … 9000 zapisywano przy pomocy cyfr jedności z apostrofem po lewej stronie cyfry np. 3000 – 'Γ. Natomiast dla liczb od 10000 (miriada) używano litery M i umieszczano nad nią odpowiednie małe litery–liczby, tak aby pomnożone przez miriada dawały żądaną liczbę. W ten sposób 10 000 oznaczano jako $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$, a 80 000 jako $\overset{\eta}{\mathrm{M}}$. W ten sposób maksymalnie można było zapisać liczbę 9999 miriad, natomiast dla zapisania liczb większych trzeba było wprowadzać kolejne oznaczenia. Jednak Apoloniusz i Archimedes opracowali metodę, która

[77] Ibidem, s. 196–201.

[78] W następnych fragmentach dotyczących historii liczb w starożytności korzystam z książki G. Ifraha *Historia powszechna cyfr*, t. 1.

pozwalała wyrażać w oparciu o przyjęty system bardzo duże liczby. Znane jest dziełko Archimedesa *Psammites* (*Zliczacz ziarnek piasku*), w którym podał oszacowanie liczby ziarnek piasku, który wypełniałby kulę tworzącą wszechświat (według ówczesnych wyobrażeń). Metoda polegała na podziale liczb na kolejne klasy, przy czym do pierwszej klasy, czyli podstawowej (w metodzie Apoloniusza), należały liczby od 1 do 9999, do drugiej (zwanej klasą pierwszych miriad) należały wielokrotności miriady przez liczby od 1 do 9999, do drugiej klasy miriady należały wielokrotności miriady miriad przez liczby od 1 do 9999, itd. Aby zaznaczyć, że mamy pierwszą klasę miriad, z lewej strony liczby pisano $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$, przy drugiej pisano $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ itd. Archimedes rozpatrywał klasy podwójne zwane oktadami, czyli klasa podstawowa (pierwsza oktada) składała się z liczb od 1 do 99 999 999, następnie była druga oktada, itd., analogicznie jak u Apoloniusza.

W tym systemie liczenia nawet stosunkowo proste (z dzisiejszego punktu widzenia) obliczenia wymagały zaawansowanego aparatu matematycznego. Można powiedzieć, że używany przez Greków system zapisu liczb pozwolił wznieść się arytmetyce na wyżyny abstrakcji, a w naszym rozumieniu jest to charakterystyczny rys matematyki ogólnej. Jednak z powodu braku odpowiedniej symboliki dalszy rozwój okazał się niemożliwy. Metoda budowania kolejnych klas (czy oktad) w metodzie Apoloniusza i Archimedesa przybliżała nieco system liczenia do systemu pozycyjnego, odkrytego na przełomie czwartego i piątego wieku przez Hindusów (w VIII wieku przejętego przez Arabów, a w średniowieczu przez Europę). Duże znaczenie dla jego rozpowszechnienia ma wydana w 1202 roku *Księga abaka,* w której Fibonacci wykłada arytmetykę i algebrę w oparciu o dziesiątkowy system pozycyjny. Istnieje jednak zasadnicza różnica między tymi systemami[79]. Wprawdzie miriada (a tym bardziej oktada) była „dużą" liczbą, jednak nie pozwalała na zapisywanie dowolnie dużych liczb, bez wprowadzenia nowych oznaczeń i konwencji. Można było zapisać maksymalnie miriadową klasę miriad, jednak większe liczby były w tym momencie poza zasięgiem. Oczywiście, z praktycznego punktu widzenia rozpatrywanie większych liczb wydawało się niepotrzebne (co pokazała praca Archimedesa).

Jak wspomniałem wcześniej, „częściowego" (dla dużych liczb) systemu pozycyjnego (sześćdziesiątkowego) używali już Sumerowie. Był to jednak system mieszany, a więc stosunkowo złożony, i dopiero system hinduski osiągnął odpowiedni stopień prostoty.

[79] Por. A.P. Juszkiewicz, *Historia matematyki w wiekach średnich,* PWN, Warszawa 1969, s. 328–331.

Al-Chuwarizmi był tym, który dostrzegł wartość hinduskiej sztuki rachowania, a więc systemu pozycyjnego. System hinduski operował dziewięcioma cyframi, natomiast miejsce zera zostawiano puste. Al-Chuwarizmi, który opracowywał arabskie tłumaczenia z hinduskiego, wpisał „kółeczko", co miało oznaczać puste miejsce, a więc „brak znaku" (czyli *nulla figura*)[80].

Idea systemu pozycyjnego opiera się na spostrzeżeniu, że dla dowolnej liczby $p > 1$ każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy iloczynu potęg liczby p i pewnej liczby k_i mniejszej od p. Można to zapisać następująco: $\forall p > 1, n(n = m + k_1 p + k_2 p^2 + \cdots + k_r p^r)$, przy czym $m, k_i = 0,1,2, \ldots p - 1$. Dla ustalonej liczby p jest to rozkład jednoznaczny liczby n, można więc liczbę n zapisać (jednoznacznie) przy pomocy współczynników m oraz k_i. Wtedy liczba n może być potraktowana jako układ liczb postaci $k_r k_{r-1} \ldots k_1, m$. Bez użycia cyfry zero zapis ten staje się niejednoznaczny i nieczytelny (trzeba by czasami zostawiać, gdy brak jest w rozkładzie danej potęgi p, puste miejsca – czasem puste podwójnie, potrójnie itd.). Dla uzyskania pełnej harmonii również cyfrę m można przedstawić w postaci potęgi liczby p i otrzymujemy $n = k_0 p^0 + k_1 p^1 + k_2 p^2 + \cdots k_r p^r$, gdzie $k_0 = m$. Zauważmy, że to dzięki użyciu zera uzyskujemy pełną harmonię zapisu, daje ono też jednoznaczność zapisu dowolnej liczby naturalnej. Przy okazji jedynka „traci" nieco swoją rangę (jako monada, matka i generator wszystkich liczb). Spośród wszystkich liczb naturalnych tylko jedynka nie może być podstawą systemu pozycyjnego. Oczywiście zero również i w tym okazuje się „podobne" do jedynki. Ponadto w powyższym wzorze mieści się prosty algorytmiczny sposób otrzymywania zapisu (pozycyjnego) dowolnej liczby naturalnej (wystarczy dzielić daną liczbę, i kolejno otrzymywane ilorazy, przez podstawę p, a otrzymywane reszty z dzielenia, pisane od prawej strony, dadzą żądane rozwinięcie).

Al-Chuwarizmi jest również twórcą pojęcia oraz idei algorytmu, jak zaznaczyłem wcześniej. Abstrakcyjna matematyka okazała się przynosić praktyczne korzyści, gdy odkryła swój algorytmiczny aspekt. Miało to ogromne znaczenie tak dla usprawnienia pomiarów, obliczeń, jak i dla zastosowań technicznych (algorytmiczne schematy konstrukcji i działań konstruowanych maszyn i urządzeń). Idea algorytmu w sposób szczególny pokazała łączność między konkretnym i abstrakcyjnym aspektem matematyki. Posługiwano się różnymi algorytmami już dużo wcześniej, jednak w czasach średniowiecznych została odkryta ich szczególna moc praktyczna. Jednym z najbardziej znanych jest opisany przez Euklidesa algorytm służący do znaj-

80 H. Kaufmann, *Dzieje komputerów,* PWN, Warszawa 1980, s. 79–86.

dowania wspólnego dzielnika liczb. Można go jednak wykorzystać do znajdowania wspólnej miary dwóch dowolnych wielkości, a w przypadku niewspółmierności służy do dowolnie dokładnego przybliżania tej miary (aspekt praktyczny). Natomiast al-Chuwarizmi znajdował przede wszystkim algorytmy związane z rozwiązywaniem równań (wspomnę o tym w dalszej części), gdzie formułował algorytmiczne metody ich rozwiązywania i ogólne wzory na znajdowanie pierwiastków.

Metody ogólne rodziły się też w ramach tak zwanej algebry geometrycznej. Jak wiadomo, po kryzysie związanym z odkryciem wielkości niewspółmiernych zaczęto uprawiać w starożytnej Grecji arytmetykę (algebrę) geometryczną i próbowano w oparciu o czyste operacje geometryczne wykonywać działania arytmetyczne oraz dokonywać pomiarów. Algebrę geometryczną zaczęli uprawiać już pitagorejczycy, przyjmując odcinek za jednostkę podstawową. Każdą liczbę (naturalną) można było otrzymać poprzez powtórzenie tego jednostkowego odcinka. Zamiast wymierzać odcinki i inne obiekty geometryczne liczbami, zaczęto liczby uzyskiwać przy pomocy odcinków. W prosty sposób realizowano na odcinkach dodawanie czy odejmowanie liczb. Iloczyn dwóch liczb a i b traktowano jako pole prostokąta o bokach a i b, zaś iloczyn trzech liczb jako objętość odpowiedniego prostopadłościanu. W tej konwencji jednak nie miało sensu jednoczesne przedstawienie iloczynu czterech liczb, gdyż geometria Greków ograniczona była do trzech wymiarów. Z tego okresu wzięły się nazwy „a kwadrat” oraz „a sześcian” na oznaczenie odpowiednio drugiej i trzeciej potęgi liczby a. Można było też rozwiązywać geometrycznie równania liniowe i kwadratowe (tę wiedzę posiadali już Babilończycy). Mimo że geometria pozwalałaby na rozwiązywanie też równań trzeciego stopnia, to tego typu metody pojawiły się dopiero w czasach nowożytnych, w pracach Tartaglii, Ferrariego i Cardana.

Jednak, jak wspomniałem wcześniej, Eudoksos pokazał możliwość, dzięki swojej ogólnej teorii stosunków, zanurzenia liczb naturalnych w przestrzeń stosunków geometrycznych. Sformułował postulat (postulat Eudoksosa), który pozwalał interpretować dowolną liczbę jako stosunek dwóch odcinków. Tym samym otworzył drogę dla przekształcenia algebry geometrycznej w algebrę jako wiedzę ogólną, opartą o teorię stosunków.

W tym okresie pojawiło się wiele ciekawych metod geometrycznego wykonywania działań arytmetycznych, np. dzielenie (lub mnożenie) dwóch odcinków dzięki wykorzystaniu twierdzenia Talesa, wyznaczanie średniej geometrycznej dwóch odcinków (w tym średniej geometrycznej odcinków o długości 1 i 2, czyli konstrukcji $\sqrt{2}$), konstrukcje niektórych wielokątów foremnych. Pojawiają się konstrukcje platońskie (a więc elementarne, przy pomocy okręgów i linii prostych) niektórych wielokątów: trójkąta równobocznego, kwadratu, pięciokąta, sześciokąta oraz piętnastokąta foremnego). Inne konstrukcje elementarne napotkały w wielu przypadkach na trudności. Słynne problemy starożytnych wiązały się właśnie z nieudanymi próbami wykonania takich konstrukcji, które z powodów ideowych (i czysto matematycznych) wydawały się bardzo ważne: podwojenie sześcianu, rektyfikacja okręgu, kwadratura koła, trysekcja kąta. Te próby zaowocowały jednak odkrywaniem różnych interesujących krzywych, przy pomocy których takie konstrukcje stawały się możliwe. Okazało się ponadto, że te krzywe (na przykład krzywe stożkowe) posiadają własności, które można wykorzystać w różnych zastosowaniach, na przykład do konstrukcji urządzeń mechanicznych.

Szczególne zainteresowanie budziła kwadratura koła. Zauważmy, że w prosty sposób możemy przeprowadzić kwadraturę prostokąta. Mając bowiem dowolny prostokąt o bokach x i y, można skonstruować trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość $x + y$. Z podobieństwa trójkątów ADC oraz DBC wynika, że $\frac{h}{x} = \frac{y}{h}$, gdzie h jest wysokością opuszczoną z kąta prostego (jest to odcinek CD). Daje to wzór $h^2 = xy$, oznaczający możliwość kwadratury dowolnego prostokąta, a w konsekwencji dowolnego wielokąta. Widać, że możliwość kwadratury oparta jest na analogii geometrycznej stwierdzającej, że wysokość opuszczona z kąta prostego jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli ta wysokość przeciwprostokątną. Hipokrates pokazał, że jest możliwość kwadratury pewnych figur ograniczonych łukami (księżyce Hipokratesa), jednak próby kwadratury koła okazały się nieskuteczne. Doprowadziły jednak do odkrycia ważnej proporcji: pole koła do kwadratu jego promienia ma się tak, jak obwód koła do jego średnicy. Ten wspólny stosunek (nazwany w czasach nowożytnych liczbą π) dawał możliwość przybliżonego obliczania pola koła, a więc też kwadratury z pewną dokładnością. Weźmy bowiem koło o promieniu r oraz rozpatrzmy stosunek pola tego koła do pola kwadratu zbudowanego na promieniu. Ponieważ wszystkie koła są do siebie podobne, to stosunek ten jest zawsze stały – jest to właśnie π. Gdyby stosunek π był konstruowalny, to w prosty sposób dałoby się skonstruować kwadrat o polu równym polu danego koła (zagadnienie kwadratury koła). Stosunek π nie jest jednak konstruowalny[81]. Kwadratura koła okazuje się więc w sposób ścisły niemożliwa.

[81] Z dzisiejszego punktu widzenia oznacza to, że liczba π nie jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach wymiernych. Nie jest nawet pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, czyli jest liczbą przestępną (jest to pierwsza odkryta liczba przestępna).

Jednak stosunek π (który nie był nawet wielkością, a jedynie stosunkiem wielkości) okazał się konieczny do wyliczania pól powierzchni i objętości wielu figur. Stał się nowego rodzaju nową „miarą" (obok jedynki). Zauważmy, że również wszystkie kwadraty (tak jak koła) są do siebie podobne, a stosunek pola dowolnego kwadratu do „kwadratu" długości jego boku wynosi 1. Grecy otrzymali więc dwie nieredukowalne do siebie miary: π oraz 1. Obie te miary były wynikiem „samopodobieństwa" tak koła, jak i kwadratu. Poszukiwania monady geometrycznej doprowadziły więc do odkrycia wielkości π. Pojawiły się jakby dwie monady (dwuwładza w królestwie matematyki): 1 oraz π.

W celu przywrócenia jedności matematyki należało odwołać się do innej teorii matematycznej, która obejmowałaby tak geometrię, jak i arytmetykę. Taką teorią okazała się algebra, jednak rozwijana w sposób ogólny, nie jak do tej pory w ramach doświadczeń matematyki konkretnej (algebra babilońska) czy geometrii (algebra geometryczna pitagorejczyków). Właśnie stworzona w następnych wiekach algebra i jej metody pozwalały na uratowanie jedności matematyki, przynajmniej w zakresie tych wcześniejszych teorii. Jak zauważyłem, w pracach al-Chuwarizmiego została dostrzeżona rola algebry jako syntezy geometrii i arytmetyki, która budowała jedność matematyki.

Zobaczmy, jak się to stało. Algebra wyrosła z poszukiwania metod rozwiązywania równań (na początku liniowych i kwadratowych). Metody algebraiczne pojawiły się już u Sumerów i Babilończyków, były jednak związane z rozwiązywaniem konkretnych problemów. Grecka algebra geometryczna miała już walor abstrakcyjności, wynikający z abstrakcyjności geometrii. Dopiero wprowadzenie odpowiedniej i jednolitej notacji algebraicznej pozwoliło na jej niezależność od innych obszarów matematyki i konkretnych zagadnień. Przy braku przyjęcia notacji algebraicznej związana była ściśle z metodami geometrycznymi. Już od czasów Diofantosa taką niezależność zaczęła budować, lecz dopiero w okresie nowożytnym uzyskała pełną ogólność i niezależność od wyobrażeń geometrycznych. Istotne okazało się, jak już powiedziałem, wprowadzenie symboliki algebraicznej. Pojawienie się ogólnych wzorów na pierwiastki równań stopnia drugiego, trzeciego i czwartego (wzory Cardana) i wzorów ukazujących prostą zależność między iloczynami oraz sumami pierwiastków wielomianów a ich współczynnikami okazało się kluczowym etapem w tym rozwoju. Doprowadziło to z czasem do przyjęcia zera, liczb ujemnych i wymiernych (i również zespolonych) – jako pełnoprawnych liczb. Ich znaczenie i „naturalność" wynikały z tego, że pojawiały się jako rozwiązania równań.

Wielkie dzieło al-Chuwarizmiego *Sztuka redukcji i przenoszenia* (nazwa algebra pochodzi od arabskiego słowa *al-dźabr*, oznaczającego redukcję) rozwijało metody algebraiczne Diofantosa, ale również algebrę sumeryjsko-babilońską oraz metody algebry geometrycznej zawarte w *Elementach* Euklidesa. Był to projekt nowej matematyki, która łączyła te różne sposoby uprawiania matematyki. Chodziło mu o opracowanie teorii równań rozwiązywalnych przez pierwiastniki (czyli w oparciu o podstawowe działania arytmetyczne i pierwiastkowanie, czyli odwrotność do znajdowania kwadratu), w ramach której będzie można rozwiązywać tak problemy geometryczne, jak i arytmetyczne, konkretne, praktyczne, jak i ogólne.

Ponieważ rozpatrywano wtedy tylko liczby dodatnie al-Chuwarizmi zauważył, że wszystkie równania kwadratowe można sprowadzić do trzech typów: $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$ oraz $x^2 = ax + b$. Podał też metody rozwiązywania każdego z nich.

Zobaczmy przykładowo, jak wygląda ogólna metoda znajdywania rozwiązań równań pierwszego typu. W pracy al-Chuwarizmiego znajduje się konkretne równanie: $x^2 + 10x = 39$. Metoda polega na „dopełnianiu" kwadratu x^2 do odpowiedniego kwadratu większego. W tym celu należy do każdego boku kwadratu x^2 dobudować identyczne prostokąty o bokach x oraz $\frac{1}{4}10 = 2\frac{1}{2}$. Wystarczy teraz wstawić w każdy z czterech rogów kwadrat o boku $2\frac{1}{2}$, aby otrzymać „duży" kwadrat o boku $x + 2 \cdot 2\frac{1}{2} = x + 5$. Stąd otrzymujemy, że $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$. Tym samym $x + 5 = 8$, i w końcu wyliczamy poszukiwaną wielkość $x = 8 - 5 = 3$. Al-Chuwarizmi nie ograniczył się do pokazania metody geometrycznej rozwiązania równania. Równanie u al-Chuwarizmiego pojawia się jako maksymalnie ogólny schemat obejmujący nieskończenie wiele problemów z różnych obszarów i kategorii. Dlatego formułuje też ogólne algorytmy rozwiązań i wzory na pierwiastki równań. To, że podaje tak algebraiczne, jak i geometryczne metody rozwiązań, świadczy o nieprzywiązywaniu wagi do konkretnych wyników, lecz o tym, że poszukuje ogólnej metody, algorytmu, co nazywa „przyczyną" rozwiązania[82].

Analogicznie, poprzez dopełnianie do sześcianu, znajduje się ogólne rozwiązania równań stopnia trzeciego. Natomiast równania stopnia czwartego udaje się sprowadzić przez wprowadzenie nowej zmiennej do równania stopnia trzeciego i drugiego. Istotne jest to, iż pojawiły się algorytmiczne wzory pozwalające „mechanicznie" wyliczać pierwiastki dowolnych równań odpowiednich stopni. To zrobiono jednak już w czasach nowożytnych, idąc za metodami opracowanymi już wcześniej. Dokonali tego **Nicollo Tartaglia** (1500–1557) oraz niezależnie **Scipione del Ferro** (1465–1526). Tartaglia

---

[82] *Historia nauki arabskiej,* t. 2, s. 27–30.

był też autorem pierwszego tłumaczenia *Elementów* Euklidesa na język nowożytny (włoski). Natomiast ogólną metodę rozwiązywania równań stopnia czwartego (poprzez redukcję do równań stopnia trzeciego) opracował **Lodovico Ferrari** (1522–1565). Metodę rozwiązywania równań stopnia trzeciego i czwartego rozpowszechnił **Girolamo Cardano** (1501–1576) w swoim dziele *Artis Magna* (wzory na pierwiastki tych równań niesłusznie nazywa się wzorami Cardana). Jak wiemy, nie udało się znaleźć rozwiązań równań wyższych stopni niż cztery przez pierwiastniki (a więc przez wzory algebraiczne zawierające tylko cztery podstawowe działania algebraiczne i pierwiastki stopni naturalnych). Jak pokazała teoria Galoisa, jest to jednak generalnie – dla równań stopni wyższych niż cztery – niemożliwe.

Metody wprowadzone przez matematykę w piątym okresie dziejów umożliwiły generowanie całkiem nowych bytów, niemających bezpośredniego odpowiednika w poznawanej zmysłowo czy intuicyjnie rzeczywistości. W ten sposób już w starożytności pojawił się stosunek wielkości jako obiekt matematyczny niebędący wielkością. Później zero, liczby ujemne, wymierne oraz zespolone (nazywane na początku urojonymi lub niemożliwymi) objawiły swą matematyczną „naturę". Ponadto w algorytmach algebry pojawiła się idea odwracalności wykonywanych operacji, co również wskazuje na ich ogólny (uniwersalny, niezmienny) charakter.

Powstanie algebry miało fundamentalne znaczenie kulturowe. Okazało się, że poprzez operowanie na „czystych", abstrakcyjnych znakach (symbolach) i użycie całkiem ogólnych formuł można rozwiązywać konkretne (często praktyczne) problemy. Rodzące się równolegle z algebrą pojęcie algorytmu, jako uniwersalnej procedury prowadzącej automatycznie do poszukiwanych rozwiązań, stało się w średniowieczu wręcz synonimem matematycznej skuteczności i mocy. Wszystko starano się oprzeć na sztuce liczenia, a rozstrzygającym argumentem było stwierdzenie: „tak mówi algorytm" (*dixi algorizmi*). Uważam, że średniowieczna idea scholastyki (poszukująca i badająca dowody na istnienie Boga jako w pewnym sensie algorytmiczna metoda docierania do Boga w oparciu o analizę świata lub pojęć) czerpała swoją inspirację i siłę z metody algebraicznej. Ciężko zrozumieć też żarliwość średniowiecznego sporu o status powszechników (pojęć ogólnych) bez odniesienia do rozwoju i sukcesów ówczesnej algebry. Ukazała ona bowiem siłę i realne znaczenie metod działających w abstrakcyjnym i niezależnym od rzeczywistości świecie znaków, symboli i algorytmów. To sugerowało istnienie jakiegoś związku między tymi znakami a tym, co one oznaczały, albo wskazywało na szczególny rodzaj istnienia świata symboli.

Rozdział IV
Matematyka czasów nowożytnych i jej nowe wymiary uniwersalności

1. Nowa idea kształcenia i prowadzenia badań naukowych

W czasach nowożytnych wraz z kształtowaniem się nowej matematyki i nauki pojawiły się nowe idee nauczania i wychowania związane z grecką ideą paidei. W czasach renesansu nastąpiło odnowienie idei akademii, lecz w nowym ujęciu. Powstawały też organizacje i związki uczonych (akademie, towarzystwa) mające na celu intensyfikację badań naukowych i przekazywanie nowych idei w ramach grupy specjalistów. Z jednej strony konieczna była wymiana myśli między uczonymi wszystkich dziedzin i dyscyplin oraz wszelkimi twórcami kultury, a z drugiej, wobec pojawiania się dużej liczby nowych dyscyplin naukowych, współpraca i wymiana myśli w węższym gronie specjalistów. Najważniejszą jednak ideą edukacyjną było powołanie wyższych szkół technicznych. Były to politechniki, a więc uczelnie, w których nauczane były różne przedmioty techniczne w oparciu na ich matematycznej podstawie. Matematyzacja nauk przyrodniczych pociągnęła za sobą również matematyzację różnych technik i powstanie nauk technicznych.

Jak wiadomo, w roku 529, decyzją cesarza Justyniana, nastąpiło zamknięcie Akademii Platońskiej i dopiero w roku 1438 we Florencji, pod wpływem wykładu **Gemistosa Plethona**, Kosma Medyceusz założył **Akademię Florencką**. Celem akademii było kultywowanie i propagowanie poglądów Platona oraz neoplatończyków. Kierownikiem szkoły został **Marsilio Ficino** (1433–1499) – tłumacz dzieł Platona, Plotyna, Jamblicha i Proklosa na łacinę. Akademia istniała do 1522 roku, kiedy to z powodów politycznych uległa likwidacji. Akademia gromadziła nie tylko filozofów, lecz także wielu uczonych, artystów, polityków, księży i lekarzy, którzy byli zafascynowani Platonem i chcieli współfilozofować w duchu Platona. Przez Akademię przeszło wiele znaczących osób, w tym **Jan Bessarion** (1408–1472) – patriarcha Konstantynopola, protektor i komentator dzieł Platona, **Jan Pico della Mirandola** (1463–1494), **Michał Anioł** (1475–1564) i wielu innych. Pod koniec życia Ficino sporządził listę około osiemdziesięciu swoich uczniów i przyjaciół, jednak lista ludzi związanych z Akademią jest znacznie dłuższa. Idee wypracowane w Akademii oddziaływały na ośrodki naukowe w całej Europie (w tym na Paryż, Kraków, Budapeszt, Tybingę, Lipsk) oraz inspirowały wielu ówczesnych humanistów (Paracelsusa, Kallimacha, Kopernika, Bruna). Po śmierci Ficina kierownictwo Akademii przejął Francesco Zanoli Cattani da Diacceto (1522), który rozwijał poglądy mistrza, szczególnie neoplatońską filozofię miłości. Cechą charakterystyczną prac Akademii była szerokość i uniwersalność rozważanych problemów (zagadnienia filozoficzne, teologiczne, prawnicze, polityczne, medyczne, literackie, artystyczne), jednak badanych w porządku intelektualnym. Chodziło o budowanie więzi duchowej i wspólnoty osób, które traktowały podejmowane problemy jako nierozdzielną całość i szukały związków między nimi i podstaw ich jedności (była to podwójna zasada jedności: osób i kultury w różnych jej obszarach). Działalność sprowadzała się do prowadzenia uczonych dysput, dyskusji filozoficznych, organizowania uroczystych sympozjów oraz prowadzenia działalności dydaktycznej[1].

Odnawiając ideę akademii, przyjęli jej twórcy dwa podstawowe założenia dotyczące człowieka i kształcenia. Było to odniesienie się do idei paidei i podniesienie kwestii samowiedzy na najwyższy poziom. Trzeba mieć pełną świadomość swojej ignorancji, ale też głupoty i nędzy ludzi w swojej masie. Z drugiej strony, możliwości umysłu ludzkiego są nieograniczone, jest on boski. Te możliwości może jednak rozwijać i osiągnąć dzięki edukacji. Ludźmi stajemy się *de facto* dopiero poprzez opanowywanie kolejnych sztuk wyzwolonych. Dzięki wiedzy i nauce budujemy godność swoją i każdego człowieka oraz osiągamy braterstwo między ludźmi (*humanitas*). Jest to droga mozolna i pełna cierpienia duchowego, trzeba bowiem upokorzyć się poprzez uznanie własnej ignorancji, opanować własne namiętności i słabości, zdobyć się na odwagę wkroczenia na drogę mądrości. Opanowanie sztuk wyzwolonych wymaga tak wielkiego wysiłku, że wydaje się, że przekracza to możliwości ludzkiej natury. W konsekwencji zdobycie się na ten wysiłek intelektualny i duchowy sprawia, że człowiek przekracza własną naturę i wznosi się na najwyższy, boski poziom. Celem wychowania jest pielęgnowanie własnego *daimonion*, tej części siebie, która jest więcej niż ludzka i najbardziej przypomina samego Boga.

W późniejszym okresie powstało wiele różnych akademii czy towarzystw naukowych, związanych z krzewieniem wiedzy, rozwojem konkretnych dziedzin nauki i wymianą myśli.

---

1 Por. M. Ciszewski, *Akademia Florencka,* [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii;* http://www.ptta.pl/pef/pdf/a/akademiaflorencka.pdf

Również we Włoszech w Rzymie została utworzona w 1603 roku **Accademia Nazionale dei Lincei**, jednak jako instytucja (towarzystwo skupiające uczonych o wyjątkowo przenikliwym i błyskotliwym umyśle) ściśle naukowa.

Jedną z bardziej znaczących jest **Akademia Francuska** (*Académie française*), założona w 1635 roku w Paryżu. To towarzystwo naukowe miało charakter uniwersalny: skupiało twórców nauki i kultury z różnych obszarów, a więc filozofów, pisarzy, uczonych, duchownych, lekarzy. W roku 1652 w Schweinfurcie powstaje **Niemiecka Akademia Przyrodników Leopoldina** – najstarsze niemieckie towarzystwo naukowe, skupione na naukach przyrodniczych. Jedną z ciekawszych inicjatyw jest powstała w 1657 roku we Florencji **Accademia del Cimento**. Jej celem było prowadzenie eksperymentów naukowych i stworzenie platformy do współpracy uczonych w badaniach naukowych. Należeli do niej, między innymi, uczniowie Galileusza – G.A. Borelli i V. Viviani. Było to pierwsze towarzystwo *stricte* naukowe w Europie. I chociaż istniało tylko dziesięć lat, jego znaczenie dla kolejnych tego typu inicjatyw było niepodważalne. W Londynie w 1660 roku powstało słynne Towarzystwo Królewskie (**The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge**). Gromadziło najwybitniejszych przedstawicieli nauk matematycznych i przyrodniczych. To w tym towarzystwie wydano *Principia Mathematica* Izaaka Newtona oraz dzieło *Micrographia* Roberta Hooke'a. Ważne jest, że The Royal Society zaczęło wydawać pierwsze czasopismo naukowe „Philosophical Transactions" (od 1665), poświęcone naukom matematyczno-przyrodniczym, natomiast od roku 1682 Leibniz wydaje „Acta Eruditorum". Stopniowo czasopisma naukowe stają się głównym forum wymiany myśli i idei naukowych. W tym samym roku, co „Philosophical Transactions", zaczęto wydawać „Journal des sçavans", było to jednak czasopismo naukowe poświęcone literaturze.

Nieco później, bo w 1666 roku, powstaje **Francuska Akademia Nauk**, a w 1700 roku **Pruska Akademia Nauk** (11 lipca 1700), której inicjatorem był **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716). Łączyła ona badania w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych z naukami humanistycznymi. Duże znaczenie miała też Petersburska Akademia Nauk (Rosyjska Akademia Nauk), otwarta w 1725 roku.

W przypadku Polski towarzystwa naukowe powstawały dopiero w okresie rozbiorów. Miały duże znaczenie dla zachowania tożsamości narodowej i rozwoju poziomu cywilizacyjnego na ziemiach polskich. W 1800 roku powstaje w Warszawie, z inicjatywy Stanisława Sołtyka, **Towarzystwo Przyjaciół Nauk**, w 1815 w Krakowie **Towarzystwo Naukowe Krakowskie** (przekształcone w 1872 w Akademię Umiejętności), a na terenie zaboru pruskiego Towarzystwo Naukowej Pomocy w Wielkopolsce (1841) i Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk (1857). Natomiast w 1901 we Lwowie powstało **Towarzystwo dla Popierania Nauki Polskiej** (Towarzystwo Naukowe we Lwowie).

Dostrzegając coraz większe znaczenie nauk technicznych i ich matematyzację, poszukiwano form wyższego nauczania przedmiotów technicznych. Na początku było to szkoły jednokierunkowe, np. budowy dróg i mostów, sztuk i rękodzieła, akademie górnicze, mechaniczne, gdzie łączono nauczanie poszczególnych umiejętności technicznych z matematyką. Dopiero pod koniec XVIII wieku we Francji w Paryżu powstała Szkoła Politechniczna (1794), która łączyła nauki inżynierskie z naukami matematyczno-przyrodniczymi, a kształcenie prowadziła na bardzo wysokim poziomie. Była to szkoła wielokierunkowa, która dawała ogólne podstawy do dalszego specjalizowania się w uczelniach technicznych. Okazało się, że ta uczelnia stała się kuźnią nowych idei i przyczyniła się do rozwoju nauk technicznych i przyrodniczych. Później powstawały masowo kolejne politechniki europejskie, gdzie na bazie nauk matematyczno-przyrodniczych kształcono w zakresie wielu kierunków technicznych. Już na początku XIX wieku powstają politechniki w Pradze (1806), Wiedniu (1815), Glasgow (1820), Londynie (1824), Karlsruhe (1825), Warszawie (1826), Monachium (1827), Sztokholmie (1827), Dreźnie (1828), i w kolejnych latach dalsze[2].

Rozszerzenie zakresu działania nauk dotyczyło nie tylko obszaru świata materialnego, ale również człowieka i struktur społecznych. Już w założeniach Akademii Florenckiej zauważono, że poprzez opanowanie sztuk wyzwolonych przekraczamy ogromnym wysiłkiem możliwości natury ludzkiej. Wznosimy się na wyższy poziom i uzyskujemy pełną ludzką godność. W późniejszym okresie coraz bardziej eksploatowano tę ideę, traktując edukację jako element przemian społecznych i emancypacji człowieka z ograniczeń społecznych, ale też własnej natury biologicznej. Dlatego głoszono, że konieczna jest edukacja również ludzi z ubogich warstw (nauczanie ludu, propozycja edukacyjna Johanna Heinricha Pestalozziego, 1746–1827), dzieci od najmłodszych lat (Jan Amos Komeński, 1592–1690), również dziewcząt i kobiet (Pestalozzi) oraz osób niepełnosprawnych intelektualnie (Eduard Seguin, 1812–1880). Edukacja miała stać się lekarstwem na biedę, nędzę moralną, upośledzenia, nierówności społeczne, nałogi, bezradność społeczną. Powodowała też wzrost wrażliwości na innych, na sprawy otoczenia spo-

[2] Por. *Politechnika Lwowska* (*1844–1945*), red. R. Szewalski, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993, s. 7–9.

łecznego i przyrodniczego, prowadziła do nawiązywania głębszych relacji i tworzenia nowego środowiska społecznego, często przeciwstawiającego się istniejącym podziałom, oraz umożliwiała pełne korzystanie z podstawowych dóbr cywilizacji i kultury. Chodzi też o pełne uaktywnienie możliwości tkwiących w każdym dziecku, traktowanie go jako pełnego człowieka (a więc wolnego, rozumnego, posiadającego autonomię bytową, mogącego we współdziałaniu z nauczycielem i grupą realizować samego siebie – Maria Montessori, 1870–1952).

W okresie nowożytnym klasyczne uniwersytety nie straciły całkiem na znaczeniu. W początkowym okresie stały się głównie instytucjami nauczania, niechętnie przyjmującymi nowe teorie. Wielu najwybitniejszych uczonych tego okresu nie podjęło kariery uniwersyteckiej (np. Kartezjusz, Leibniz), a działalność naukowa przebiegała w powstałych wtedy akademiach, towarzystwach i grupach badawczych. Sytuacja zmieniła się na przełomie XVIII i XIX wieku, gdy powstawały politechniki, a uniwersytety zaczęły rozszerzać swoją ofertę edukacyjną o nowe dyscypliny naukowe.

2. Nowe obszary badań matematycznych i naukowych w czasach nowożytnych

Śledząc dzieje matematyki od okresu cesarskiego w starożytnym Rzymie, widać brak w tym czasie jakiegoś istotnego *novum*, dominuje nawiązywanie do starych idei, komentowanie starych wyników i ewentualnie próba ich ocalenia. W czasach niemal całkowitego upadku matematyki w Europie trwa ona w Bizancjum, krajach islamu, dalekich Indiach czy Chinach. Pewien rozwój ma miejsce w zakresie algebry, metod numeracji i w badaniach astronomicznych, jest to jednak nieporównywalne wobec rozwoju, jaki miał miejsce w czasach antycznej Grecji, od VI wieku do przełomu III i II wieku p.n.e. Nawet ożywienie matematyczne, jakie obserwujemy od XII wieku w Europie Zachodniej wraz z powstaniem pierwszych uniwersytetów, nie wnosi nic zasadniczo nowego w zakresie matematyki. Rozwija się filozofia scholastyczna, logika, prawo, medycyna, jednak brakuje nowych idei matematycznych i umysłów na miarę Eudoksosa, Euklidesa, Archimedesa, Apoloniusza czy Arystarcha.

Pojawiają się jednak w XIII wieku zwiastuny przełomu, który miał dokonać się za kilka wieków. W pracach **Roberta Grosseteste'a** (1175–1253) oraz jego ucznia **Rogera Bacona** (1214–1292), działających w Oksfordzie, widoczna jest ogromna fascynacja naukami przyrodniczymi i matematyką.

Przywoływane są prace starożytnych, szczególnie dotyczące zjawisk świetlnych, i podjęta jest próba kontynuowania tych dokonań. Grosseteste zaczyna stosować matematykę jako narzędzie badań przyrodniczych i stara się połączyć matematykę nie tylko z poznawaniem rzeczywistości, ale też z jej eksperymentalnym badaniem. Pojawia się nowe podejście do zjawiska światła. Jest to bardzo charakterystyczne dla epoki nowożytnej podejście do zjawisk, wyglądające na niezrozumienie metody badań naukowych. Mianowicie światło jest badane nie tyle w ramach pewnego modelu matematycznego, w oderwaniu od rzeczywistego światła, do którego nie mamy bezpośrednio badawczego dostępu (tak uważali starożytni), ile jako zasada rzeczywistości, jej element, który wprost ma być przedmiotem badań matematycznych. W swoim traktacie *O świetle*[3] (*De luce*) Grosseteste łączy badania metafizyczne, teologiczne, przyrodnicze i matematyczne, nie widząc różnic metodologicznych między tymi dyscyplinami[4]. Podobnie czyni Roger Bacon, który stara się stosować matematykę do wszystkich obszarów rzeczywistości, bez żadnych ograniczeń. Zafascynowany matematyką widzi jej nieograniczone możliwości, nie tyle poprzez jej ewentualny rozwój w przyszłości, ile od razu – tu i teraz. Traktuje matematykę jako uniwersalne narzędzie badań w naukach przyrodniczych, psychologii, teologii i praktycznie wszędzie[5].

Również ambitne są matematyczne badania uczonych XIV wieku nad nieskończonością, ruchem, continuum oraz cechami jakościowymi świata. Są to próby znalezienia odpowiedzi na problemy, jakie zrodziła metoda scholastyczna, chcąc połączyć naukę i wiarę, to, co skończone, z tym, co nieskończone, wieczność z doczesnością, ruch i spoczynek, itd. Są to badania Mikołaja z Oresme (nad nieskończonymi sumami oraz nad intensywnością cechy i nauka o szerokościach form), Jana Buridana (nad zjawiskiem ruchu i wprowadzenie pojęcia impetu) oraz Thomasa Bradwardina (nad problem przestrzeni, czasu i continuum). Te elementy zdawały się być poza zasięgiem matematyki i podjęcie tych badań stanowiło nowe dla niej wyzwanie, co ciekawe, zakończone po pewnym czasie częściowym sukcesem. U podstaw tych badań tkwią jednak badania logiczne **Williama Ockhama** (1285–1349), którego należy zaliczyć do jednego z najwybitniejszych logików od czasu Arystotelesa i Chryzypa aż do XIX wieku, gdy pojawiła się grupa wybitnych

[3] R. Grosseteste, *O świetle, czyli o pochodzeniu form*, tłum. M. Boczar, [w:] M. Boczar, *Grosseteste*, Wydawnictwo Akapit, Warszawa 1994, s. 132–139.

[4] M. Trepczyński, *Światło jako arche świata. Metafizyka światła Roberta Grosseteste*, „Ethos" 2017, t. 30, nr 3(119), s. 93–115.

[5] Por. G. Molland, *Roger Bacon's knowledge of mathematics*, [w:] *Roger Bacon and the sciences,* red. J. Hackett, Leiden 1997, s. 151–174.

logików (Bolzano, Boole, Frege). Biorąc udział w gorącej dyskusji na temat ontologicznego statusu powszechników (uniwersaliów, pojęć ogólnych), głosił stanowisko nominalistyczne. Zakładał, że używane w matematyce (i w innych naukach) pojęcia są tylko nazwami, którym w rzeczywistości nic nie musi odpowiadać. Umysł jest wolny w konstruowaniu pojęć ogólnych, niezwiązany (jak chciał, na przykład, Arystoteles) z bytami, z których te pojęcia są otrzymywane (w procesie poznawania, indukcji, abstrakcji, uogólniania). Rozważał zasady logiki trójwartościowej oraz kwestie negacji koniunkcji i alternatywy (badając różne spójniki logiczne), ale nie doszedł do sformułowania odpowiednich praw, które pojawiły się dopiero w czasach współczesnych (prawa de Morgana czy logika trójwartościowa Łukasiewicza). Jego nazwisko najbardziej kojarzone jest z tak zwaną brzytwą Ockhama („nie mnożyć bytów ponad potrzebę”), która wprowadza zasadę prostoty do rozumowania i konstruowania teorii. Raczej nie jest to zasada minimum (wprowadzona w późniejszym czasie jako metazasada pozwalająca poznawać prawa przyrody) stwierdzająca, że natura wybiera zawsze najprostszą, najkrótszą drogę do realizacji swoich celów, lecz wskazówka mówiąca, że argumenty i wyjaśnienia powinny być jak najprostsze, a opis ma być pozbawiony nic niewnoszących ozdobników i pustych „wzmacniaczy” językowych. Większa liczba wyjaśnień i używanie dodatkowych zwrotów nie sprawi, że opis będzie jaśniejszy, a argumentacja pewniejsza i mocniejsza. Możemy (i powinniśmy) jednak wprowadzać nowe pojęcia, bo dzięki nowej siatce pojęć jesteśmy w stanie dostrzec i uchwycić zjawiska, które są poza zasięgiem prostych bezpośrednich doświadczeń. Nominalizm Ockhama dał odwagę do budowania nowego systemu nazw i znaczeń. W ten sposób stał Ockham nie tylko u podstaw przełomu nowożytnego w nutach, ale również otworzył kluczowy dla nauki obszar badań semiotycznych. Semiotyczne rozważania Ockhama przeżywają swój renesans dopiero w czasach nam współczesnych, a od drugiej połowy XX wieku są one wykorzystywane jako ważne źródło badań[6].

Thomas Bradwardine (1295–1349) jest jednym z najwybitniejszych uczonych średniowiecznych analizujących podstawy nauki. Otwiera nowe obszary badań, nie odcinając się jednak od nauki swoich poprzedników. Podejmuje dogłębne badania tekstów fizycznych Arystotelesa dotyczących zjawiska ruchu oraz struktury continuum. Ma to miejsce w pracy *De proportionibus velocitatum in motibus,* wydanej w 1328 roku. Z jednej strony idzie torem myśli greckiego filozofa, z drugiej – poddaje jego poglądy wyraźnej

[6] A. Goddu, *Connotative concepts and mathematics in Ockham's natural philosophy*, „Vivarium” 1993, t. 31, nr 1, s. 106–139.

krytyce. Jego celem jest wykorzystanie narzędzi matematycznych do badania zjawiska ruchu, siły, przestrzeni i czasu, a jak wiadomo – czegoś takiego nie uznawał Arystoteles. Arystoteles posługuje się w swojej *Fizyce* prawem, które stwierdza, że prędkość ciała jest wprost proporcjonalna do działającej na niego siły i odwrotnie do oporu, jaki stawia (wiąże się to z jego ciężarem). W celu pokazania fałszywości tego prawa Bradwardine wykonuje pewien eksperyment myślowy: jeśli przy ustalonej sile działającej będziemy konsekwentnie zwiększać ciężar ciała (opór), to w pewnym momencie ciało nie zostanie poruszone, a więc prędkość musiałaby być zero, czego prawo Arystotelesa nie dopuszcza. Modyfikuje prawo Arystotelesa, zakładając, że arytmetyczny przyrost prędkości odpowiada geometrycznemu przyrostowi stosunku siły do oporu. Ten drugi człon proporcjonalności miałby więc przyrastać szybciej. Prawo nie jest również prawdziwe, jednak lepiej oddaje rzeczywistość[7].

Broni również arystotelesowskiej koncepcji mówiącej, że przestrzeń ma strukturę continuum (*Tractatus de continuo*), stosując matematyczne argumenty. Zauważa, że każde continuum jest złożone z nieskończonej liczby continuów tego samego rodzaju. Według niego niemożliwe jest, aby continuum składało się z nieskończenie wielu niepodzielnych. Są to dla niego badania na pograniczu matematyki, fizyki i filozofii. W pracy *On „it begins" and „It ceases"* pojawia się idea kresu, chociaż tylko w zarysach (pojęcie ważne w analizie matematycznej). Bradwardine analizuje odcinek czasowy i zauważa, że posiada on pierwszą chwilę, ale nie posiada ostatniej. Koniec odcinka czasowego oznaczony jest poprzez pierwszą chwilę, w której już ten odcinek nie istnieje. W swojej *Geometria speculatica* (*Geometria teoretyczna*) wykracza poza geometrię euklidesową, rozpatrując wielokąty gwiaździste oraz zagadnienie wypełniania przestrzeni przez przylegające do sobie wielościany (wypełnienie jest możliwe przy pomocy sześcianów oraz czworościanów foremnych). Analizuje również teorię stosunków, odwołując się do prac Zenodorosa i Archimedesa. Bada zagadnienie kąta styczności, którego niewspółmierność w stosunku do kątów prostoliniowych jest, według niego, inna od niewspółmierności przekątnej kwadratu do jego boku[8]. We wszystkich tych badaniach Bradwardine'owi chodzi o to, aby pozostając w granicach filozofii Arystotelesa, zbadać metodami matematycznymi

---

[7] A.G. Molland, *An Examination of Bradwardine's Geometry,* „Archive for History of Exact Sciences" 1978, nr 19, s. 113–175.

[8] J.E. Murdoch, *Thomas Bradwardine: mathematics and continuity in the fourteenth century,* [w:] *Mathematics and its applications to science and natural philosophy in the Middle Ages,* Cambridge – New York 1987, s. 103–137.

ogólne właściwości przestrzeni, czasu i ruchu. Faktycznie jednak nastąpiło wyjście poza arystotelesowski schemat i otwarcie matematycznych badań nad wielkościami nieskończonymi (nieskończenie małymi), co w pełni dokonało się dopiero w XVII wieku.

W przypadku **Mikołaja z Oresme** (1323–1382) mamy do czynienia z najwybitniejszym matematykiem okresu średniowiecza. Podobnie jak idee Bradwardine'a oraz Ockhama, również jego pomysły mają kluczowe znaczenie dla matematyki czasów nowożytnych. To u niego w sposób wyraźny pojawia się idea uogólnionego układu współrzędnych (jak wiemy, Apoloniusz i inni uczeni hellenistyczni stosowali tę ideę jedynie do konkretnych przypadków, nie dostrzegając jej ogólnego charakteru). W pracy *De configurationibus qualitatum et motuum* stosował wykres do ustalenia zależności zmiennej wielkości od innej. Praca Mikołaja z Oresme była wielokrotnie wznawiana i dostępna. Musiała mieć więc wpływ na innych matematyków. Kolejnymi uczonymi stosującymi tę metodę są, uznawani za jej odkrywców, siedemnastowieczni matematycy Kartezjusz i Fermat, którzy pokazują jej liczne zastosowania do algebraizacji geometrii[9]. Mikołaj z Oresme udowodnił też twierdzenie, które mówi, że odległość pokonana w ustalonym czasie przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest równa odległości pokonanej przez ciało poruszające się w połowie tego czasu ruchem jednostajnym (twierdzenie Mertona). Kolejnym obszarem badań była dla Mikołaja z Oresme „nieskończoność", a dokładniej – badał zbieżność szeregów nieskończonych.

Dla dalszego rozwoju fizyki matematycznej kluczowe są idee w zakresie rozumienia czasu i przestrzeni. Mikołaj z Oresme traktuje czas inaczej niż Arystoteles – niezależnie od ruchu (to czas jest pierwotnym pojęciem, a nie ruch), również przestrzeń traktuje jako kategorię pozwalającą uchwycić położenie ciała (położenie danego ciała jest przestrzenią, które to ciało zajmuje). Dla Arystotelesa to granica otaczającej dane ciało przestrzeni określała położenia tegoż ciała. To odwrócenie zależności pozwoliło na traktowanie ruchu jako funkcji zmiany położenia i czasu, a w konsekwencji – na jego matematyzowanie[10]. Analizując ruchy ciał niebieskich, zauważył, że stosunki okresów dwóch ciał niebieskich mogłyby być niewspółmierne, a to wcale nie musiałoby przeczyć doskonałości tych ruchów. Istotne jest odpo-

[9] L. Gribaudo, *Was Oresme a precursor of Descartes?* (Italian), „Atti della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali" 1979, t. 113, nr 1–2, s. 155–164.

[10] M. Clagett, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Quantities and Motions,* Madison 1968.

wiednie ich zharmonizowanie, a może ono być dokonane na innej podstawie, niekoniecznie na stosunkach współmiernych. Do jego czasu zakładano, że takie stosunki (współmierne) są doskonalsze. To myślenie przełamało kolejne „tabu" związane z rozumieniem doskonałości świata i jego urządzenia[11]. Przełamuje również opory związane z ruchem Ziemi, rozpatrując go jako realną możliwość (chociaż w końcu nie przyjmuje tej hipotezy), a badając spadek swobodny, formułuje prawo tego spadania, przygotowując grunt dla teorii Galileusza. W dwóch pracach rozwija teorię stosunków: *De proportionibus proportionum* oraz *Algorismus proportionum.* Druga z tych prac ma znaczenie szczególne, Oresme rozszerza bowiem w niej teorię stosunków, wprowadzając stosunki *n*-krotne oraz stosunki stopni ułamkowych, co odpowiada pierwiastkom różnych stopni. Było to wprowadzenie do teorii logarytmów rozwiniętej w XVI wieku.

Najważniejsza jest jednak stworzona przez Mikołaja z Oresme teoria szerokości form. I znowu miało tu miejsce przygotowanie do budowanej od XVII wieku teorii funkcji i jej graficznego przedstawienia. Poprzednik Mikołaja z Oresme, Duns Scotus (Jan Duns Szkot), głosił teorię wielości i zmienności form, w polemice z Arystotelesem i św. Tomaszem, oraz przyjmował, że forma jest to zmysłowo odczuwalna właściwość rzeczy. Forma może się tak zwiększać, jak i zmniejszać. Odrzucał zatem uniwersalny hylemorfizm, według którego każdy byt składa się z materii i jednej formy, przy czym materia jest całkowitą potencjalnością, a forma aktualnością. Dla Scotusa tak forma, jak i materia mają w sobie pewien element aktualności oraz potencjalności.

Przed Mikołajem z Oresme teorię szerokości form rozwijał **Richard Swineshead** (czternastowieczny angielski matematyk i filozof, zwany Kalkulatorem) w książce *Liber calculationum* (*Księga obliczeń*). Twierdzi on, że przy równomiernym wzroście intensywności formy (może to być wzrost ciepłoty, zagęszczenia, prędkości, itd.) średnia intensywność w pewnym przedziale jest średnią arytmetyczną intensywności początkowej i końcowej[12]. Kalkulator dla pojęcia „zmiana intensywności formy" używał również terminu „zmiana jakości" lub „strumień (*fluxus*) jakości". Prace Kalkulatora były kilkakrotnie wydawane, dobrze znane w XVII wieku i stały się podstawą teorii fluksji Newtona. Natomiast rozwinięcia teorii intensywności form i nadania jej postaci ogólnej, bardziej przejrzystej i praktycznej, dokonał Oresme w pracy *De configuratione qualitatum,* wydanej przed 1371 rokiem. Zauważa w niej, że „intensywność jakości ciągłych wielkości mierzalnych zależy

[11] E. Grant, *Nicole Oresme and the Commensurability or Incommensurability of Celestial Motions*, „Archive for History of Exact Science" 1961, t. 1, s. 420–458.

[12] A.P. Juszkiewicz, *Matematyka w wiekach średnich,* s. 374.

od ich ekstensywności, od ich swego rodzaju rozciągłości (od *extenso* – rozciągłość), np. prędkość ruchu ciała zależy od potrzebnego do tego ruchu czasu”[13]. W tym przypadku prędkość byłaby szerokością rozciągłości, jaką jest czas. Na linii poziomej można zaznaczać ekstensywność, a prostopadle w każdym punkcie szerokość intensywności. W ten sposób powstaje krzywa i figura płaska ograniczona tymi liniami.

Można mówić o jakościach liniowych (gdy intensywność jest linią prostą), można też rozpatrywać jakości powierzchniowe (są to bryły o płaskich podstawach) i bryłowe (są to pewne bryły czterowymiarowe). Oresme bada głównie jakości liniowe. Szczególnie ciekawy jest przypadek ruchu badany przez Oresmego, gdy odcinek poziomy odpowiada odcinkowi czasu, w jakim dokonuje się ruch, a krzywa nad odcinkiem oznacza prędkość w poszczególnych chwilach ruchu. Widać, że pole pod krzywą przedstawia pokonaną drogę, chociaż Oresme o tym nie mówi[14].

Teoria szerokości formy wykładana na uniwersytetach w kolejnych latach stała się kluczowym elementem powstałych w XVII wieku wielu nowych teorii, w tym geometrii analitycznej Fermata i Kartezjusza, dynamiki Galileusza oraz geometrii niepodzielnych Cavalieriego[15]. Zastanawiające jest podobieństwo teorii wspomnianych uczonych nowożytnych do pomysłów Mikołaja z Oresme. Żaden z nich na te źródła się jednak nie powołuje. Możemy podejrzewać albo celowe przemilczanie dla podkreślenia swoich zasług, albo brak znajomości tej literatury i ponowne odkrycie tych samych rzeczy. Istnieje jeszcze inna możliwość. Tak uczeni średniowieczni, jak i okresu nowożytnego studiowali dzieła uczonych starożytnych, a te idee tam już się znajdowały, na przykład u Archimedesa czy Apoloniusza.

Zanim jednak przejdziemy do omówienia dorobku matematyków okresu nowożytnego, zwróćmy uwagę na postać **Mikołaja Kuzańczyka** (1401–1464), którego idee stały się wyznacznikiem czasów nowożytnych, a są inspiracją również dla nauki współczesnej. W 1440 roku Kuzańczyk publikuje pierwsze i najbardziej znane dzieło *De docta ignorantia.* Pokazuje w nim – z jednej strony – ograniczenie wiedzy ludzkiej, jeśli chodzi o poznanie najważniejszych praw przyrody (nie mówiąc już o kwestiach teologicznych), a z drugiej – pokazuje drogę do prawdziwego poznania, której punktem wyjścia jest uznanie własnej niewiedzy, a następnie przejście przez poznanie matematyczne (które pokazuje, jak usuwać sprzeczności poznania zmysłowego oraz intelektualnego) aż do mistycznego. Zauważmy, że jest to opisa-

[13] Ibidem, s. 377.

[14] Ibidem, s. 378–381.

[15] Ibidem, s. 383.

nie i powtórzenie platońskiej metody hipotetyczno-dedukcyjnej. Na gruncie czysto naukowym nie możemy zbudować wiedzy absolutnej, do tego potrzebny jest wyższy rodzaj poznania. Kuzańczyk jest autorem wielu prac matematycznych, w tym: *Quadratura circuli, De mathematicis complementis, De mathematica perfectione, Aurea propositio in mathematicis, Declaratio rectilineationis curvae*. Analizował w nich osiągnięcia i problemy uczonych starożytnych oraz średniowiecznych (Euklidesa, Bradwarine'a). Interesowało go szczególnie zagadnienie nieskończoności (wielkości nieskończenie duże i nieskończenie małe). „Poziom" nieskończoności pozwala pogodzić sprzeczności, które pojawiają się w ramach wielkości skończonych i wydają się nie do usunięcia. Nie istnieje więc proporcja między tym, co skończone, a nieskończone. Możemy przybliżać koło wielokątami (o coraz większej liczbie boków) wpisywanymi w to koło, jednak nigdy nie sprawimy, że wielokąt stanie się kołem. Przez poznawanie kolejnych cząstkowych prawd nie osiągniemy nigdy pełnej prawdy, gdyż prawda jest niepodzielna. Jeśli wczytamy się w dowód Archimedesa dotyczący obliczania pola koła, to zauważymy, że „prawda" o polu koła nie jest otrzymywana poprzez przybliżanie pola koła kolejnymi wielokątami wpisywanymi i opisywanymi, lecz poprzez ścisły matematyczny dowód. Jest to dowód „nie wprost", który dopiero mówi nam prawdę o tym, jakie jest pole koła. Wcześniej (poprzez metodę kolejnych przybliżeń i procedur granicznych) mieliśmy tylko pewne przypuszczenie. Dowód *a contrario* przenosi nas jakby od razu na poziom nieskończony[16].

Kuzańczyk miał bardzo śmiałe hipotezy astronomiczne. Przyjmował jednorodność świata, a więc zakładał, że nie ma wyróżnionych punktów w Kosmosie, że jest on nieskończony, a Słońce jest tylko jedną z wielu gwiazd, wokół których też mogą krążyć zamieszkałe planety. Z tego punktu widzenia przyjmował też istnienie ruchu Ziemi, jak i wszystkich innych ciał niebieskich.

Te hipotezy nie miały ani wystarczającej podbudowy teoretycznej, ani nie mogły mieć oczywiście potwierdzenia empirycznego. W kolejnych wiekach uzyskiwały swoje matematyczne i fizyczne opracowania i okazały się ważne dla wyjaśniania zjawisk astronomicznych i opisu świata. Przykładowo, założenie o jednorodności świata jest kluczowe w konstrukcji współczesnych modeli kosmologicznych. Dokonywane obserwacje są zależne od przyjętego modelu geometrycznego, do konstrukcji którego przyjmuje się założenie, że w dużej skali Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Ta idealizacja, nazwana zasadą kopernikańską, głosi, że obraz Wszechświata widziany z dowolnego punktu i w dowolnym kierunku jest identyczny.

[16] M. Kuzańczyk, *O oświeconej niewiedzy*, tłum. I. Kania, Wydawnictwo Znak, Kraków 1997, s. 67–100.

Upraszcza to zdecydowanie analizę obserwabli kosmologicznych i pozwala na ich ujęcie w system równań różniczkowych zwyczajnych, a więc pewnego układu dynamicznego[17].

Jedną z charakterystycznych cech badań matematycznych okresu nowożytnego jest to, iż prowadzone były przez uczonych spoza systemu uniwersyteckiego. Byli to ludzie często wykształceni w innych dyscyplinach, matematyką interesowali się poza swoją oficjalną działalnością, a wymiana myśli dokonywała się w organizowanych grupach badawczych, podczas spotkań i poprzez korespondencję. Umożliwiało to wypracowywanie całkiem nowych idei, chociaż większość z nich, mniej lub bardziej wyraźnie i oficjalnie, nawiązywała do dorobków swoich poprzedników.

Pierre de Fermat (1601–1665) świadomie w swojej pracy nad geometrią analityczną nawiązywał do geometrii starożytnych, w odróżnieniu od Kartezjusza, który traktował tę geometrię jako swoje wyłączne dzieło. Fermat dowodzi wiele twierdzeń Apoloniusza (i innych matematyków greckich), które znajdują się u Pappusa (bez dowodu). Czerpie nieustannie z dzieł starożytnych i uważa je za kluczowe źródło wiedzy w zakresie „nowej" geometrii, którą on tylko uzupełnia[18]. Geometria Kartezjusza również korzysta z wyników Apoloniusza, jednak wygląda, jakby Kartezjusz nie zdawał sobie z tego sprawy. Zarzuca Fermatowi, że korzysta z jego wyników, mimo iż źródło ich prac jest to samo – prace Apoloniusza. Fermat, będąc zawodowym prawnikiem, zajmował się matematyką hobbystycznie. Dlatego był po prostu zainteresowany dowodzeniem twierdzeń geometrycznych, a nie szukaniem swojej matematycznej chwały. Dążył raczej do odtworzenia prac starożytnych matematyków, o których była wzmianka (czasem z wykazem twierdzeń) u Pappusa. Jedyna praca, która został za jego życia wydrukowana, to *De Maximis et Minimis* (O największych i najmniejszych wielkościach), w której stosuje metodę współrzędnych (analityczną) do wyznaczania stycznych do krzywych, przedstawia algebraiczne podejście do geometrii oraz odtworzoną przez niego pracę Apoloniusza *De Locis Planis* (Τόποι ἐπίπεδοι). I ta właśnie praca Fermata wywołała silną reakcję Kartezjusza, zarzut o nieodwołanie się Fermata do jego wyników i sprowokowała go do pokazania znacznie większej ogólności metody, którą przedstawił w *Geome-*

17 Por. M. Szydłowski, P. Tambor, *Kosmologia współczesna jako efektywna teoria Wszechświata – studium metodologiczne*, źródło: https://www.kul.pl/files/57/working_papers/szydlowski_tambor_2008f.pdf [stan z 10.06.2021].

18 C. Jensen, *Pierre Fermat's method of determining tangents of curves and its application to the conchoid and the quadratrix*, „Centaurus" 1969, nr 14, s. 72–85; M.S. Mahoney, *Fermat's mathematics*: *Proofs and conjectures*, „Science" 1972, t. 178, s. 30–36.

trii. Ta polemiką okazała się bardzo płodna, bo dzięki niej Kartezjusz pokazał wiele nowych zastosowań „swojej" geometrii analitycznej i jej ogólność[19].

Zauważmy jeszcze, że pojawiająca się u Oresmego zależność między rozciągłością a szerokością zawiera w sobie ideę zależności funkcyjnej, tak istotną dla rozwoju matematyki nowożytnej. Nie przedstawił on tej zależności algebraicznie, a jedynie graficznie, chociaż wszystkie elementy niezbędne do jej pełnego sformułowania znajdowały się w teorii szerokości formy. Wydaje się, że w jej ogólności tkwią jeszcze inne możliwości, które nie były jednak rozwijane.

Przyjmuje się dosyć powszechnie, że na początku nowożytności miała miejsce rewolucja naukowa, która całkowicie zmieniła obraz nauki. Przede wszystkim sam **Mikołaj Kopernik** (1473–1543) uznawany jest za jedną z głównych przyczyn tej rewolucji, poprzez przyjęcie i opracowanie modelu heliocentrycznego świata (*De revolutionibus orbium coelestium* zostało wydane w roku 1543 – roku śmierci Autora). Jednak, jak zauważyłem wcześniej, w przypadku teorii Kopernika nie można mówić o rewolucji naukowej, istnieje bowiem ciągłość merytoryczna kopernikowskiego modelu matematycznego z modelem ptolemejskim. Mamy też podjęcie przez niego idei Arystarcha oraz uczonych XIV i XV wieku. Były to z jednej strony idee nowe, związane z próbą budowania nowego modelu świata, ale występujące w odniesieniu do teorii wówczas obowiązujących. U Kopernika pojawiło się jednak otwarcie nowego obszaru badań, który był istotny dla nowożytnego przełomu w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych. W teorii geocentrycznej Ptolemeusza nie istniała spójna teoria opisująca ruchy wszystkich planet w ziemskim układzie planetarnym, były to faktycznie niezestrojone ze sobą teorie dla poszczególnych planet. Nie można też było ustalić ich kolejności położenia względem Ziemi, gdyż się ona zmieniała w czasie. Kopernik dał spójny obraz systemu planetarnemu jako całości ujętej w prostym matematycznym modelu: centralne Słońce i kolejne planety, poczynając od Merkurego, krążące wokół Słońca w ustalonej kolejności. Mamy więc jeden model matematyczny opisujący w sposób jednoznaczny układ planetarny. Matematyka opisuje rzeczywistość, a nie tylko konstruuje różne alternatywne teorie, którym nie musi przysługiwać cecha prawdy czy fałszu. Wprowadzenie ruchów Ziemi (wirowego, obrotowego i precesyjnego) usunęło wiele „fikcyjnych" konstruktów teoretycznych, takich jak epicykle, deferenty, ósma sfera, kryształowe sfery. W modelu matematycznym używamy tylko tych pojęć, które odpowiadają obserwowalnym obiektom fizycznym.

[19] W.F. Asmus, *Descartes,* s. 242–253.

Z drugiej strony – ruch Ziemi wydawał się sprzeczny z doświadczeniem potocznym (zdroworozsądkowym) jej stabilności. Jedną z ważniejszych cech nowej nauki było jednak założenie, że doświadczenie naukowe może się zasadniczo różnić od doświadczenia potocznego i je przekraczać. Teoria Kopernika zmierzała w kierunku ukazania jednorodności świata. Zniosła wyróżnioną pozycję Ziemi jako centrum geometrycznego świata i miejsca naturalnego grawitacyjnego ciążenia ciał ważkich. Wszystkie ciała niebieskie posiadały, tak jak Ziemia, zdolność naturalnego przyciągania. Natomiast wobec ogromu świata, również rozmiary Słońca były znikome i jego centralne miejsce we wszechświecie było tylko pozorne (lokalne). W systemie Ptolemeusza średnica wszechświata, ograniczonego sferą gwiazd stałych, wynosiła jedynie 20 tysięcy średnic Ziemi. Natomiast Kopernik, dostrzegając rzeczywiście astronomiczne rozmiary świata, wyrzucił ze swojego modelu domykającą świat sferę, jako kolejną teoretyczną, nieobserwowalną fikcję. Założył, że badanie zagadnienia skończoności (czy nieskończoności) świata nie leży w gestii badań naukowych, lecz filozoficznych[20]. W swojej pracy *O obrotach sfer niebieskich* przedstawia stosunkowo prosty, matematyczny model świata, który możemy badać metodami matematycznymi i eksperymentalnymi. Świat w tym modelu charakteryzuje się jednorodnością i jednością (cały badany jest przez te same prawa). Otwiera tym samym ogromne pole badań dla matematyki i źródło inspiracji dla powstawania nowych narzędzi badawczych. Pokazuje bowiem, że jest możliwe badanie całości świata przy pomocy samej matematyki i nauk z nią związanych.

Galileo Galilei (**Galileusz**, 1564–1642) dostrzega wielkość teorii Kopernika i staje się jej wielkim orędownikiem. Głosi jej prawdziwość mimo braku eksperymentów potwierdzających jej założenia. Z punktu widzenia metodologii F. Bacona było to podejście nieracjonalne. Jednak, zgodnie ze swoim podejściem do nauki, przyjmuje, że prawdziwość teorii jest związana z modelem materialnym świata, który możemy badać na sposób matematyczny, a taki model świata ukazał Kopernik. Świat Ptolemeusza dlatego nie jest prawdziwy, bo nie dało się go opisać w pełni matematycznie. Natomiast projekt Kopernika dawał taką możliwość. Był to jednak projekt, który trzeba było kontynuować. Galileusz podejmuje więc wysiłek budowy nowej matematyki (i szerzej, nowej nauki), przy pomocy której będzie można w sposób jednolity opisać całą strukturę świata i dokonywane w nim ruchy, zmiany.

Najważniejsze dzieło Galileusza to *Dialogi dotyczące dwóch nowych nauk*. Spędził nad nimi osiemnaście lat bardzo intensywnej pracy, a *de facto*

---

[20] Por. *Mikołaja Kopernika „O obrotach. Księga Pierwsza”,* Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk, Łódź 1987, s. 100–119.

praca jest syntezą ponad trzydziestu lat badań naukowych. Książka ta wychodzi w 1638 roku, a więc na cztery lata przed śmiercią Galileusza, i można jej wydanie uznać za początek nauki nowożytnej. Sam Galileusz określa to dzieło jako swoje największe osiągnięcie, a trzeba je uznać za pracę mistrzowską, jedną z największych, jakie powstały w dziejach nauki. Po lekturze tego dzieła znany włoski uczony i teolog Paolo Sarpi w zachwycie powiedział, że „aby dać nam naukę o ruchu, Bóg i… Natura połączyli ręce i stworzyli intelekt Galileusza"[21].

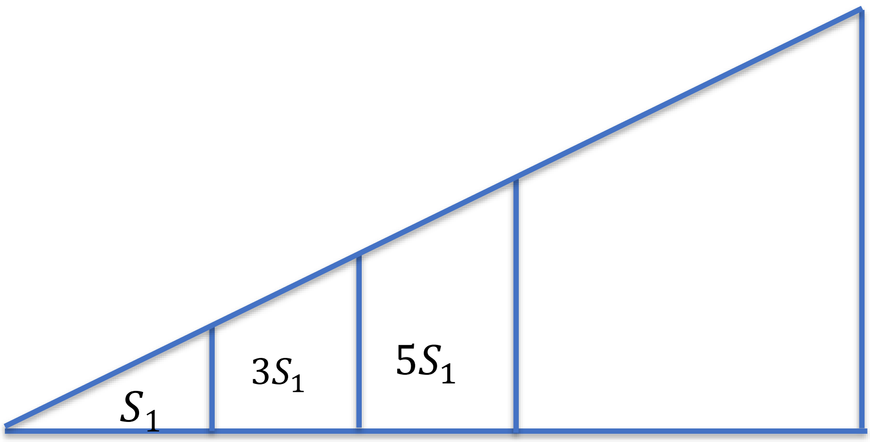
Rozpoczynając swoje *Dialogi*, Galileusz wskazuje, że bada jedno z najstarszych zagadnień – problem ruchu. Zauważa, iż mimo tego, że napisano na ten temat wiele obszernych ksiąg, udało mu się odkryć (przy pomocy eksperymentów i dowodów) kilka znaczących właściwości ruchu, nieznanych do tej pory. Wiedziano, że w spadku swobodnym ciała przyspieszają w sposób ciągły, jednak nie wiedziano, jak to przyspieszenie przebiega. On natomiast odkrył ważną zależność: odległości pokonywane w równych odcinkach czasu przez ciało rozpoczynające swój spadek od spoczynku mają się do siebie tak, jak liczby nieparzyste, poczynając od jedności. Zauważył też, że ruch wystrzelonego pocisku odbywa się po paraboli, czego nikt do tej pory nie odkrył. Naukę o ruchu uważa za najdoskonalszą z nauk i zachęca innych do kontynuowania rozpoczętego przez siebie dzieła. W pracy bada trzy zagadnienia: ruchu jednostajnego, jednostajnie przyspieszonego swobodnego oraz ruchu wymuszonego (na przykład pocisków).

W celu zbadania pojęcia ruchu, analizuje prawa fizyki Arystotelesa (dotyczące ruchu), pokazuje ich fałszywość i formułuje inne, już w postaci matematycznej. Jak wiadomo, Arystoteles wykluczył fizykę z domeny badań matematycznych. Konkurencyjny do jego wizji nauki i miejsca w niej matematyki był projekt Archimedesa, w którym *de facto* fizyka (poprzez swoje zmatematyzowane fragmenty, takie jak: mechanika, hydrostatyka, pneumatyka, itd.) była traktowana jako część matematyki. Istniały więc przed Galileuszem właściwie dwie „fizyki". Jedną z nich była fizyka Arystotelesa, której przedmiotem badań była struktura materii, przestrzeni, czasu i ruchu, oraz fizyka Archimedesa. Pogram badań fizycznych Arystotelesa był rozwijany przez filozofów, a Archimedesa – przez matematyków. Nie istniała więc fizyka jako autonomiczna, jednorodna dyscyplina badawcza. W XIV wieku w pracach Jana Buridana i Mikołaja z Oresme pojawiła się próba połączenia tych dwóch rodzajów badań. Ruch stał się przedmiotem badań matematycz-

[21] G. Galilei, *Dialogues concerning two new sciences,* tłum. H. Crew, A. De Salvio, William Andrew Publishing, Norwich, New York 1914, s. IX.

nych, co nie miało miejsca u Archimedesa, mimo że samo pojęcie ruchu u niego występuje, lecz nie jako zagadnienie badawcze.

Odkrycie przez Mikołaja z Oresme idei funkcji (zależność między intensywnością cechy a szerokością) doprowadziło do „matematyzacji ruchu". Podejmując idee Mikołaja Oresme i traktując prędkość V jako funkcję czasu t, Galileusz doszedł do odkrycia związku $V(t) = at$, wyrażającego prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym (na przykład w spadku swobodnym), przy czym a jest stałym parametrem danego ruchu (tzn. niezależnym od czasu), nazwanym przyspieszeniem.



Zauważył on, że przyrost drogi pokonywanej w kolejnych sekundach ruchu odpowiada kolejnym liczbom nieparzystym, tzn. – jeśli w pierwszej sekundzie ciało pokonało drogę S_1, to w drugiej pokona drogę $3S_1$, w trzeciej $5S_1$, itd. Tym samym droga S pokonana w kolejnych t sekundach ruchu będzie wynosić: $S = S_1 + 3S_1 + 5S_1 + \cdots + (2t-1)S_1 = S_1(1+3+5+ + \cdots (2t-1)) - S_1t$. Ostatnią równość otrzymujemy dzięki spostrzeżeniu (twierdzeniu) pitagorejczyków, że suma kolejnych liczb nieparzystych równa się kwadratowi ich liczby. A ponieważ S_1 jest iloczynem średniej prędkości (równej $\frac{1}{2}V_1$) w pierwszej jednostce czasu ruchu przez czas równy 1 (V_1 jest prędkością po upływie jednej jednostki czasu ruchu, a przyspieszenie ciała $a = \frac{V}{t}$ jest stałe i równe $\frac{V_1}{1} = V_1$), to otrzymujemy prosty wzór na drogę w spadku swobodnym $S = \frac{at^2}{2}$[22]. W przypadku spadku swobodnego a oznacza przyspieszenie grawitacyjne g. Jednak, aby uczynić to ostatnie spo-

[22] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki,* s. 136–139.

strzeżenie, Galileusz musiał odrzucić prawo ruchu Arystotelesa mówiące, że prędkość spadania ciała pod wpływem grawitacji jest zależna od ciężaru ciała (jest wprost proporcjonalna do jego ciężaru)[23], co doprowadziło do sformułowania prostego wzoru na prędkość w spadku swobodnym $V = gt$.

Te wyniki Galileusza miały kluczowe znaczenie dla matematyzacji ruchu i powstania mechaniki nowożytnej. W spadku swobodnym prędkość ciała okazała się wprost proporcjonalna do czasu spadania (a nie, jak chciał Arystoteles, do pokonywanej drogi). Aby do tego wniosku dojść, trzeba było prowadzić rozumowanie w oparciu o przyjęcie funkcyjnej zależności prędkości od czasu. Idea funkcji pozwala bowiem na połączenie dwóch odrębnych wielkości (bytów) w jedną nową całość, bez konieczności ich utożsamiania. Zauważmy, że teoria stosunków Eudoksosa też pozwalała na porównywanie różnych wielkości, jednak nie prowadziła do otrzymywania nowego rodzaju bytu. Dlatego dla starożytnych niemożliwe było na przykład dzielenie odcinków przestrzennych przez czasowe, możemy co najwyżej porównywać odpowiednie stosunki czasu i stosunki przestrzeni, jednak nie możemy z tej proporcji utworzyć jednego nowego bytu. Warto też odnotować, że ukazywana przez Arystotelesa zależność prędkości od pokonywanej drogi nie była ujmowana w formie matematycznego wzoru (stosowanie matematyki do opisu ruchu było metodologicznie „zakazane").

Formułuje też Galileusz kolejne prawa i zasady potrzebne dla budowanej przez niego mechaniki. Zauważył, że w przypadku ruchu jednostajnego nie jest potrzebna żadna siła, która podtrzymuje tę prędkość, siła jest potrzebna do zmiany prędkości (a więc do nadania ciału przyspieszenia). Jest to tak zwana zasada bezwładności. Ponadto wprowadza zasadę względności (nazwaną zasadą względności Galileusza), która stwierdza, że prawa mechaniki są niezmienne we wszystkich układach poruszających się ruchem jednostajnym po linii prostej (układy inercjalne). Innymi słowy, prawa mechaniki są niezmiennikami przejścia między różnymi układami inercjalnymi, nie jesteśmy więc w stanie w oparciu o nie stwierdzić, czy ciało się porusza ruchem jednostajnym prostoliniowym, czy pozostaje w spoczynku. Spoczynek przestaje być absolutny[24].

---

23 Galileusz wykazał wewnętrzną sprzeczność prawa Arystotelesa w następującym rozumowaniu: gdyby obowiązywało to prawo, to dwa ciała o różnych ciężarach A i B $(A < B)$ połączone w jedno spadałyby z prędkością mniejszą od ciała cięższego (bo mniejsze by je spowalniało), a zarazem wiekszą od cięższego (bo jest w sumie cięższe). Tę sprzeczność likwiduje przyjęcie założenia, że prędkość spadania (chodzi o spadanie w próżni) nie zależy od ciężaru ciała.

24 G. Galilei, *Dialogues concerning two new sciences,* H. Crew, tłum. A. de Salvio, William Andrew Publishing, Norwich, New York 1914, s. 153– dalej.

Idee Mikołaja z Oresme, Kopernika i Galileusza były dalej rozwijane przez uczonych nowożytnych. **Johannes Kepler** (1571–1630) pod wpływem obserwacji astronomicznych wykonanych przez Tycho de Brache (1546–1601) sformułował trzy prawa opisujące ruchy planet w systemie heliocentrycznym Kopernika. Zastąpił orbity kołowe elipsami, a Słońce umieścił w jednym z ognisk elipsy (pierwsze prawo Keplera). Zauważył też, że stosunek pola, jakie zakreśla promień wodzący planety, do czasu jest stały (drugie prawo Keplera), oraz że stały jest stosunek kwadratu czasu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu wielkiej półosi orbity (trzecie prawo Keplera). Robert Hooke (1635–1703), w liście do Newtona z roku 1684, zauważył, że prawa Keplera wynikają z prawa odwrotności kwadratów (to znaczy, że siła działająca pomiędzy dwoma ciałami jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości). Kolejnym krokiem było sformułowanie przez Newtona prawa powszechnej grawitacji: $F = G\frac{mM}{r^2}$, gdzie pojawia się uniwersalna stała przyrody G – stała grawitacji; również uniwersalna staje się siła grawitacyjna (którą oddziaływują na siebie wszystkie ciała ważkie w całym Kosmosie) oraz masa jako parametr charakteryzujący wszystkie ciała. Najbardziej kontrowersyjnym założeniem Newtona, związanym z wprowadzaniem kolejnych własności absolutnych charakteryzujących przyrodę, były pojęcia absolutnego czasu i absolutnej przestrzeni (a więc i absolutnego ruchu jako ruchu wobec absolutnej przestrzeni). Wszystkie ciała są zanurzone w takiej przestrzeni, a zdarzenia przebiegają na absolutnej osi czasu. Dowodem na istnienie takich absolutnych charakterystyk miało być istnienie ruchów nieinercjalnych (w których obserwujemy przyspieszenia i występowanie sił bezwładności). Jak wiadomo, takie nasycenie przyrody absolutnymi własnościami spotkało się z oporem, na przykład Leibniza[25].

Jak przedstawiłem w paragrafie dotyczącym projektu badawczego Archimedesa, kluczowe dla podania matematycznego opisu oddziaływania dwóch (lub więcej) ciał było zbudowanie materialnego modelu, w którym ciała są zastąpione przez „punkty materialne" (środki ciężkości tych ciał). Prawa mechaniki Newtona były konsekwencją rozważań Galileusza nad prawami ruchu oraz rozważań Jana Buridana nad możliwością przekazywania sobie wzajemnie ruchu przez ciała (który wprowadził pojęcie „impetu" jako czynnika odpowiedzialnego za poruszanie się ciała, który ciało posiada i może przekazywać innemu, na przykład poprzez zderzenie). Izaak Newton w swoich słynnych *Principiach* (*Philosophiae naturalis principia mathema-*

[25] G. Holton, *Johannes Kepler's universe : its physics and metaphysics*, „American Journal of Physics" 1956, t. 24, s. 340–351.

tica), wydanych w 1687 roku, a więc prawie pół wieku po dziele Galileusza, formułuje nie tylko prawo grawitacji, ale również trzy prawa mechaniki (dynamiki). W tych dwóch teoriach mamy do czynienia z próbą scharakteryzowania przyrody w oparciu o kilka właściwości, ujętych w ramy definicji, oraz prostych formuł matematycznych i zasad. Tymi właściwościami mającymi w pełni opisać przyrodę były: materia, ruch oraz siła. Materię charakteryzował parametr masy (grawitacyjnej, wynikającej z prawa grawitacji, oraz bezwładnościowej, wynikającej z II zasady dynamiki: $F = ma$). Założono, że do ujęcia zjawiska ruchu wystarczą dwa parametry: prędkość oraz przyspieszenie, natomiast siła występowała również w dwóch ujęciach, jako siła grawitacyjna oraz bezwładnościowa (czy dynamiczna). Stara grecka zasada elementarności znalazła swoją nową odsłonę: trzy pojęcia i dwa bardzo proste wzory matematyczne miały opisywać cały świat i wszystkie jego zjawiska. Na tym opierała się rozwijana aż do drugiej połowy wieku XIX filozofia mechanicyzmu, która załamała się wobec odkrycia nowych zjawisk, których nie dało się ani ignorować, ani ująć w ramy mechaniki. Były to zjawiska elektrodynamiczne, termodynamiczne i kwantowe.

Bonawentura Cavalieri (1598–1647) pod wpływem spotkania z Galileuszem zainteresował się nową matematyką. Wymienili między sobą wiele listów, a efektem tej korespondencji i własnych studiów była *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (wydana w 1635 roku) oraz praca na temat stożkowych. W pierwszej z nich rozwija metodę wyczerpywania, stosując teorię wielkości niepodzielnych do obliczania pól i objętości różnorodnych figur geometrycznych. Cavalieri stosuje metodę niepodzielnych, a przez „niepodzielną" danej bryły rozumie jej dowolny płaski przekrój, natomiast bryła jest traktowana jako utworzona ze zbioru nieskończenie wielu takich równoległych niepodzielnych elementów. Przesuwając takie elementy niepodzielne, można otrzymać inną bryłę o takiej samej objętości, jak pierwotna. Formułuje też tam swoje słynne zasady (zasady Cavalieriego):

Jeżeli dwa płaskie elementy (lub bryły) są zawarte między parą równoległych linii (lub równoległych płaszczyzn) i jeżeli długości dwóch odpowiadających sobie odcinków (lub pól odpowiadających sobie powierzchni) otrzymanych jako efekt przecięcia dowolną prostą równoległą do linii wyjściowych (lub płaszczyzną) są zawsze równe, to powierzchnie dwóch płaskich elementów (objętości dwóch brył) są również równe. Cavalieri rozwija też teorię logarytmów w pracy *Directorium Generale Uranometricum.* Prezentuje tabelę logarytmów, w tym logarytmy funkcji trygonometrycznych z ukazaniem ich zastosowania w astronomii. Pojawiają się rozważania dotyczące geometrii płaskiej i sferycznej, w tym dowód twierdzenia o kwadraturze każdego trójkąta sferycznego. Było to rozwijanie wyników starożytnych z wykorzystaniem nowych narzędzi. Próbując zrozumieć praktyczne wykorzystania przez Archimedesa zwierciadeł do zapalania okrętów wroga w czasie oblężenia przez Rzymian Syrakuz, podejmuje badania nad teorią ogniskowej soczewek i opisuje działanie teleskopu zwierciadlanego[26].

Metoda Cavalieriego była rozwijana przez jego uczniów, przede wszystkim przez **Ewangelistę Torricellego** (1608–1647) i **Stefana degli Angeliego** (1623–1697). Mimo nieścisłości, jaka towarzyszyła nowej matematyce niepodzielnych, to dzięki ogromnym możliwościom obliczeniowym, jakie ze sobą niosła, oraz prostym dowodom i konstrukcjom traktowano ją jako królewską drogę, konkurencyjną (a przynajmniej dopełniającą) wobec matematyki antycznej. Dlatego często łączono dowody przy pomocy metody niepodzielnych z badaniami krzywych stożkowych i innych krzywych. Musiało jednak minąć wiele czasu, zanim ta nowa matematyka osiągnęła odpowiednią ścisłość. Dlatego też spotykała się z dużym krytycyzmem. Jednym z ważniejszych krytyków był **Paul Guldin** (1577–1643), szwajcarski matematyk żydowskiego pochodzenia, którego prace stanowiły istotne ogniwo w odtwarzaniu matematyki starożytnej z jednoczesnym rozwijaniem jej w nowym duchu. Wychowany był w rodzinie protestanckiej, w wieku dorosłym przeszedł na katolicyzm i został jezuitą (wysoko wykształconym w dziedzinie teologii). Wtedy odkrył swoje zainteresowania i zdolności matematyczne. Pod kierunkiem Christofera Claviusa zdobył w Rzymie wykształcenie w zakresie astronomii i matematyki klasycznej (euklidesowej). Prowadził korespondencję z Keplerem i wspierał go w jego badaniach astronomicznych.

W latach 1635–1641 wydaje swoje główne dzieło *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* w czterech tomach. Praca poświęcona jest badaniom i obliczeniom środków ciężkości różnych figur geometrycznych, co było, jak wiemy, kluczowe w programie Archimedesa i stanowiło istotny czynnik w budowaniu mechaniki. Guldin przyjmuje, że środek ciężkości dowolnego obiektu jest punktem znajdującym się albo w jego wnętrzu, albo na brzegu, albo na zewnątrz, przy czym wszystkie części tej wielkości (obiektu) z każdej strony mają „równy moment". Znaczy to, że dzieląc tę figurę przy pomocy tego punktu albo prostej czy płaszczyzny przechodzącej przez środek ciężkości, otrzymamy części o równej wadze. Definicja jest bardzo nieprecyzyjna, lecz próbuje uchwycić podstawową in-

[26] Por. P.E. Ariotti, *Bonaventura Cavalieri, Marin Mersenne, and the reflecting telescope*, „Isis" 1975, t. 66, nr 3, s. 303–321; *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 2, s. 190–197.

tuicję środka ciężkości figury. Poza klasycznymi rozważaniami geometrycznymi istotne jest jednak wprowadzenie pojęcia ruchu jako elementu generującego inne figury z danych, z wykorzystaniem pojęcia środka ciężkości. Szczególne znaczenie ma pojęcie obrotu, który Guldin rozumie jako prosty i doskonały ruch kołowy wokół ustalonego punktu, nieruchomej osi (oś obrotu) lub płaszczyzny, który wyznacza pewną kołową wielkość. Tą wielkością może być linia (poprzez ruch punktu), powierzchnia (ruch linii) lub bryła przestrzenna (ruch powietrzni). Przykładowo poprzez obrót półokręgu wokół jego średnicy otrzymujemy koło. Obroty wokół środka ciężkości (lub prostej czy płaszczyzny przechodzącej przez ten środek) mają szczególną moc generacyjną. Guldin formułuje słynną regułę (znaną już z prac Pappusa)[27], mówiącą, że objętość bryły otrzymanej poprzez obrót pewnej płaskiej figury w ustalonej płaszczyźnie wokół osi (która tej figury nie przecina) jest równa iloczynowi pola powierzchni tej figury i odległości przebytej przez środek ciężkości w czasie obrotu. W oparciu o tę regułę bada stożki, walce i inne bryły. Z tego punktu widzenia bada środek ciężkości Ziemi, a więc w naturalny sposób dopuszcza jej ruch obrotowy.

Czwarty tom dzieła Guldina zawiera krytykę metody niepodzielnych Cavalieriego i innych nieklasycznych metod stosowanych wówczas w matematyce. Polemizuje z Cavalierim, argumentując, że nigdy linie nie utworzą powierzchni, a powierzchnie – bryły. Nie dopuszczał nieskończoności do geometrii, będąc całkowitym wrogiem atomistycznej teorii continuum.

Opór Guldina wobec metod nieskończonościowych ma pewne znaczenie dla poprawienia ścisłości tych metod, chociaż nie nastąpiło ich odrzucenie. Ponadto Guldin odrzucał stosowane przez Archimedesa i innych dowody nie wprost (polemizował w tym zakresie z Davidem Rivaltusem) i dążył do podania dowodów bezpośrednich. Podjął się rekonstrukcji matematyki przez zastąpienie dowodów *a contrario* przez dowody wykorzystujące „metodę rotacji i środka ciężkości”[28].

Warto zwrócić uwagę na jeden punkt. Pomimo sporu między Guldinem i Cavalierim obaj zgodzili się, że dowody przez sprzeczność są niepożądane. Być może zaskakująco, Cavalieri uzasadnił swoje podejście argumentem, że jego użycie nieskończenie małych pozwoliło mu udowodnić wyniki Archimedesa bez użycia „dowodu przez sprzeczność”. Zauważmy, że tak metoda

[27] Ponieważ dzieła Pappusa były wtedy już znane, a Guldin nie powołał się na niego w swojej pracy, został oskarżony o plagiat.

[28] Por. źródło: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Guldin/ [stan z 12.05. 2021]; *Historia matematyki,* red. A.P. Juszkiewicz, t. 2, s. 150.

niepodzielnych Cavalieriego, jak i rotacyjna Guldina wykraczały poza matematykę antyczną. Pierwszy z nich dopuszczał jako element dowodu i teorii operacje nieskończonościowe, drugi wprawdzie tych elementów nie uznawał, jednak wprowadzał metody wykorzystujące ruch jako element konstrukcji i narzędzie matematycznych dowodów.

John Wallis (1616–1703) nie tyko kontynuuje i rozwija idee i metody Cavalieriego, Keplera, Kartezjusza i innych, ale też tworzy nowe metody – interpolacji i obliczania całek. Najsłynniejszą jego pracą jest *Arithmetica infinitorum,* wydana w 1656 roku. W pracy tej wprowadza symbol nieskończoności (∞). Odrzuca geometryczne podejście Cavalieriego, zastępując je językiem algebraicznym, co sprawia, że analiza nieskończonościowa staje się potężnym narzędziem w badaniach astronomicznych i fizycznych. Praca ta była podstawą przy budowaniu przez Newtona rachunku różniczkowego i całkowego (jak również praca *Mechanica, sive Tractatus de Motu,* w której Wallis uściśla pojęcia siły, pędu oraz pojęcie środka ciężkości Ziemi). W pracy *Tractatus de Sectionibus Conicis* (1659) bada krzywe stożkowe przy pomocy metod i własności algebraicznych. Ważna dla rozwoju notacji matematycznej jest praca *Mathesis Universalis* z 1657 roku, w której Wallis wprowadza ujemne i ułamkowe wykładniki, ale również przedstawia całościową wizję matematyki jako nauki uniwersalnej[29].

Istotny jest wkład Wallisa w odzyskanie tekstów starożytnych matematyków, które stały się przedmiotem jego analiz i refleksji. Chodzi o *Harmonikę* Ptolemeusza, *O wielkościach i odległościach Słońca i Księżyca* Arystarcha oraz *Zliczacz piasku* Archimedesa. Dostrzegł też wielkość matematyczną Thomasa Harriota (1560–1621) i rozwinął jego algebraiczne pomysły. Postawił tezę – ciągle analizowaną przez historyków – że wyniki algebraiczne Kartezjusza są zapożyczone od Harriota. W swoim *Traktacie algebraicznym* (*Treatise on Algebra*) akceptuje , jako pełnoprawne w matematyce, ujemne i zespolone pierwiastki[30].

Spór Wallisa z Hobbesem pokazuje, z jakim oporem nowa matematyka wchodziła do umysłów innych ludzi, nawet tak wybitnych filozofów jak Hobbes. Myśliciel pomysły matematyczne Wallisa uważał za szalone, przekraczające wszelkie granice zdrowego rozsądku. Napisał pamflet *The Marks of the Absurd Geometry, Rural Language etc. of Doctor Wallis,* w którym w naj-

---

[29] J. Wallis, *Mathesis universalis: sive, arithmeticum opus integrum,* [w:] *Opera mathematica*, E. Theatro Sheldoniano, Oxoniae 1695, t. 1, s. 17–228.

[30] A Malet, Barrow, *Wallis, and the remaking of seventeenth century indivisibles*, „Centaurus" 1997, nr 39 (1), s. 67–92.

gorszych epitetach opisywał nową geometrię (matematykę). Spór trwał przez dwadzieścia lat, aż do śmierci Hobbesa[31].

Blaise Pascal (1623–1662) miał kluczowe znaczenie dla rozwoju nauki nowożytnej nie tylko jako twórca w matematyce, fizyce oraz w filozofii, ale także jako jeden z inicjatorów nowego podejścia do nauk matematyczno--przyrodniczych. To on w korespondencji z Fermatem położył fundamenty pod teorię prawdopodobieństwa. Rozwiązali oni problem stawki w grze w kości dwóch graczy (jak sprawiedliwie podzielić stawkę, o którą gracze grają, jeśli gra jest niedokończona). W swoim słynnym „zakładzie Pascala" próbuje rozwiązać problem zakładu dotyczącego istnienia Boga, wykorzystując argument probabilistyczny: kto ma szansę wygrać zakład, jeśli jeden zakładający się twierdzi, że Bóg istnieje, a drugi, że nie istnieje. Pascal zauważa, że przy rozwiązywaniu tego problemu jesteśmy zmuszeni do hazardu, a więc do zastosowania rachunku prawdopodobieństwa. I zauważa, że jeśli Bóg nie istnieje, nie traci się nic, wierząc w Niego, a jeśli istnieje, traci się wszystko, nie wierząc. Hazard (w tym również ten religijny) nie jest jedynym źródłem teorii prawdopodobieństwa, jednak to źródło ma szczególne znaczenie dla charakterystyki matematyki nowożytnej. Rozpoczęcie badań nad zagadnieniami, bez odpowiednich narzędzi i metod, było swoistym hazardem. Podjęto duży wysiłek społeczny, aby osiągnąć sukces, i on w końcu nastąpił (wybrana droga rozwoju nauki nie okazała się ślepą uliczką). Uczonym oświeceniowym i pozytywistycznym zdawało się, że można jeszcze podbić stawkę i doprowadzić do przejęcia przez naukę społecznych funkcji religii. Taka postawa w sposób zasadniczy wykraczała poza kompetencje metodologiczne nauki. Czy nauka ma szansę wygrać ten zakład, czy jednak przelicytowała? Zakład nie został jeszcze rozstrzygnięty, a spór trwa.

Ponadto Pascal kontynuował badania geometryczno-analityczne nad teorią krzywych stożkowych, pokazując jej dalsze zastosowania. Między innymi formułuje twierdzenie istotne dla geometrii rzutowej, buduje rzutową geometrię stożkowych, pokazuje, że stożkowe można otrzymać jako środkowe rzutowanie okręgu. Skonstruował też pierwszą maszynę liczącą, mającą pomóc jego ojcu w obliczeniach. W pracy dotyczącej cykloidy zastosował rachunek Cavalieriego do znajdowania pola powierzchni odcinka cykloidy i jego środka ciężkości.

Na podstawie przeprowadzonych przez siebie eksperymentów atmosferycznych określał właściwości zjawiska ciśnienia, a przede wszystkim uznał,

---

[31] S. Probst, *Infinity and creation : the origin of the controversy between Thomas Hobbes and the Savilian professors Seth Ward and John Wallis*, „The British Journal for the History of Science" 1993, t. 26, s. 271–279.

że istnieje próżnia, gdyż wraz ze wzrostem wysokości maleje ciśnienie powietrza. Wnioskował więc, że ponad atmosferą ziemską musi być próżnia. Było to kolejne odrzucenie zasady Arystotelesa, tym razem o nieistnieniu próżni[32]. Przyjęcie próżni było z jednej strony wynikiem eksperymentów, a drugiej – wprowadzeniem pewnego idealnego pojęcia (bytu), na podstawie definicji zgodnej z eksperymentami (lecz przecież niepotwierdzonej). Przyjął bowiem, że próżnia jest czymś pomiędzy materią a nicością (ponieważ nie posiada cech ani jednego, ani drugiego): jest pustą przestrzenią mającą (trzy) wymiary (różni się więc od nicości), ponadto nie stawia oporu i jest nieruchoma (nie jest tym samym materią)[33]. Polemizuje w tej sprawie, między innymi, z o. Noëlem Chabanelem (jezuitą) oraz Kartezjuszem, którzy odrzucali istnienie próżni.

Geometria rzutowa jest charakterystyczną teorią dla matematyki nowożytnej. Wprawdzie jej początki miały miejsce już w czasach antycznych, w pracach Apoloniusza i Pappusa, jednak w okresie nowożytnym dalsze badania nad nią zostały sprowokowane przez problemy geometryczne astronomii oraz potrzeby opracowania teorii perspektywy dla potrzeb sztuki i architektury. Kepler zastosował pojęcie punktu nieskończenie dalekiego, w którym przecinają się dwie proste równoległe. Chodzi o to, że przy rzutowaniu proste równoległe mogą przejść w proste przecinające się i dla uspójnienia teorii należało taki punkt wprowadzić. W ten sposób znowu kolejny element nieskończony staje się częścią teorii matematycznej. Znaczące dla wprowadzenia tego punktu było pojęcie granicy i zasada ciągłości. Jeśli dwie proste się przecinają, to gdy w sposób ciągły przekształcamy je do prostych równoległych, punkt przecięcia oddala się do nieskończoności, a w granicy jest punktem w nieskończoności (nieskończenie odległym). Jednak początki geometrii rzutowej jako osobnej dyscypliny matematycznej występują w pracach **Girarda Desargues'a** (1591–1661). Pojawia się u niego ważne pojęcie przekształcenia rzutowego oraz dwustosunek podziału czterech punktów. W Paryżu Desargues stał się częścią matematycznego kręgu otaczającego **Marina Mersenne'a** (1588–1648). Do kręgu tego należał René Descartes, **Étienne Pascal** (1588–1651) i jego syn Blaise Pascal. Głównie dla tej wąskiej grupy przyjaciół Desargues przygotował swoje matematyczne prace. Była to swoista „akademia", w których uczeni dzielili się wynikami swoich badań, omawiali je i rozwijali. Efektem tej współpracy była wydana w latach 1635–36 przez Mersenne'a *La Harmonie Universelle.* W książce

[32] C.B. Boyer, *Pascal: The man and the mathematician*, „Scripta Mathematica" 1963, t. 26, s. 283–307.

[33] P. Pascal, *Rozprawy i listy. Fragmenty prac o próżni,* PAX, Warszawa 1962, s. 23.

znajduje się krótka praca Desargues'a (*Une méthode aisée pour apprendre et enseigner à lire et escrire la musique*), w której pokazuje siłę nowej metodologii w nauczaniu muzyki. Zresztą takich praktycznych prac napisał wiele i dotyczą one poszukiwania uniwersalnych metod (*Manière universelle*) w rozwiązywaniu praktycznych problemów (zagadnienie perspektywy, cięcia kamieni, konstrukcji zegarów słonecznych). Szczególnie ważna jest praca dotycząca perspektywy, która doprowadziła go do nowego podejścia do geometrii. Głównym dziełem w tym zakresie jest wydana w 1639 roku w Paryżu praca *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan,* w której znowu (jak w przypadku geometrii analitycznej) badanie stożkowych stało się podstawą nowej teorii. Desargues formułuje ważne twierdzenie mówiące, że jeżeli dwa trójkąty ABC i abc „są w perspektywie" (co oznacza, że proste łączące odpowiadające sobie wierzchołki, a więc proste Aa, Bb i Cc, przecinają się), to punkty przecięcia odpowiadających sobie boków tych trójkątów są współliniowe. Istotne jest to, że Desargues, tworząc nową teorię matematyczną, odnosi się do prac antycznych matematyków: Apoloniusza i Pappusa. Podobnie jak oni widział ścisły związek matematyki z jej praktycznymi możliwościami. Aby opisać matematycznie zagadnienie perspektywy, trzeba było rozszerzyć zakres geometrii, gdyż potrzebne twierdzenia nie wynikały z aksjomatów geometrii Euklidesa. Ponadto geometria rzutowa dawała podstawę teorii stożkowych: przez odpowiednie przekształcenia rzutowe można było przekształcać dane stożkowe w inne. W dużej mierze teoria Desargues'a została przez współczesnych odrzucona (również przez samego Kartezjusza, który promował jedynie analityczny kierunek w geometrii). Sam Desargues wdał się w liczne spory związane z oryginalnością i wagą jego prac, co w końcu zniechęciło go do dalszego zajmowania się matematyką.

Zrozumiał w pełni wielkość tej teorii jedynie Pascal, który ją uzupełnił o ważne twierdzenie (twierdzenie Pascala mówi, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta, wpisanego w stożkową, leżą na jednej prostej). Niechęć do nowej geometrii (rzutowej) była tak duża, że *Brouillon project* Dasarguesa zaginął i został odnaleziony dopiero w połowie XX wieku. Ponowne odkrycie i rozwinięcie tej geometrii nastąpiło na początku XIX wieku w pracach **Ponceleta** (1788–1867) i jego następców. Historia z gubieniem i odzyskiwaniem nowych idei i prac ciągle się powtarza[34].

Jak zauważyłem wcześniej, istotne znaczenie w geometrii rzutowej ma punkt w nieskończoności – można go formalnie rozumieć jako pewien kie-

[34] K. Andersen, *Desargues' method of perspective: its mathematical content, its connection to other perspective methods and its relation to Desargues' ideas on projective geometry*, „Centaurus" 1991, t. 34, s. 44–91.

runek (a więc klasę prostych równoległych). Dzięki niemu możemy definiować kolejne obiekty tej geometrii: prostą rzutową i płaszczyznę rzutową. I tak przez prostą rzutową rozumie się prostą euklidesową uzupełnioną przez punkt w nieskończoności, a przez płaszczyznę rzutową – płaszczyznę euklidesową uzupełnioną przez punkty w nieskończoności. W geometrii rzutowej funkcjonuje też tak zwana zasada dualności, według której każde twierdzenie ma odpowiadające mu twierdzenie dualne, jeśli zastąpimy odpowiednio pojęcia „punkt" i „prosta".

Wspominałem wcześniej, że w pracach Mikołaja z Oresme i Swinesheada rodzi się pojęcie funkcji, które uzyskało w matematyce nowożytnej uniwersalny charakter i stało się elementem charakterystycznym dla tego okresu dziejów matematyki. Ten proces zakończył się dopiero w XIX wieku. Dla rozwoju pojęcia istotne znaczenie miały prace Nepera (funkcje logarytmiczne), Galileusza (funkcje prędkości i drogi, zależne od czasu), Fermata i Kartezjusza (układ współrzędnych), Cavalieriego, Newtona oraz Leibniza (rachunek różniczkowy i całkowy). Przez dłuższy czas funkcję przedstawiano graficznie, kinematycznie lub za pomocą tabelek i dopiero pojawienie się oznaczeń literowych pozwoliło na analityczne (przy pomocy wzoru) ujęcie funkcji. Wraz z rozwojem pojęcia funkcji rozwijało się pojęcie wielkości zmiennej (czyli takiej, która wzrasta lub maleje, gdy odpowiednia związana z nią zmienna też wzrasta lub maleje) w odróżnieniu od wielkości stałej. Doprecyzowywanie pojęcia funkcji trwało przez cały wiek XVIII i część wieku XIX, aż do powstania teorii mnogości, gdy zdefiniowano funkcję jako układ trzech elementów (D_f, f, V_f), gdzie f jest odwzorowaniem między dwoma zbiorami: dziedziną D_f oraz przeciwdziedziną V_f , spełniającym warunek jednoznaczności: $x_1 = x_2, tof(x_1) = f(x_2)$.

Jednak istotne było to, że matematyka, badając podstawowe (elementarne) pojęcia (mechaniki, analizy matematycznej, rachunku prawdopodobieństwa), wykroczyła poza badania czysto ilościowe. W zakresie badania znalazły się pojęcia materii, ruchu, siły funkcji, continuum, nieskończoności (w tym wielkości nieskończenie małej), wielkości zmiennej, granicy, ciągłości. Były to często narzędzia służące do obliczeń i pomiarów, choć same nie mieściły się w kategorii „wielkości" czy „ilości".

Dobrym przykładem ukazującym zmianę dokonaną w nauce nowożytnej jest *casus* pojęcia nieskończoności. To pojęcie było obecne w matematyce starożytnej m.in. w postulatach Euklidesa (wydaje się, że piąty postulat Euklidesa wprowadza *de facto* nieskończoność aktualną). Zauważmy jednak, że założenie o nieskończoności przestrzeni geometrycznej było hipotezą, w greckim rozumieniu tego słowa. Było więc tylko pomocną konstrukcją teoretyczną pozwalającą opisywać świat zjawisk. W czasach nowożytnych natomiast, po zmianie znaczenia słowa „hipoteza", postawienie hipotezy o nieskończoności przestrzeni wiąże się z poszukiwaniem zjawisk, które ją wyjaśniają (w jakimś sensie realizują), a mówiąc precyzyjniej – uściślają (to podejście doprowadziło w konsekwencji do powstania teorii zbiorów nieskończonych i liczb pozaskończonych).

Podobnie można zinterpretować rolę, jaką pełniły dla Greków konstrukcje mechaniczne oraz rysunki geometryczne. Były częścią matematyki, a proces rysowania i konstruowania, tak jak i obliczania, miał charakter procesu dedukcyjnego. W czasach nowożytnych rysunek zaczął pełnić w matematyce rolę jedynie ilustracji, a konstrukcja stała się zastosowaniem technicznym danej teorii. Stąd tak ważne dla starożytnych były konstrukcje elementarne (np. z użyciem jedynie cyrkla i linijki), których znaczenie zmalało po przełomie nowożytnym.

Jednak starożytna zasada elementarności nadal obowiązuje, nastąpiło jedynie odejście od konstrukcji i rysunków jako części systemu teoretycznego. Nastąpiła zmiana tego, co uznajemy za elementarne. Na początku były to konkretne (a raczej abstrakcyjne) pojęcia ruchu i materii, które uczeni XVII i XVIII wieku traktowali jako jedyne cegiełki konstrukcji nauki (w ramach uznawanego mechanicyzmu). Jednak badania nad podstawami nauk matematyczno-przyrodniczych (w tym nad podstawami geometrii i analizy matematycznej) wyłoniły inne elementarne obiekty, które stały się podstawą wyjaśnień w matematyce, a są to między innymi pojęcie ciągłości, granicy, zmiennej, otwartości, zbioru czy funkcji. Struktura podstaw nauki stawała się w miarę rozwoju nauki coraz bardziej złożona.

3. Nowożytne rozszerzenie zakresu badań nauk matematycznych

Jeszcze pod koniec średniowiecza podjęto próbę rozszerzenia zakresu nauk matematycznych na nowe obszary rzeczywistości. To odważne (i trochę na wyrost, gdyż brakowało odpowiednich metod i narzędzi matematycznych) rozszerzenie zakresu badań matematycznych i postawienie śmiałych hipotez, dotyczących związku matematyki i świata, prowadziło do nowego przełomu w matematyce, który *de facto* dokonał się w XVII wieku. Istotne dla dokonanej przemiany były prace czternastowiecznych matematyków, w tym przede wszystkim Mikołaja z Oresme, Mikołaja Kuzańczyka i Mikołaja Kopernika, natomiast bezpośrednio źródłem przełomu były odkrycia oraz idee takich matematyków, jak: Galileusz, Cavalieri, Fermat, Kartezjusz, Guldin, Wallis, Kepler, Pascal i Desargues. Pojawiły się całkiem nowe teorie matematyczne i metody dowodowe, które przez dłuższy czas nie miały odpowiedniej ścisłości. Wiek XVIII i XIX to praca nad doprecyzowaniem pojęć, uściśleniem podstaw nowych teorii i ich rozbudową.

W ramach dokonanego przełomu występuje badanie uniwersalnych kategorii (ontologicznych i epistemologicznych) jako przedmiotów matematyki; analizowane są: ciągłość, granica, ruch, zmienność, funkcja, relacja, nieskończoność, zbiór, klasa, porządek. Matematyka bada kategorie realnego świata. Nie jest to proste nawiązanie do koncepcji pitagorejskiej (liczby i ich stosunki jako rzeczywistość), lecz otwarcie na inne elementy rzeczywistości, nieujmowalne na początku „umysłem matematycznym" (rzeczywistość zmysłowa oraz poznawana przez inne nauki staje się przedmiotem badań matematycznych). Te kategorie stały się nie tylko narzędziem, ale właśnie przedmiotem badań matematycznych. Dobrym przykładem są optyka i mechanika. W starożytności były to działy matematyki, natomiast w czasach nowożytnych stały się dyscyplinami fizycznymi. Badania starożytnych nad światłem były *de facto* badaniami geometrycznymi, gdzie ukazywano zależności między prostymi i płaszczyznami. Podobnie było ze zjawiskiem ruchu – był jedynie elementem matematycznych modeli, konstrukcji i urządzeń (było to badanie właściwości geometrycznych w ramach głównie stereometrii). W badaniach, które rozpoczęły się w XIII wieku, tak światło, jak i ruch zostały wzięte jako realne elementy świata, a jako takie muszą być badane przez fizykę (badania starożytnych nad ruchem w ramach konstruowanych urządzeń mechanicznych i innych nie zostały uznane za dynamikę, a jedynie za statykę, mimo formułowania dynamicznych praw ruchu, gdyż stosowaną do tych badań matematyką była „statyczna" geometria), która staje się, dzięki wykorzystaniu modeli i narzędzi matematycznych, fizyką matematyczną.

Mało tego, światło i ruch stają się przedmiotem badań matematyki. Co to znaczy? Obserwujemy i badamy zjawiska będące realizacją ruchu (np. spadek swobodny) czy światła (np. rozszczepienie światła) i znajdujemy model matematyczny tych zjawisk, który traktujemy jako „obiekt" ujmujący naturę badanych zjawisk. Pojawia się ścisła odpowiedniość między obiektem (modelem) matematycznym a obiektem rzeczywistym. Model matematyczny staje się czymś więcej niż modelem w rozumieniu starożytnych, kiedy służył do wyjaśnienia zjawisk. Nie przysługiwała mu cecha prawdy lub fałszu, bo prawda jest po stronie rzeczywistości i obserwowanych zjawisk. Teraz model jest „ujęciem" zjawisk, rzeczywistości, i ma mu przysługiwać cecha prawdziwości. Model może być weryfikowany, korygowany, aby w pełni stał się prawdziwym modelem opisującym rzeczywistość. Nauka nowożytne uwierzyła, że może zamknąć rzeczywistość w teoretycznych modelach, które poprzez skuteczne (zweryfikowane) zastosowanie metody eksperymentalnej stają się z definicji modelami rzeczywistymi.

Paradoksalnie, wraz z tym rozszerzeniem zakresu badawczego matematyki pojawiło się „zubożenie" dziedziny badań matematycznych. Takie dyscypliny, jak: mechanika, optyka, astronomia, itd., przestały być naukami matematycznymi, a stały się naukami przyrodniczymi, nie w duchu Arystotelesa, jako nauki filozoficzne, lecz jako nowy rodzaj nauk, w dużym stopniu niezależnych od filozofii. Chociaż z drugiej strony wymagano od nich odpowiedzi na pytania stawiane filozofii i przez filozofię: jaki jest naprawdę ten świat, jaka jest jego struktura, istota, natura? To matematyka ma wyjaśniać naturę ruchu, czasu, przestrzeni, światła, symetrii, harmonii, podobieństwa, nieskończoności, itd. – zaczął się proces ich matematyzowania. To „matematyzowanie" z czasów aleksandryjskich różniło się zasadniczo od tego z czasów nowożytnych. Tam po prostu rozbudowywano metody badawcze (matematyczne) w poszczególnych naukach matematycznych, tu natomiast nauki uznane za autonomiczne względem matematyki (bo posługujące się własną metodologią doświadczalną, eksperymentalną) wyposażano dodatkowo w narzędzia i modele matematyczne.

Ta nowa cecha (zadanie) matematyki, polegająca na **opisywaniu, poznawaniu rzeczywistości i ujmowaniu jej natury**, **jest nowym wymiarem uniwersalności matematyki**. Siłą rzeczy matematyka zaczyna ingerować w obszary badań różnych dyscyplin naukowych. Tym samym przedmiotem badań matematycznych stają się nie tylko liczby, wielkości i formy geometryczne czy formy algebraiczne, lecz również dowolne kategorie bytowe, w tym tak zwane jakości (traktowane wcześniej jako przeciwstawienie ilości i wielkości, a więc tego, co w naturalny sposób możemy mierzyć, poddać badaniom matematycznym). Temu nowemu zadaniu matematyki (badanie natury i struktury świata) często towarzyszyły deklaracje, że nauka jedynie opisuje zjawiska, nie interesuje się natomiast istotą poznawanych zjawisk i rzeczy. Z drugiej strony, przypisywanie modelom matematycznym, ujmującym dane zjawiska, cechy prawdziwości wiązało się z przyjęciem założenia, że matematyka poznaje prawdziwą naturę, strukturę świata.

Charakterystyczne dla okresu nowożytnego, co też wpisuje się w charakterystykę dokonanego przełomu, jest pojawienie się przybliżonych metod obliczeń jako pełnoprawnych metod matematycznych. Jeśli pewnych zjawisk nie możemy opisać w sposób ścisły, to podajemy opis przybliżony, a w razie potrzeby zwiększamy dokładność opisu, obliczeń. Ten sposób badań jest bliższy matematyce konkretnej, a całkowicie odmienny od matematyki abstrakcyjnej czy ogólnej, w której zjawiska badane są w ramach modelu w sposób całkowicie ścisły i precyzyjny. Ogromnym powodzeniem zaczęła cieszyć się matematyka praktyczna, np. tablice trygonometryczne czy logarytmiczne, konstruowane w oparciu o stworzoną przez Johna Napiera (1550–1617) teorię logarytmów. Tablice te pozwalają na szybkie, acz przybliżone, wykonywanie mnożenia i dzielenia. Dzięki tej technice znacznie wzrosła moc obliczeniowa ludzkości. Została zastosowana matematyka w praktycznej działalności handlowej i w innych obszarach gospodarki, co znacznie przyspieszyło rozwój gospodarczy. Kolejny tak wyraźny wzrost mocy obliczeniowej miał miejsce dopiero wraz z powstaniem informatyki i wynalezieniem komputerów[35].

Warto zauważyć, że tak Galileusz, jak i Newton budowali swoją mechanikę w sposób aksjomatyczny, traktując *Elementy* Euklidesa jako ideał teorii naukowej. W przypadku mechaniki, traktowanej jako teoria świata fizycznego (a nie teoria matematyczna), takie podejście zapowiadało późniejsze trudności związane z aksjomatycznym zamknięciem teorii na inne zjawiska i właściwości świata przyrody.

Fizyka nowożytna (tworzona i rozwijana przez Galileusza i Newtona) ma więc swoje korzenie w XIV wieku i może być traktowana jako synteza fizyki Archimedesa i Arystotelesa. Składnik matematyczny jest w niej niezmiernie istotny, lecz nie jedyny. Fizyka nowożytna stała się bowiem zarazem filozofią przyrody, gdzie przy pomocy metod i narzędzi, czerpanych z nowych działów matematyki, próbowano badać zagadnienia struktury materii, przestrzeni i czasu oraz genezy i rozwoju świata.

Istotne jest również to, że astronomia, korona nauk matematycznych w czasach starożytnych i średniowiecznych, przestała być dyscypliną matematyczną. Stała się teorią fizyczną, mechaniką nieba, jednak badaną przy pomocy narzędzi matematycznych. Stało się to dzięki pracom Kopernikach, Galileusza, lecz głównie poprzez prace Keplera i Newtona. Po dokonanym przełomie matematyka zaczęła być więc wykorzystywana do badania całego świata przyrody (zniknęła granica między niebem astronomicznym a Ziemią). Rozpoczął się intensywny proces matematyzacji nauk przyrodniczych, a z drugiej strony – wiele działów uznawanych do tej pory za matematyczne zostało włączonych do fizyki i poddanych metodzie empirycznej (poza mechaniką i astronomią również optyka, akustyka i wiele innych). Dzieje się jednak coś znacznie poważniejszego: nauki przyrodnicze stają się przedmiotem badań matematyki. Matematyka jest nie tylko narzędziem badań nauk

[35] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, s. 122–127.

przyrodniczych, lecz staję metanauką, ukazującą sposób powstawania tych nauk, możliwości ich udoskonalania i dochodzenia do prawdy.

W metodzie nowej fizyki kluczową rolę zaczęła pełnić hipoteza jako część teorii fizycznej. Dla Newtona hipoteza staje się wypowiedzią sformułowaną w oparciu o doświadczaną rzeczywistość, której prawdziwość lub fałszywość trzeba będzie wykazać. Staje się w pewnym sensie elementem poznawanej rzeczywistości. Tym samym następuje zanurzenie nauki w świat rzeczywistości materialnej. Newton, jak sam deklarował, hipotez nie wymyśla, lecz bierze je ze świata pozaumysłowego. W konsekwencji dowód hipotezy staje się „dowodem" fizycznym, polegającym na doprecyzowaniu obserwowanych zjawisk oraz ich interpretacji, a nie włączeniem jej w struktury teorii.

W nauce hellenistycznej hipotezy były istotną częścią modelu teoretycznego i nie trzeba ich było potwierdzać empirycznie, jedynie pokazać ich przydatność do wyjaśniania obserwowanych zjawisk. Dla Greków teoria (wraz z hipotezami) usprawiedliwia rzeczywistość, pokazuje jej inteligibilność (ocala zjawiska), pokazuje więc zgodność między doświadczeniem potocznym i naukowym. Natomiast w czasach nowożytnych to rzeczywistość ma usprawiedliwiać myślenie oraz teorię. Pojawia się jednak zasadniczy problem dostępu do rzeczywistości, specyfiki doświadczenia naukowego, które ewentualnie taki dostęp umożliwia, i w konsekwencji następuje rozdźwięk między doświadczeniem (naukowym), eksperymentem a doświadczeniem potocznym i tak zwanym zdrowym rozsądkiem. Myślenie samo w sobie nie jest racjonalne, domaga się rzeczywistości doświadczanej poprzez metody naukowe. Myślenie samo w sobie staje się więc podejrzane, jeśli jest myśleniem samodzielnym, niezwiązanym z naukami. W wielu przypadkach miało miejsce podpieranie się autorytetem nauki dla uzasadnienia nawet największych bzdur (tzw. myślenie naukowe) i niedopuszczanie do krytycznej analizy przedstawianych pomysłów oraz idei.

W świetle dokonanego przełomu istnieje różnica między heliocentryzmem Arystarcha a heliocentryzmem Kopernika. Dla greckiego astronoma model heliocentryczny miał być hipotezą pozwalającą wyjaśnić obserwowany ruch planet, a nie czymś, co należało potwierdzić. Jednak eksperymenty dokonywane dzięki temu modelowi miały być spójne z innymi elementami teorii. W przypadku teorii Kopernika model musiał być albo prawdziwy, albo fałszywy, nie wystarczyło (Galileuszowi i innym uczonym działającym zgodnie z nową ideą nauki), że dobrze opisuje rzeczywistość[36].

[36] Słynny spór Galileusza ze Świętym Oficjum o system heliocentryczny Kopernika sprowadzał się do innego rozumienia przez strony sporu metody nauk przyrodniczych i relacji do prawdy. Zanurzenie całego bogactwa rzeczywistości w prostych teoriach (modelach) ma-

W okresie nowożytnym rozszerzył się również zakres obiektów mierzalnych. Dzięki rodzącemu się pojęciu funkcji mierzalny staje się ruch oraz materia jako taka. Newtonowskie prawa ruchu i prawo grawitacji, ujęte w formę matematyczną, ukazują zależność między masą ciała (jako parametrem pomiaru ilości materii) a siłą (bezwładności, grawitacji). Są to też wielkości badane w ramach analizy matematycznej, jak: granice ciągów, sumy nieskończone, obiekty geometryczne i fizyczne mierzone dzięki operowaniu wielkościami nieskończenie małymi, pochodnymi i całkami. Natomiast w ramach badań w budowanej teorii prawdopodobieństwa mierzalne stawały się zdarzenia losowe i inne obiekty związane z prawdopodobieństwem i statystyką.

Wróćmy znów do sprzeczności kulturowych, których nowa odsłona pojawia się wraz z nowym przełomem w naukach matematycznych. Ich występowanie może doprowadzić do zniszczenia cywilizacyjnych osiągnięć, są jednak zarazem impulsem do rozwoju matematyki. Te sprzeczności są obecne w kulturze jako jej nieodzowny składnik, a dzięki rozwojowi nauki zostają przezwyciężone. Zawsze grozi nam chaos, upadek (człowieka, kultury), fatum (świat toczy się bez naszego udziału, wpływu) oraz wygnanie poza obszar kulturowego zadomowienia. Widzieliśmy, że upadały wielkie cywilizacje – sumeryjska, babilońska, rzymska czy hellenistyczna. Mimo upadku tych cywilizacji nie zniknęły one całkowicie. W przypadku matematyki i nauki hellenistycznej w kolejnych epokach były podtrzymywane pewne elementy, a później odtwarzane, mozolnie odzyskiwane. Mimo nieomal całkowitego unicestwienia osiągnięć matematycznych tamtego okresu zostały niektóre ważne wyniki (utrwalone w ścisłych zależnościach matematycznych), które pozwalały na odczytywanie zagubionej czy zniszczonej reszty.

Czasy nowożytne charakteryzuje dwutorowy rozwój matematyki. Z jednej strony mamy do czynienia ze stopniowym odzyskiwaniem matematyki antycznej (co stanowi też istotny impuls rozwojowy), a z drugiej – pojawiają się nowe obszary badawcze (nowa rzeczywistość odsłaniana przez matematykę). Dokonany w XVII wieku kolejny przełom w matematyce ukazał jednak kolejne sprzeczności kulturowe (nowe ich odsłony). Rozwijająca się cywilizacja, budowana w oparciu o nową matematykę i naukę, ukazała następu-

---

tematyczno-fizycznych i założenie (sugerowanie), że to, co nie mieści się tych modelach, nie jest warte badania, bo z definicji jest nieprawdziwe, wydaje się ogromnym metodologicznym nadużyciem. W kolejnych wiekach mamy z jednej strony upieranie się przy tej wizji „metodologicznej", a drugiej – ciągłe korygowanie (czasami rewolucyjne) tej wizji. Tak naprawdę jest to tylko pozanaukowa wizja dotycząca roli nauki i jej relacji do świata (rzeczywistości). Natomiast rozwój nauki postępował zgodnie z wewnętrzną logiką rozwoju teorii naukowych.

jące, domagające się przezwyciężenia, sprzeczności: różnorodność dyscyplin naukowych i gwałtownie wzrastająca liczba publikowanych prac naukowych (chaos różnorodności i nadmiaru), nieporównywalność i nieosiągalność podstawowych elementów konstrukcyjnych świata (między innymi kartezjański dualizm substancji materialnej i myślącej) oraz determinizm (ukazane w matematycznym przyrodoznawstwie w formułowanych prawach przyrody). Prawa nauki są realizowane w świecie z nieuchronną koniecznością, człowiek nie ma na nie żadnego wpływu, a jako element świata sam im podlega. Wspaniale rozwijająca się nauka i wzrastająca złożoność coraz liczniejszych teorii sprawiają, że dostęp człowieka jako jednostki do tych zasobów staje się niemożliwy. Mimo wynalazku druku i innych nośników utrwalania wiedzy dalej grozi ludzkości unicestwienie dorobku naukowego i kulturowego. Coraz trudniej bowiem o właściwe kryterium rozróżniania rzeczy wartościowych od zbędnych i bezwartościowych, a rzeczy cenne mogą „utonąć" w powodzi wzrastającej produkcji prac pseudonaukowych.

Z drugiej jednak strony rodząca się nowożytna metoda naukowa pokazuje drogi przezwyciężenia tych sprzeczności. Rozbudowywany język matematyki staje się językiem kontaktu człowieka ze światem, odkrywane przez człowieka prawa przyrody sprawiają, że ma w swoim ręku narzędzia do przetwarzania tego świata. Wzrasta znacząco moc obliczeniowa ludzkości, rozwija się gospodarka i przemysł, których istotnym elementem stają się odkrycia i wynalazki dokonane dzięki nowym metodom matematyczno-eksperymentalnym. Z historycznej perspektywy dostrzegamy, że gwałtowny wzrost zastosowań nauki prowadzi do rewolucji przemysłowej, a w konsekwencji do przemian społecznych i kulturowych na przełomie XVIII i XIX wieku. A postępowanie ściśle zgodne z metodami naukami daje gwarancję otrzymania prawidłowych wyników. W tym postępowaniu tkwi oczywiście też zagrożenie. Tkwimy w zamkniętym świecie wyznaczonym przez metody naukowe i pomijamy ogromne obszary refleksji i badań, które dokonują się poza danymi dyscyplinami naukowymi. A tam mogą pojawić się nowe pomysły i idee. Taka sytuacja pojawiła się pod koniec XIX i na początku XX wieku, gdy nowo odkrywane zjawiska (elektrodynamiczne, termodynamiczne, kwantowe, relatywistyczne) nie dały się wyjaśnić w oparciu o klasyczną fizykę i matematykę. XX i XXI wiek to czas poszukiwania nowych teorii w naukach matematyczno-przyrodniczych, które pozwolą w sposób racjonalny i spójny opisać odkrywane zjawiska. Powstające nowe teorie, niemieszczące się w schemacie tego, co rozumiemy przez matematykę, świadczą o dojrzewaniu matematyki do nowego przełomu.

4. Uniwersalność metod i narzędzi badań matematycznych w nowożytności

Matematyka nowożytna rozwijała się z jednej strony poprzez odzyskiwanie matematyki antycznej, a z drugiej poprzez otwieranie całkiem nowych obszarów i narzędzi badawczych związanych z nieskończonością, ciągłością, funkcją, szeregami (wyraźne przekroczenie, jakby odrzucenie matematyki starożytnej, gdzie nieskończoność była poza obszarem matematyki). Ta sprzeczność towarzyszyła rozwojowi matematyki nowożytnej, stanowiąc ważny impuls dla jej rozwoju, prowadziła do doprecyzowywania pojęć i tworzenia nowych teorii. Pojawiło się ważne dopełnienie matematyki algorytmicznej poprzez wprowadzenie symboliki matematycznej. **Wyraźnie wzrosła moc obliczeniowa poprzez powstanie i wykorzystanie teorii logarytmów oraz rachunku różniczkowego i całkowego (i teorii z nim związanych). Są to cechy ukazujące jej uniwersalność w nowożytnym ujęciu. Kolejną cechą jej uniwersalności stało się połączenie powszechności wiedzy matematycznej z jednoczesnym jej rozwojem jako wiedzy eksperckiej w ramach pojawiających się coraz liczniejszych specjalistycznych teorii.** Matematyka zyskuje wymiar humanistyczny. Matematyk posługuje się językiem, przy pomocy którego prowadzi racjonalny dialog z przyrodą, ale też z drugim człowiekiem, w ramach stowarzyszeń, akademii, nowych instytucji naukowych i edukacyjnych. Język matematyki staje się językiem uniwersalnym, zrozumiałym w dużej mierze niezależnie od używanego języka narodowego, potocznego. Matematyka uzyskuje też status narzędzia badań metodologicznych jako nauka o naukach przyrodniczych, pozwalająca na ich rozbudowę i ustalająca ich metody, stanowiąca kryteria ich prawdziwości (uzasadnianie praw przyrody dokonuje się w ramach modeli matematycznych i przy pomocy matematycznych metod dowodzenia).

Najbardziej charakterystyczny dla tej wizji jest projekt Kartezjusza, który odcina się od metody komentarzy ukształtowanej w czasach starożytnych i rozwiniętej w czasach średniowiecznych. Metoda komentarzy, jak wiadomo, zapewniała ciągłość rozwoju nauki i dostrzegała wartość pomysłów, które wypracowali poprzednicy. Chodziło o ocalenie dorobku poprzednich pokoleń i ich rozwijanie. Kartezjusz wyznacza matematyce całkiem nowe zadanie, którego dokładnie nie precyzuje, ma to być jednak połączenie najlepszych metod algebry i geometrii w jednej nowej matematyce uniwersalnej. Wszystkie poprzednie wyniki mają dać się wyprowadzić z tej nowej matematyki.

Spójrzmy na *Geometrię* Kartezjusza jako na dzieło ściśle związane z jego projektem filozoficznym. Została wydana wraz z *Rozprawą o metodzie* i trudno stwierdzić, czy była uzupełnieniem do traktatu filozoficznego, czy traktat był wstępem do niej (zresztą *Geometrię* poprzedzają jeszcze dwa inne dodatki: o optyce oraz z fizyki Ziemi). W *Geometrii* (wydanej w 1637 roku) zawarty był projekt nowej matematyki (i jego częściowe wykonanie), realizowanej zgodnie z nową kartezjańską metodologią. Ważne dla zrozumienia nowej matematyki są rozważania Kartezjusza zawarte w niedokończonej pracy *Metody kierowania umysłem,* odnalezione w notatkach w Sztokholmie, po jego śmierci. Dla uchwycenia nowej idei uniwersalności matematyki istotne są też poglądy Galileusza (o których już pisałem) oraz Pascala.

U Kartezjusza mamy wizję nowej matematyki budowanej na wzór algebry. Jej uniwersalność polega na zdolności syntezy różnych obszarów wiedzy rozdzielonych w poprzednich okresach dziejów – arytmetyki i geometrii. Ta synteza musi opierać się na sprowadzeniu matematyki do jej najbardziej elementarnych postaci ujętych w prostych i jasnych symbolach i formułach. Dużą rolę odgrywa w jego projekcie klasyfikacja krzywych w oparciu o równania algebraiczne oraz rola zmiennych i ich związanie w równaniach. Teoria równań miała być maksymalnie ogólną teorią pozwalającą na opis obiektów geometrycznych, arytmetycznych i wszelkich innych. Na podstawie teorii równań zostanie zbudowana maksymalnie ogólna nauka o stosunkach. Teoria ta miała działać mechanicznie poprzez proste algorytmy, a jej stosowanie nie wymagało szczególnych uzdolnień matematycznych. Kartezjańska matematyka uniwersalna miała być matematyką „dla ludu", dostępną powszechnie i zarazem powszechnie stosowalną do innych nauk i różnych zagadnień praktycznych (np. technicznych). Budowana na takiej podstawie matematyka miała ukazać swoją jedność. Nie chodziło o zredukowanie matematyki do algebry, lecz o jej optymalne rozszerzenie w oparciu o prostą i jasno ujętą podstawę.

I jeszcze jedna cecha uniwersalności matematyki proponowanej przez Kartezjusza – deklarowane zrywanie ciągłości w rozwoju nauki i budowanie jej od podstaw. Jego matematyka miała być całkiem nowa, inna od matematyki okresów poprzednich. Jak zauważyliśmy wcześniej, Kartezjusz w swojej konstrukcji geometrii analitycznej korzystał z dorobku poprzedników, jednak zakładał, że wszystko, co istotnie wartościowe w jego teorii, jest nowe i przez niego wymyślone. Jak się okazuje, nowa w jego systemie jest przede wszystkim metoda, z której nowe teorie, jak również stare, wynikają. I zawieranie się starych teorii nie jest wynikiem ich kontynuowania i rozwijania, lecz naturalną konsekwencją ogólności metody. Przyjrzyjmy się teraz dokładniej nowości i uniwersalności metody kartezjańskiej.

W swoich *Metodach kierowania umysłem* formułuje XXI reguł będących podstawą nowej metody[37]. Metoda naukowa ma przede wszystkim kształtować umysł badacza tak, aby był w stanie wydawać sądy niezachwiane i prawdziwe. Kierując się w sposób ścisły metodą (a więc zestawem prostych i pewnych reguł), nie można przyjąć niczego fałszywego za prawdę. Łatwo zauważyć, że aby taki cel osiągnąć, trzeba zajmować się, przynajmniej na początku, tylko tymi rzeczami, które umysł jest w stanie w taki dokładny sposób badać. Może to znacząco ograniczać obszar badań. Dosyć poważne konsekwencje ma reguła III, w której zauważa, że „przy rozpatrywaniu przedmiotów należy badać nie to, co inni myśleli, ani jakie my sami o nich czynimy domysły, ale to, co możemy ująć przy pomocy jasnej i oczywistej intuicji lub co możemy wywnioskować przy pomocy pewnej dedukcji"[38]. Intuicja (jako władza prostego i bezpośredniego ujęcia przedmiotu poznawanego) staje się więc, obok dedukcji, kluczowym elementem uprawiania nauki. Intuicja nie jest sądem zwodniczej wyobraźni, lecz pojęciem czystego i uważnego umysłu, który pochodzi z samego światła rozumu i sprawia, że o tym, co poznajemy, wątpić już nie można[39]. Przykładem takiej intuicji, podanej przez Kartezjusza, jest poznanie własnego istnienia lub dostrzeżenie posiadania przez trójkąt trzech boków. Dedukcja jest niezbędna, bo w przypadku wyprowadzania z przesłanek jakiegoś wniosku nie możemy jednym aktem intuicji objąć całego tego wynikania. Potrzebne są długie łańcuchy dowodzenia, w których intuicją będziemy mogli objąć jedynie poszczególne kroki dowodowe.

W tej regule tkwi jednak poważne niebezpieczeństwa zerwania ciągłości myśli, albowiem każdy uczony działa jakby na własną rękę, nie przejmując się innymi uczonymi i ich teoriami. Jeśli inni skorzystaliby z tej reguły, nie będą mogli poznać również myśli Kartezjusza, bo mamy badać nie jego myśli (czy myśli innych uczonych), lecz budować całkiem nową teorię od zera. Chyba że reguła ma dotyczyć tylko okresu przed pojawieniem się na Ziemi Kartezjusza, jednak wtedy nie miałaby charakteru uniwersalnego, jak przyjmował. Komentarz dotyczący tej reguły kończy Kartezjusz stwierdzeniem zamykającym możliwość korzystania z innych metod (poza kartezjańską intuicją oraz dedukcją).

> Otóż to są te dwie drogi, które prowadzą do nauki w sposób najpewniejszy; żadnych też więcej ze strony umysłu nie można dopuszczać, ale wszystkie inne należy odrzucić jako podejrzane i podlegające błędom[40].

---

[37] Dzieło jest niedokończone i w zamierzeniu reguł miało być więcej.

[38] R. Descartes, *Reguły kierowania umysłem. Poszukiwanie prawdy poprzez światło naturalne,* Wydawnictwo Antyk, Kęty 2002, s. 20.

[39] Ibidem.

[40] Ibidem, s. 22.

Zanim określi swoją metodę dokładniej, podaje Kartezjusz dwa cele podstawowe, których spełnienie wydaje się niemożliwe, a które mają charakteryzować posługiwanie się nową metodą. Chodzi mianowicie o to, aby nie brać żadnego fałszu za prawdę i dojść do poznania wszystkiego. Użycie tych ogólnych kwantyfikatorów („żadnego" i „wszystkiego") wydaje się bardzo nierozważne, chyba że będziemy rozumieć ten zwrot metaforycznie, jako określenie jakiegoś odległego celu, do którego będziemy zbliżać się w nieskończenie długim procesie poznawczym. Zauważa jednak, że istnieją już takie nauki, w których ta metoda była stosowana, a są to geometria i arytmetyka – najprostsze z nauk. Można dostrzec, że

> [...] starożytni geometrzy posługiwali się pewnego rodzaju analizą, którą rozciągali do rozwiązywania wszelkich zagadnień [...] I dziś także uprawia się pewnego rodzaj arytmetyki, który się nazywa algebrą, aby dokonywać z liczbami to, co starożytni czynili z figurami[41].

Nie chodzi mu jednak tylko o proste uogólnienie metody analizy stosowanej przez starożytnych, lecz zbudowanie innej nauki, która

> [...] musi zawierać podstawowe pierwiastki rozumu ludzkiego i [...] wydobywać prawdy o jakimkolwiek przedmiocie, [...] przewyższać każde inne poznanie, przekazane nam w sposób ludzki, ponieważ jest źródłem wszelkich innych[42].

Mamy tu cztery cechy charakteryzujące tę naukę: zawiera się w niej jakieś *arche* myślenia, rozumowania, racjonalności, odsłania prawdę o rzeczywistości, jej pochodzenie jest pozaludzkie (mistyczne, boskie, a może po prostu czerpie z rzeczywistości pozaumysłowej?) i jest u podstaw wszelkich innych nauk. Kartezjusz zauważa, że starożytni uczeni poznali prawdziwe idee filozofii i matematyki, zostały one jednak przez nich dziwnie ukryte. Ślady tych idei i tej matematyki znajdujemy jedynie u Diofanta i Pappusa. Tę ukrytą matematykę starożytnych Kartezjusz odkrywa i poznaje jej uniwersalną moc. „W końcu pewni bardzo uzdolnieni mężowie usiłowali ją wskrzesić w tym wieku: niczym bowiem nie jest, jak się zdaje, owa umiejętność, którą w sposób barbarzyński nazywa się algebrą"[43]. Nawiązuje wyraźne do osiągnięć muzułmańskich w tym zakresie, jednak stara się algebrę wyzwolić od niezrozumiałych obrazów, figur, i nadać jej cechy najwyższej przejrzystości i prostoty, jaką, według niego, powinna posiadać prawdziwa matematyka. Próbując zrozumieć, dlaczego do matematyki zaliczano nie tylko geometrię i arytmetykę, ale również astronomię, optykę, muzykę, mechanikę i wiele in-

[41] Ibidem, s. 24.
[42] Ibidem, s. 25.
[43] Ibidem, s. 26.

nych, dochodzi do następującego określenia matematyki: do niej odnosi się to wszystko, w czym bada się porządek i miarę, i to niezależnie od przedmiotu tych badań. Możemy ich poszukiwać w każdym przedmiocie, tak w liczbach, jak i w gwiazdach, dźwiękach. **Matematykę określamy więc nie poprzez przedmiot jej badań, bo jest on dowolny, lecz poprzez sposób badania (poszukiwanie porządku i miary)**. Kartezjusz proponuje budować maksymalnie ogólną naukę, zgodnie z tą metodą i sposobem działania, i nazywa ją **matematyką uniwersalną**. Według niego wszystkie inne, jeśli są nazywane matematycznymi, to dlatego, że są zapośredniczone w tej matematyce uniwersalnej. Tym samym ta metoda daje też możliwość tworzenia nowych nauk matematycznych.

Jak zauważyłem, Kartezjusz w swojej konstrukcji metody i matematyki uniwersalnej odchodzi od metody analizy starożytnych. U starożytnych bowiem analizujemy założenia, o których nie wiemy, czy są prawdziwe, czy nie, między innymi poprzez wyciąganie z nich różnych konsekwencji. Dopiero takie dogłębne zbadanie wszystkich konsekwencji pozwala nam odkryć i poznawać prawdę o rzeczywistości, czyli samą rzeczywistość. Dla Kartezjusza, nie znając istoty danych rzeczy, nie możemy wyciągać z nich poprawnych wniosków. Uważa, że tak niewłaściwie „postępuje większość tych, którzy studiują mechanikę bez fizyki i sporządzają lekkomyślnie nowe przyrządy do wywoływania ruchów. Tak postępują także ci filozofowie, którzy nie troszcząc się o doświadczenia, sądzą, że prawda wyskoczy z ich własnego mózgu, jak Minerwa z mózgu Jowisza”[44]. **Ta otwartość na rzeczywistość pozaumysłową jest kluczowym elementem nowej matematyki i jej metody**. W celu poznania rzeczywistości trzeba ułożyć badane przedmioty w odpowiednim porządku, który opiera się na ich zależności, możliwości ich wzajemnego poznania (który przedmiot w oparciu o który możemy poznać). W zależności od miejsca w tym ciągu możemy podzielić te przedmioty na absolutne i względne.

> Absolutnym nazywam to wszytko, co zawiera w sobie naturę czystą i prostą, która jest przedmiotem zagadnienia, na przykład to wszystko, co rozpatruje się jako niezależne, przyczynę, pojedyncze, powszechne, jedno, równe, podobne, proste lub inne tego rodzaju […] Względnym zaś jest to, co tę samą wprawdzie posiada naturę lub przynajmniej w części w niej uczestniczy, dzięki czemu da się sprowadzić do tego, co absolutne i z niego wywieść przy pomocy pewnego szeregu, co jednak zawiera w swym pojęciu ponadto coś innego, co ja nazywam stosunkami: takim jest to wszystko, co nazywa się zależnym, skutkiem, złożonym, szczegółowym, mnogim, nierównym, niepodobnym, krzywym itd.[45]

[44] Ibidem, s. 28.
[45] Ibidem, s. 29.

Ułożenie tych elementów w ciągi zależności ma tak przebiegać, aby dało się przejść od ostatniego elementu do pierwszego, najbardziej absolutnego. Ponieważ możemy tworzyć różne ciągi zależności, sama absolutność, jak i względność, jest względna. Przykładowo, to, co ogólne, jest bardziej absolutne od tego, co szczegółowe, bo jest prostsze, jednak z drugiej strony, aby ogólne zostało utworzone, potrzebuje jednostek, więc w tym sensie jednostki są bardziej absolutne od ogółu. Tak ogólne, jak i jednostkowe staje się tylko przypadkiem szczególnym uniwersalnej kategorii absolutności. Podobnie rozciągłość jest czymś absolutnym wśród rzeczy podlegających pomiarowi (mierzalnych), jednak rozpatrując różnego rodzaje rozciągłości (długości, powierzchnie, objętości itd.), długość jest absolutna w stosunku do innych. Jeśli badamy związek przyczynowy: przyczyna – skutek, to wydaje się, że przyczyna jest czymś absolutnym, bo musimy poznać ją najpierw przed poznaniem skutku, jednak skutek jest często łatwiej poznawalny i bezpośrednio dostępny poznaniu, więc on w tym znaczeniu byłby absolutny. *De facto* mamy pełną i istotną współzależność przyczyny i skutku. Ciekawym przykładem jest badanie tego, co równe. Jeśli porównujemy różne obiekty, to „równe" staje się absolutną podstawą umożliwiającą ich porównywanie, jednak ponieważ z natury jest to pojęcie względne, gdyż odnosi się do różnych obiektów (jest od nich zależne), które są porównywane.

To śledzenie wzajemnych zależności w kategoriach „względne – absolutne" pozwala nam odkrywać i poznawać ukryte prawa. Interesujący jest przykład związany z ustalaniem proporcji między poszczególnymi wielkościami, co prowadzi do odkrycia zasady proporcjonalności. Trywialne jest spostrzeżenie, że ponieważ liczba 6 jest dwukrotnie większa od 3, 12 od 6, 24 od 12 itd., to pomiędzy stosunkami liczb 3 i 6, 6 i 12, 12 i 24 (i tak dalej) istnieje taka sama (równa) proporcja. Jednak ustalenie ogólnych zasad proporcjonalności między wielkościami stanowi potężne narzędzie badania różnych rzeczy, często niedostępne bezpośredniemu poznaniu. Dzięki temu mamy ustalony porządek badania tych rzeczy, co, według Kartezjusza, „stanowi już całą treść naukową czystej matematyki"[46]. Zaczynamy od proporcji najprostszych i przechodzimy do coraz bardziej złożonych. Nasza fantazja jest w stanie ujmować niezliczone parametry i wymiary rzeczywistości, jednak dla uniknięcia pomyłek i pomieszania pojęć należy w jednym ujęciu myślą ograniczyć się do dwóch. Aby to było możliwe, potrzebne są symbole.

> Co w istocie nie wymaga bezpośredniej uwagi ducha, chociażby było potrzebne do wniosku, to lepiej jest oznaczyć przy pomocy bardzo krótkich znaków niż przy po-

[46] Ibidem, s. 31.

> mocy całych figur; w ten sposób bowiem pamięć nie będzie mogła się mylić, a mimo to tymczasem myśl nie będzie się rozpraszała, aby zatrzymać jedne rzeczy, podczas gdy jest zajęta dedukcją drugich[47].

Przy oznaczaniu istotna jest jednoznaczność wprowadzanych symboli („co w celu rozwiązania trudności rozważać należy jako rzecz jedną, oznaczać będziemy jednym tylko znakiem, który można wymyślić dowolnie") i pełne abstrahowanie od konkretnych obiektów matematycznych, do których mogą się odnosić (liczb, figur i innych). Przy takim podejściu nie musimy powtarzać analogicznych działań i jest widoczny mechanizm działań dowodzenia i obliczeń, a zawsze dla ilustracji możemy podstawić za symbole konkretne obiekty matematyczne. Możemy też uprościć dzięki symbolice nazewnictwo i zamiast używać nazw, przykładowo, pierwiastek, kwadrat, sześcian, podwójny kwadrat (odnosząc się do różnych geometrycznych obiektów i wymiarów), opieramy się na pojęciu proporcji. „Odtąd więc pierwszą proporcjonalną nazywać będziemy ową wielkość, którą w algebrze nazywa się pierwiastkiem, drugą tę, którą nazywa się kwadratem, itd."[48]. Oczywiście, przy oznaczeniach literowych gubimy porządek i miarę, która wynika z natury liczb, dlatego dobrze jest sprowadzić rozwiązania do danych liczb, aby zobaczyć, czy nie dostarczą nam one nowych możliwości (dowodowych, zastosowań). I oczywiście przy stosowaniu „w pełni" symboliki algebraicznej nie jesteśmy ograniczeni przez konkretne obiekty czy wymiary geometryczne (jak w przypadku algebry geometrycznej), lecz mamy otwartość na dowolne wymiary i niezliczone obiekty matematyczne. Może ich być nieskończenie wiele, w konsekwencji nawet nieskończenie w sensie aktualnym, a nie tylko potencjalnie (takiego wniosku Kartezjusz *explicite* już nie formułuje).

Pojawia się przy wprowadzaniu symboliki ciekawe uogólnienie metody starożytnych (czego Kartezjusz wprost nie przyznaje). Kartezjusz zauważa bowiem, że

> [...] cała sztuka będzie polegała na tym, że przyjmując nieznane za znane, będziemy mogli stworzyć sobie drogę łatwo i bezpośrednio, nawet w trudnościach jak najbardziej zawiłych: i nic nie stoi na przeszkodzie, będziemy mogli stworzyć sobie drogę łatwo i bezpośrednią, nawet w trudnościach jak najbardziej zawiłych: i nic nie stoi na przeszkodzie, aby tak zawsze czynić, ponieważ założyliśmy na początku tej części, że świadomi jesteśmy, iż taka jest zależność rzeczy nieznanych w jakimś zagadnieniu od znanych, że są one w zupełności przez nie wyznaczone[49].

47 Ibidem, s. 69. Cytowany fragment to kartezjańska reguła XVI.

48 Ibidem, s. 69–71.

49 Ibidem, s. 72–73.

W metodzie starożytnych zakłada się istnienie tego, co chcemy udowodnić (na przykład, rozwiązując równanie, zakładamy, że posiada ono pierwiastek, jakoś go oznaczamy, podstawiamy do równania i wyliczamy z tego równania, a następnie sprawdzamy, czy rzeczywiście jest pierwiastkiem analizowanego równania), i tu jest podobnie, gdy ustalamy formalnie zależności formalne między wielkościami znanymi i nieznanymi, jakby miały tę samą rangę istnienia.

Zarysowana u Pascala wizja uniwersalności matematyki jest nieco inna od kartezjańskiej, jednak można ją uznać jako wizję dopełniającą. W swojej pracy *De l'Esprit géométrique* Pascal analizuje rolę badań matematycznych w dochodzeniu do prawdy. Prawda ma swoje trzy oblicza: pierwsze, kiedy znajdujemy ją jako efekt poszukiwań; następnie jako jej dowód po odnalezieniu; i trzecie, gdy oddzielamy ją od błędu po jej badaniach. Pascal deklaruje, że zajmuje się tym drugim aspektem, który w oczywisty sposób zawiera w sobie aspekt trzeci. Natomiast geometria (matematyka) wskazuje swoją przewagę nad tymi sposobami znajdowania prawdy nieznanej, gdyż jej sztuka dowodzenia pokazuje, że dowód, który został przeprowadzony zgodnie z zasadami, prowadzi do ścisłego wyniku, którego nie można podważyć. Do pokazania działania dowodu matematycznego wystarczająca jest geometria, która uczy posługiwania się tą metodą na samych przykładach, bez teoretycznych rozważań.

> And because this art consists of two main parts, the proving of each proposition individually and the arranging of all the propositions in the best order, my treatise will have two sections, of which one will contain the rules of geometrical demonstrations, that is, scientific and perfect demonstrations, and the other will contain the rules of geometrical order, that is, scientific and complete order; so that the two sections taken together will include everything necessary for guiding the reason in proving truths and in distinguishing them from errors. My intention is to give these rules in their entirety[50].

Celem Pascala jest więc pokazanie mechanizmu działania doskonałego dowodu, na przykładach, poprzez analizę dowodów geometrycznych oraz pokazanie geometrycznego porządku, który takie dowody umożliwia. Jednak, jak można zauważyć, ogólna idea (idealnego) dowodu geometrycznego wykracza poza możliwości człowieka i praktyki naukowej. Zakłada ona bowiem, że musimy zrealizować dwa podstawowe kroki: po pierwsze, używać tylko takich wyrażeń, których znaczenie jest całkowicie wyjaśnione, a po drugie – nie przyjmować żadnego twierdzenia bez udowodnienia go poprzez

---

[50] B. Pascal, *The Provincial Letters. Pensees. Scientific Treaties,* [w:] *Great Books of the Western World,* t. 33, The University of Chicago, 1952, s. 430.

prawdy już znane. Trzeba więc zdefiniować wszystkie używane wyrażenia i udowodnić wszystkie twierdzenia. Pascal podaje jednak sposób pozwalający ominąć tę trudność. Nie musimy bowiem zdefiniować ani dowodzić wszystkiego, a jedynie to, co nie jest jasne na podstawie światła naturalnego. Nie definiujemy tego, co jest jasne dla wszystkich, ani nie dowodzimy tego, co wszyscy znają. „Grzeszą przeciwko tym zasadom zarówno ci, co się silą na definiowanie i dowodzenie wszystkiego, jak i ci, co niechają to czynić względem czegoś, co nie jest oczywiste samo przez się”[51]. Stwierdza, że musimy pogodzić się z tym, że istnieją wyrazy niezdefiniowane, na przykład „byt”, „czas”, „liczba”, „równość”, „wszystko”, „większość”, „ruch”, „przestrzeń”. Pewne pojęcia, jak i prawdy, dane są z natury wszystkim ludziom, co nie oznacza, że mamy taką samą znajomość ich natury. Wystarczy tylko to, że dane słowo kieruje nas ku temu samemu przedmiotowi. Należy więc definiować tylko te rzeczy, które tego wymagają (reguła I), oraz nie dowodzić twierdzeń oczywistych, których prawdziwość dana jest przez światło naturalne (reguła II). Tak właśnie postępuje geometria, a to, że nie wszystko jest w niej definiowane, jest jej zaletą, nie wadą, gdyż nie jest skutkiem trudności w pojmowaniu, lecz jasności. Te pierwotne (jasne) pojęcia geometrii są ze sobą powiązane (chodzi szczególnie o ruch, liczbę i miarę) w jedną całość, a relacje między nimi są oczywiste.

> Istnieją zatem właściwości wspólne wszystkim rzeczom. Ich poznanie przybliża umysł do największych cudów natury. Najpierwszy z nich – to dwie nieskończoności, które napotykamy we wszystkim: nieskończoność wielkości i nieskończoność małości[52].

Dla każdej wielkości możemy dowolnie ją zwiększać i zmniejszać (nie istnieją więc wielkości niepodzielne). Między tymi dwiema nieskończonościami istnieje ścisła relacja: z istnienia jednej wynika istnienie drugiej. Jesteśmy pomiędzy dwiema nieskończonościami. Ten fakt świadczy o ogromie i potędze natury i daje człowiekowi potężne możliwości badawcze. Trzeba zobaczyć jednak, że znajdujemy się między nieskończonością a nicością przestrzeni, między nieskończonością a nicością liczby, między nieskończonością a nicością ruchu, między nieskończonością a nicością czasu[53]. Zauważmy, że doświadczona i wprowadzona przez Pascala „próżnia” jest takim bytem pomiędzy „nieskończonością materii” a nicością.

To pascalowskie rozumienie matematyki jest inne niż kartezjańskie jeszcze w jednym punkcie. Podstawą pewności jest u niego nie tylko we-

[51] Ibidem, s. 120.
[52] Ibidem, s. 127.
[53] Por. ibidem, s. 139.

wnętrzna intuicja oczywistości, lecz również to, co jest jasne na podstawie powszechnie dostępnego światła naturalnego. Okazuje się, że nie wszystko należy definiować, gdyż istnieje wspólna podstawa (własności wspólne wszystkim rzeczom oraz poznawane tak samo przez wszystkich w oparciu o światło naturalne). Charakterystyczną cechą pascalowskiej uniwersalności matematyki jest również to, iż będąc rozpięta między nieskończonością a nicością, uczestniczy w obu tych wymiarach rzeczywistości. Podstawowe kategorie określające u niego rzeczywistość są znacznie bogatsze od kartezjańskich, gdzie właściwie mamy tylko jedną taką kategorię: rozciągłość. Ruch u Kartezjusza jest tylko zmianą konfiguracji geometrycznej materii (nie ma pustej przestrzeni), a więc też sprowadza się do badania rozciągłości.

Analizując w poprzednim paragrafie przełom nowożytny, zauważyłem, że w tym okresie matematyka stała się narzędziem umożliwiającym, w ramach nauk przyrodniczych, poznawanie rzeczywistości (nie tylko w jakimś aspekcie, lecz generalnie). Przez to stała się niezbędnym składnikiem teorii przyrodniczych (na początku tylko fizyki i nauk pokrewnych). Ten nowy wymiar uniwersalności sprawia, że przedmiotem badań matematycznych stają się dowolne kategorie bytowe, w tym tak zwane jakości (a nie tylko to, co możemy mierzyć i liczyć). Najbardziej spektakularne było ujęcie przy pomocy modeli matematycznych nauk technicznych (przy pomocy fizyki matematycznej), co doprowadziło do rewolucji przemysłowej. Było to zresztą jakby dokończenie rewolucji technicznej z czasów antycznych, jednak na dużo większą skalę (i z wykorzystaniem nowych narzędzi matematycznych). Podstawowe prawa ruchu i oddziaływań między ciałami zostały wyrażone przy pomocy prostych wzorów matematycznych, wiążących kilka podstawowych parametrów (masa, siła, czas, prędkość). Prostota wzorów, przy pomocy których tak wiele zjawisk opisywano, była uderzająca. W ten sposób materia, ruch i siła (związane ze sobą) uzyskały status nowych pojęć elementarnych. Również czas i przestrzeń (nie tylko jako przestrzeń geometryczna) stały się przedmiotem badań matematycznych.

Kartezjusz deklarował zrywanie w swojej nowej matematyce z matematyką czasów wcześniejszych, chociaż ma miejsce – możliwe, że nieświadome – nawiązywanie do osiągnięć matematyków starożytnych, np. Apoloniusza. Inni twórcy, tacy jak Pascal, Fermat, Wallis, Desargues, Galileusz, celowo odwoływali się do wyników poprzedników, mając jednak świadomość nowości swoich metod.

W metodzie matematyki antycznej dominująca była metoda hipotetyczno-dedukcyjna, gdzie poprzez dedukcyjne wyciąganie wniosków z przyjętych hipotez starano się dojść do prawdziwych założeń (aksjomatów), na których można byłoby oprzeć strukturę danej teorii matematycznej. Wydaje się, że tak były tworzone *Elementy* Euklidesa, które są efektem wielu wcześniejszych takich prób i badań. Te *Elementy* nie były pierwsze, ale można założyć, że nie miały być też ostatnie, gdyż po Euklidesie dalej były prowadzone badania nad podstawami geometrii (prace Teodozjusza, Hypsiklesa, Menelaosa i innych). Natomiast w czasach nowożytnych zapomniano o tej metodzie i założono, że przyjęte aksjomaty są po prostu prawdziwe. Przestano je badać, poszukiwano ewentualnie źródła ich prawdziwości, a słynny piąty postulat Euklidesa o równoległych (który nie wydawał się tak oczywisty, jak pozostałe) starano się udowodnić. Aby jednak dojść do tych oczywistych podstaw teorii, trzeba przy pomocy intuicji (lub innej władzy umysłu) przejść proces (*de facto* nieskończony) odrzucania wszystkiego, co nie jest jasno i wyraźnie pojmowalne. Tak Kartezjusz, jak i Pascal przyjmują istnienie światła naturalnego (rozumu), które pozwala do tych oczywistości dotrzeć. I dopiero wtórnie, mając pewną liczbę tych oczywistych dla rozumu prawd, możemy konstruować (czy rekonstruować) kolejne teorie i zdobywać całą wiedzę o świecie.

5. Rozwój matematyki po przełomie nowożytnym

Jak zauważyłem w paragrafie 3, w połowie XVII wieku w matematyce nastąpił przełom związany z pojawieniem się całkiem nowych teorii matematycznych, które od tego momentu zaczęły swój intensywny rozwój: rachunek różniczkowy i całkowy, analiza matematyczna, geometria rzutowa, geometria analityczna. Ponadto centralne teorie matematyczne: astronomia, mechanika oraz optyka, zostają wyłączone z dziedziny nauk matematycznych i stają się głównymi teoriami nauk fizycznych – „nowej fizyki". Tym samym ta nowa fizyka startuje od razu z dość wysokiego pułapu, bogata w stosunkowo zaawansowane narzędzia matematyczne. Wiele innych narzędzi fizyki domagało się jednak dopracowania. Były one zresztą związane z nowymi obszarami badań matematycznych, przede wszystkim z analizą matematyczną, rachunkiem różniczkowym i całkowym, rachunkiem wariacyjnym. To wkroczenie matematyki na nieznane jej wcześniej obszary rodziło wiele niejasności i sprzeczności (przede wszystkim związanych z używaniem pojęcia nieskończenie małej, ciągłości, granicy, funkcji) i domagało się badań i uściśleń i wiązało się z atakiem na nową matematykę. W dużej mierze krytykowane są podstawy tych nauk i filozofia dopuszczająca stosowanie wielkości nieskończenie małych, sum nieskończonych, niejednoznacznych i niezdefiniowanych pojęć funkcji i ciągłości.

Kluczową postacią dla podjęcia nowych idei i przekazania ich dalej był **Christiaan Huygens** (1629–1695), który zajmował się doprecyzowaniem zasad rachunku różniczkowego i całkowego. Kontynuował też prace z rachunku prawdopodobieństwa (*O grze w kości*). Szczególnie istotny miał wpływ na rozwój optyki i astronomii. Był jednym z członków założycieli Francuskiej Akademii Nauk. Przez dłuższy czas mieszkał w Paryżu (1666–1681), gdzie spotykał się z najwybitniejszymi uczonymi (spotkania odbywały się raz w tygodniu), w tym z Robervalem, Pascalem, Desarguesem. Też w Paryżu zaprzyjaźnił się z Leibnizem (od 1672) i wpłynął na jego zainteresowania matematyczne. W roku 1673 wydaje pracę *Horologium Oscillatorium,* która wychodząc od klasycznych badań geometrycznych (zagadnienia krzywych), dochodziła do zagadnień dynamiki (drgania ciał wokół nieruchomej osi, prawo ruchy drgań wahadła prostego, prawo siły odśrodkowej dla ruchu kołowego).

Badając teorię grawitacji Newtona, poszukiwał dla niej matematycznych i mechanicznych uzasadnień. Nieakceptowalne było dla niego przyjęcie założenia o oddziaływaniu grawitacyjnym dwóch ciał na odległość. Swoje analizy publikuje w 1690 w pra*cy Discours de la cause de la pesanteur,* w której, w oparciu o kartezjańską koncepcję wirów, próbuje podać przyczynę siły grawitacyjnej. Natomiast w traktacie optycznym *Traité de la Lumière* (wydanym w tym samym roku) przedstawia konkurencyjną wobec teorii korpuskularnej Newtona falową teorię światła. W precyzyjny sposób wyjaśnia prawo odbicia i refrakcji. Badania astronomiczne (udoskonalił teleskop, dzięki któremu odkrył księżyc Saturna, Tytan oraz wydzielił gwiazdy w gwiazdozbiorze Oriona) skłoniły go do pracy nad ulepszeniem zegarów, aby precyzyjniej mierzyć czas. Stąd prace nad teorią wahadła oraz skonstruowanie zegara wahadłowego. Brak możliwości precyzyjnego pomiaru czasu był podstawową przeszkodą w prowadzeniu badań astronomicznych, jak również w obliczaniu długości geograficznej (co było niezmiernie ważne w podróżach dalekomorskich).

Huygens związany był również z Royal Society, do którego został przyjęty w 1663 roku. Tam poznał Wallisa, którego badania nad rachunkiem nieskończenie małych kontynuował. Jest ważnym ogniwem w powstaniu rachunku różniczkowego i całkowego (między Wallisem a Leibnizem). Ponadto połączył podejście Galileusza do badania zjawisk z projektem Kartezjusza, w którym nowa matematyka miała w pełni opisać i wyjaśnić prawa przyrody. Pokazał tę możliwość na przykładzie ruchu wahadła, który w pełni opisał jako system dynamiczny[54].

Bezspornie uznaje się, że twórcami rachunku różniczkowego i całkowego byli Leibniz i Newton. Ta teoria stała się sztandarową teorią matema-

[54] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 417–422.

tyki nowożytnej (mimo ogromnego oporu współczesnych), będąc podstawą wielu zastosowań technicznych, ale też stanowiąc źródło i podstawę dla innych teorii matematycznych. Widzieliśmy jednak, że droga do jej powstania była długa, a początki badań sięgają czasów starożytnych, do wielkich matematyków IV i III wieku p.n.e., do badania krzywych oraz opracowywania metod obliczania powierzchni płaszczyzn i brył (metoda wyczerpywania). Wiele wykonanych konstrukcji krzywych, tak metodami geometrycznymi, jak i mechanicznymi, oraz obliczanie pół powierzchni doprowadziło w końcu do spostrzeżenia, że obliczanie stycznych do krzywych oraz pól powierzchni są operacjami wzajemnie odwrotnymi. W ten sposób powstała jedna teoria matematyczna: teoria fluksji (pochodnych) i fluent (zmiennych) Newtona oraz rachunek różniczkowy i rachunek całkowy Leibniza.

Teoria Newtona powstaje w latach 1665–1666, nie jest jednak przez dłuższy czas publikowana, a krąży wśród uczonych w odpisach. Leibniz słyszał o odkryciach Newtona, odkrył swój nowy rachunek nieco później, bo w latach 1673–1676, i opublikował w „Acta Eruditorum" w dwóch numerach (1684 – rachunek różniczkowy, 1686 – rachunek całkowy). Mimo oskarżenia Leibniza przez Newtona o plagiat, widać, że ten pierwszy stworzył swoją teorię niezależnie. Jest ona oparta na innych podstawach (algebraicznych), natomiast rachunek fluksji Newtona ma podstawy kinematyczne. Spór nie był korzystny dla nauki, doprowadził bowiem do ograniczenia wymiany myśli między uczonymi angielskimi a kontynentalnymi. Ponadto notacja wprowadzona przez Leibniza (symbol różniczki dx, samo d jako symbol różniczkowania oraz symbol całki $\int dx$ jako nieskończonego sumowania, czyli całkowania) oraz proste reguły algebraiczne obliczania pochodnych sum, iloczynów i ilorazów okazały się bardzo wygodne i przyczyniły się do gwałtownego rozwoju matematyki. Przykładowo: $d(x+y) = dx + dy$, $d(xy) = = xdy + ydx$, $d(\frac{x}{y}) = \frac{xdy-ydx}{y^2}$, a $d(ax^n) = nax^{n-1}$ (x, y są to wielkości zmienne, natomiast a jest wielkością stałą)[55]. Swoimi metodami zainteresował Leibniz braci **Bernoullich**, Jakuba (1658–1705) i **Johanna** (1667–1748), a następnie **Guillaume'a François Antoine'a de l'Hospitala** (1661–1704). Jednak najwybitniejszym zwolennikiem i kontynuatorem matematyki Leibniza był **Leonard Euler** (1707–1783), a po nim **Giuseppe Lodovico Lagrangia** (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813)[56]. To dzięki nim rachunek róż-

55 *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 2, s. 246–269; 273–288.

56 Sukces rachunku różniczkowego i całkowego został osiągnięty dzięki zgromadzeniu przez Leibniza grupy wybitnych matematyków, którzy zrozumieli nowe metody i je rozwijali. Mimo ogromnego oporu ówczesnych uczonych ta metoda okazała się skuteczna i nowa

niczkowy i całkowy oraz analiza matematyczna uzyskały swoją dojrzałą postać. To tworzenie przez Leibniza wokół siebie grupy uczniów i zwolenników stało się przyczyną sukcesu jego metod matematycznych. Był zresztą bardzo aktywny w propagowaniu swoich idei matematycznych i filozoficznych wśród uczonych i polityków (liczne spotkania i ogromna korespondencja). Dzięki temu stworzył szkołę matematyczną przekraczającą granicę jednego kraju, chociaż jego najważniejsze idee (otwierające nowy przełom w matematyce) nie znalazły uznania u współczesnych i nawiązano do nich dopiero w połowie XIX wieku. Wydaje się to jednak naturalne, skoro metody (nieskończonościowe, ciągłościowe, graniczne, funkcyjne itd.) nowej (nowożytnej) matematyki domagały się dopracowania i uściślenia. Trudno było otwierać nowy front badań matematycznych, kiedy jeszcze niepewny był sukces na tym dopiero co otwartym. Zresztą bracia Bernoulli byli *de facto* pierwszymi uczonymi, którzy zrozumieli rachunek Leibniza i podjęli badania nad jego zastosowaniami. Jednym z pierwszych problemów, który został rozwiązany przy pomocy nowego rachunku, było zagadnienie brachistochrony – krzywej najszybszego spadku masy punktowej pod wpływem stałej siły (został rozwiązany przez Leibniza, ale również przez Johana Bernoulliego, Newtona i d'Hospitala). Tą krzywą okazała się znana już wcześniej cykloida. Badania różniczkowe nad funkcjami i innymi obiektami matematycznymi w krótkim czasie doprowadziły do powstania nowych działów matematyki: teorii równań różniczkowych, rachunku wariacyjnego, geometrii różniczkowej, analizy zespolonej, itd.[57]

Jednak dopiero Leonarda Eulera, szwajcarskiego matematyka działającego głównie w Prusach i Rosji, można uznać za twórcę analizy matematycznej. Jego ogromny dorobek (ponad 500 prac opublikowanych za życia i ponad 900 wszystkich) zmienił oblicze matematyki. Praca Eulera *Introductio in analysin infinitorum* (*Wprowadzenie do analizy nieskończoności*) stanowi fundament analizy matematycznej. W tej pracy mają miejsce badania nad ideą funkcji, nieskończonych szeregów, rozwijania funkcji w szeregi nieskończone (m.in. funkcji trygonometrycznych, wykładniczych), pojawiają się metody obliczania liczby π, liczba Eulera e, słynny wzór Eulera $e^{i\pi} + 1 = 0$

---

matematyka w kilka pokoleń zdominowała świat nauki. Również istotne było powołanie przez Leibniza instytucji (Pruska Akademia Nauk), która propagowała nowe metody. Podobnie metoda fluksji i fluent Newtona (oraz jego mechanika) stała się dominującą teorią w Anglii, dzięki wsparciu administracyjnemu. Newton został bowiem przewodniczącym Royal Society i przez wiele lat wyznaczał kierunki badań i wspierał zwolenników swoich teorii (przy okazji ostro zwalczając konkurentów).

57 Ibidem, s. 288–301.

(i wiele innych wyników). Ten wzór łączy w jednej formule liczby symbolizujące różne działy matematyki: 1– arytmetykę, 0 – algebrę, π – geometrię, natomiast e oraz i – analizę. Jest nie tylko symbolicznym połączeniem tych dziedzin, lecz pokazuje jedność matematyki, która została utrzymana, między innymi dzięki pracom Eulera.

Uczony wydaje też wielkie prace z rachunku różniczkowego i całkowego: *Institutiones calculi differentialis* (1755) oraz dzieło w trzech tomach (po śmierci wyszedł tom czwarty) *Institutiones calculi integralis* (1768–1770). W roku 1744 wychodzi w Lozannie jedna z najpiękniejszych prac matematycznych *Metody znajdowania linii krzywych, mających właściwości maksimum, lub prowadzących do rozwiązania zadania izoperymetrycznego, pojętego w najszerszym znaczeniu słowa.* Jest to praca z rachunku wariacyjnego, jednej z najważniejszych teorii matematycznej mającej ogromne zastosowania w fizyce, naukach technicznych i w innych dziedzinach wiedzy. Ponadto w dodatku umieszcza Euler analizy stanowiące podstawy teorii stabilności[58].

Prace Eulera, ale również Newtona, Leibniza i Bernoullich, kontynuuje Lagrange. W 1788 roku wychodzi jego *Mechanika analityczna,* w której przedstawia generalną metodę rozwiązywania zagadnień mechaniki przy pomocy równań różniczkowych.

Wiele jednak pojęć, które stosuje Euler i inni matematycy tego okresu, nie ma jeszcze ustalonej definicji, można powiedzieć, że są one w trakcie opracowywania. Wydaje się, jakby ścisłe definicje i dowody przeplatały się z rozumowaniami opartymi na znanej tylko Eulerowi intuicji. Z jednej strony Euler jest na długiej drodze, która doprowadziła do uściślenia podstawowych pojęć analizy matematycznej dopiero w drugiej połowie XIX wieku. Jednak ważniejsze jest to, że rozpatruje on różne możliwości rozbudowy matematyki i jej rozwoju. Dlatego raz funkcję traktuje jako pojęcie analityczne, a kiedy indziej na sposób geometryczny jako krzywą. Podobnie jest w przypadku wykonywania operacji na szeregach nieskończonych. W wielu przypadkach rygorystycznie sprawdza ich zbieżność, a w innych wykonuje na szeregach różne operacje algebraiczne, abstrahując od kwestii ich zbieżności. Uważa się go tutaj za prekursora współczesnej teorii szeregów formalnych. Szczególnie interesująca jest sytuacja w przypadku wielkości nieskończenie małych. Idąc drogą Leibniza, traktuje je jako wielkości, na których można wykonywać operacje algebraiczne, tak jak na liczbach. Jednak nie podzielał filozofii Leibniza w zakresie jego monadologii i relacyjnej koncepcji czasu i przestrzeni. Dla niego (jak dla Newtona) czas i przestrzeń były abso-

[58] *Historia matematyki*, red. A.P. Juszkiewicz, t. 3, s. 267–281.

lutne, co miało być gwarancją niezmienności i wieczności praw przyrody. Dlatego nie podjął programu Leibniza związanego z budową całkiem nowej nauki – *ars combinatoria*.

Charakterystyczna dla okresu oświecenia jest postać Jeana d'Alemberta (1717–1783), matematyka będącego jednym z twórców *Wielkiej Encyklopedii*. Dzieło to było wyrazem zachwytu nad osiągnięciami rozumu ludzkiego i zbierało w 28 tomach najważniejsze osiągnięcia nauki. D'Alembert napisał wstęp do *Encyklopedii*, będący swoistym manifestem ideowym. Jako matematyk pisał znaczące prace z równań różniczkowych oraz mechaniki[59].

Przełom wieków XVIII i XIX to czas rewolucji francuskiej, wojen napoleońskich oraz rewolucji przemysłowej, która doprowadziła do kluczowych zmian społecznych. W związku z powstaniem potężnych fabryk i osiedli przemysłowych, następuje przemieszczenie się znacznej liczby ludności ze wsi do miast i osiedli. Pojawia się ogromne zagęszczenie mieszkańców, a czas pracy robotników zaczyna przekraczać wszelkie rozsądne normy (liczy się jedynie efektywność produkcyjna i zysk). Warto też pamiętać, że rewolucja francuska zniosła święta chrześcijańskie, będące dniami wolnymi od pracy, a ich przywrócenie za Napoleona nastąpiło w wyraźnie mniejszym wymiarze. Rodziny robotników stały się *de facto* niewolnikami swoich pracodawców (znacznie pogorszył się ich los w stosunku do wcześniejszego losu jako chłopów pańszczyźnianych). Mimo że u podstaw tych przemian stał nowożytny rozwój matematyki, myślę, że nie można jej (oraz nauki i techniki) oskarżać o te negatywne zmiany. Rozwój matematyki dostarcza nowych możliwości działań gospodarczych i ekonomicznych, co pozwala na bogacenie się, jednak nie musi prowadzić do wzrostu nierówności społecznej.

Zresztą matematyka w XIX wieku rozwijała się dynamicznie dalej, tworząc nowe teorie matematyczne i pokazując zastosowania matematyki. Ten rozwój pomijał fakt, że wiele pojęć i metod matematycznych było nieścisłych i niedopracowanych. Nie przejmowano się „grząskimi" podstawami i budowano dalej gmach matematyki. Jednak rozwijał się w matematyce również drugi nurt, bardziej zatroskany o podstawy, w którym dążono do uściślenia podstaw nowych nauk. Najważniejsze próby obrony jedności i ścisłości matematyki miały miejsce w pracach Bernarda Bolzana (1781–1848), Augustina Cauchy'ego (1789–1857), Carla Friedricha Gaussa (1777–1855), Karla Weierstrassa (1815–1897), Bernarda Riemanna (1826–1866) oraz Georga Cantora (1845–1918). Pojawiała się też pewna zmiana w podejściu do związku matematyki i filozofii. O ile działania Gaussa i Cauchy'ego i We-

---

[59] J.R. d'Alembert, *Wstęp do encyklopedii*, tłum. J. Hartwig, PWN, Warszawa 1954.

ierstrassa podtrzymywały osiemnastowieczną wizję konieczności ich rozdziału, o tyle Bolzano, Riemann i Cantor dostrzegali znaczenie refleksji filozoficznej dla rozwoju nauki[60].

Bolzano dążył do przebudowy podstaw matematyki i podawał precyzyjne definicje linii, powierzchni oraz brył[61]. W *Betrachtungen* starał się podać definicję linii wolną od elementów intuicyjnych, opartą na podstawach ściśle logicznych[62]. Dalsza analiza podstawowych pojęć geometrii doprowadziła Bolzana do badań teoriomnogościowych i topologicznych (jak wiadomo, pomysł badań topologicznych pojawia się u Leibniza w jego idei matematycznej analizy położenia – *Analysis situs*). Pragnął dać geometryczno-topologiczną oraz teoriomnogościową podstawę całemu gmachowi analizy. Przyjmuje, że figury geometryczne (krzywe, powierzchnie i bryły) są zbiorem punktów i pokazuje, w jaki sposób punkty „wiążą" się ze sobą, tworząc krzywe, powierzchnie i bryły[63].

Również Cauchy pracował nad przebudową podstaw analizy matematycznej. Swoje wysiłki zebrał w pracach: *Analyse algébrique* (1821) oraz *Calcul infinitésimal* (1823). Starał się uściślić pojęcie granicy, które, odpowiednio zdefiniowane, miało służyć do budowania nowych ścisłych pojęć, takich jak: ciągłość funkcji, pochodna, całka czy zbieżność szeregów. Dzięki Cauchy'emu pojęcie granicy staje się centralnym pojęciem analizy matematycznej. Badał także pojęcie funkcji, które do jego czasów rozumiane było intuicyjnie. Przykładowo – zakładano, że każdą funkcję można rozwinąć w szereg potęgowy oraz że zawsze możliwe jest całkowanie szeregów nieskończonych „wyraz po wyrazie". To udało mu się uporządkować i uściślić w oparciu o pojęcie granicy.

Nie tylko Lagrange, ale również Gauss (i wielu innych matematyków) dążył do wyeliminowania z matematyki rachunku na wielkościach nieskończenie małych (jak i nieskończenie dużych). Dopiero powstanie teorii liczb rzeczywistych (Cantor, Dedekind) oraz teorii mnogości (Cantor) ukazało matematyczny charakter badań nad nieskończonością. Powstało też wiele nowych teorii wynikających z badania podstaw matematyki (głównie geome-

60 W. Wójcik, *Józef Maria Hoene-Wroński jako wizjoner i reformator matematyki,* [w:] *Hoene-Wroński*: *życie, matematyka i filozofia*, red. P. Pragacz, IM PAN, Warszawa 2008, s. 87–103.

61 B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Erste Lieferung, Praga 1810, s. V.

62 Idem, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementrargeometrie*, Praga 1804, s. 57.

63 Ibidem, s. 20–21.

trii i analizy), w tym geometrie nieeuklidesowe (Gauss, N.I. Łobaczewski, J. Bolyai, B. Riemann), arytmetyki niearchimedesowe, analiza niestandardowa (A. Robinson) i wiele innych.

Interesujący jest fakt podjęcia w czasach współczesnych co najmniej dwóch programów nauki antycznej. Jednym z nich, w nawiązaniu do *Geometrii* Euklidesa, była aksjomatyzacja kolejnych teorii matematycznych. Miał to być argument za ich ścisłością, w pełni matematycznym charakterem. Powstały teorie aksjomatyczne arytmetyki (H.G. Grassman, 1861, G. Peano, 1889), teorii mnogości (E. Zermelo, 1907, A. Fraenkel, 1921), teorii prawdopodobieństwa (A.N. Kołmogorow, 1933). Drugim było podjęcie programu budowy logiki jako nauki podstawowej dla innych nauk i uniwersalnej. Doprowadziło to do powstania logiki matematycznej i programu logicyzacji matematyki (G. Boole, A. de Morgan, G. Frege, N. Whitehead, B. Russell). Również intensywnie rozwijała się matematyka algorytmiczna, w tym przede wszystkim algebra (powstanie teorii grup, algebry uniwersalnej) oraz nauki informatyczne. Podjęcie tylu program badawczych i badań w wielu obszarach nauk matematycznych stało się możliwe dzięki znaczącemu zwiększeniu liczby ludzi zajmujących się matematyką.

Co ciekawe, intensywna praca edukacyjna i badawcza w zakresie matematyki (nie tylko w ramach jej zastosowań) rozwijała się w dużym stopniu na uczelniach nowego typu, politechnikach. Zwiększała się liczba ludzi wykształconych matematycznie i technicznie, którzy zaczęli stanowić znaczący element pozytywnych przemian społecznych. Kluczowa była świadomość racjonalnych korzeni (tkwiących w matematyce) nowych odkryć naukowych.

Z jednej strony ta świadomość dawała impuls do pozytywnych i racjonalnych przemian, jednak z drugiej – generowała myślenie redukcjonistyczne i destrukcyjne. Przykładowo, w rozwijającym się w XIX i XX wieku scjentyzmie i pozytywizmie uznano, że nauki matematyczno-przyrodnicze zastąpią wszelkie inne metody poznawcze i przyniosą ludzkości dobrobyt i szczęście. Dlatego zaproponowano dla „dobra ludzkości" oddzielenie nauki i nauczania od wszelkich elementów związanych z filozofią i religią. Jednak bez tego związku z filozofią nauka nie potrafi ukazać niesionych *de facto* przez siebie wartości etycznych i humanitarnych. Ponadto dzielenie kultury poprzez dewaluowanie niektórych fragmentów zagraża jej rozwojowi i podważa w konsekwencji jej wartość jako całości.

Nauka ciągle się rozwija i wydaje się, że jej rozwój jest niepowstrzymany, że nie grożą nam sytuacje, jakie miały miejsce w starożytności, gdy zatrzymał się rozwój matematyki antycznej. Wówczas przyczyn było kilka: nieprzychylność władców wobec uczonych, wojny i najazdy, w których ginęli uczeni i ich dzieła, brak uczonych posiadających zdolności matematyczne i zainteresowanych nauką. Zadziwiającą i przerażającą kwestią jest zapomnienie przez kolejne pokolenia ogromnego dorobku matematyki antycznej i zniszczenie przeważającej liczby prac matematycznych (prace greckich matematyków z IV wieku p.n.e. niemal w całości uległy unicestwieniu). Uczeni nowożytni jakby na nowo odkrywali stare wyniki, rekonstruowali je z fragmentów ocalałych prac. Wydaje się, że teraz nam taka sytuacja nie grozi. Mamy znacznie większą liczbę ludzi znających matematykę i inne nauki, a ponadto posiadamy pewniejsze nośniki informacji (druk, spis elektroniczny), poza tym cywilizacja, w której żyjemy, jest znacznie stabilniejsza. Jednak generalnie rozwojowi nauki zagrażają różne, ciągle odnawiające się i nowe, formy barbarzyństwa. Wzrastająca potęga nauki niestety dała i ciągle daje narzędzia destrukcji i zniszczenia nowym barbarzyńcom, uderzającym w ludzi, kulturę i całą cywilizację (antyludzkie ideologie, wojny światowe, rewolucje, pseudonaukowa i edukacyjna działalność). Ponadto kluczowym elementem rozwoju nauki jest twórcza wymiana myśli, podejmowanie wyników osiągniętych przez innych uczonych, docenianie wartości działalności naukowych w innych obszarach i budowanie autentycznych wspólnot naukowych. Wobec wykładniczego wzrostu produkcji naukowej staje się to coraz trudniejsze, a w wielu przypadkach niemożliwe. Nie istnieje też kryterium odróżniające prace wartościowe od bezwartościowych. Kryterium przydatności w gospodarce czy w innych obszarach życia społecznego nie działa w przypadku matematyki, której nowe teorie muszą się rozwijać często przez kilka pokoleń, zanim osiągną odpowiedni poziom.

Rozdział V
Analiza różnych wymiarów uniwersalności matematyki

1. Analiza pojęcia przełomu w naukach. Polemika z pojęciem rewolucji naukowej

Analizując matematykę antyczną, średniowieczną oraz nowożytną, zauważyliśmy występowanie różnych programów badawczych, które w wielu miejscach znacznie różniły się od siebie. Istniała wyraźna różnica między matematyką pitagorejską a platońską (spór Archytas – Platon), a również między tymi koncepcjami a projektem Demokryta czy Archimedesa. Arystotelesowski projekt nauki (w tym matematyki), który znacząco rozszerzał jej zakres, różnił od trzech poprzednich. Wydaje się, że nie był *de facto* realizowany w matematyce, chociaż miał na nią pewien wpływ. Wytworzył jednak powszechną opinię o matematyce jako o wiedzy mającej ograniczony zakres badań. Nawet gdy w czasach nowożytnych pojawiło się matematyczne przyrodoznawstwo, a w XIX i XX wieku nowe „jakościowe" dyscypliny matematyczne, dalej pokutowało przeświadczenie arystotelesowskie, że matematyka jest nauką jedynie o ilości i wielkości. Zauważyliśmy, poprzez przeprowadzone analizy historyczne, że już w czasach antycznych i średniowiecznych, a tym bardziej nowożytnych, występowały badania w matematyce wykraczające poza „matematykę ilościową" (teoria stosunków Eudoksosa, badania algorytmów i form algebraicznych, teoria szerokości form, matematyka nieskończoności, ciągłości, funkcji i procesów granicznych), a więc wykraczające poza program arystotelesowski.

Olaf Pedersen postawił tezę, polemizując z poglądem o dominacji platonizmu w matematycznej działalności, że poza platońskim równie znaczący (a może i bardziej) był nurt archimedesowski[1]. Podejmując ten wątek, w swojej książce *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii continuów*[2], wyróżniłem dodatkowy nurt pitagorejski, odróżniając go od

---

[1] Por. O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza,* Biblos, Tarnów 1997, s. 39–54; tłum. W. Skoczny na podstawie wykładów O. Pedersena wygłoszonych w Cambridge w 1988.

[2] W. Wójcik, *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów*, s. 82–91.

platońskiego i archimedesowskiego. Nurt badawczy nie jest tym samym, co „program badawczy" w sensie Lakatosa. Nurty badawcze, które pojawiły się w starożytności, nie uległy degeneracji, lecz trwają przez cały okres dziejów i oddziałują na kolejne idee i teorie matematyczne, stanowiąc istotne źródło inspiracji. Są połączeniem pewnych elementów filozofii matematyki i pokazują możliwości budowania obiektów i teorii matematycznych, w oparciu o podstawowe idee, które przyjmują różne matematyczne realizacje.

Taką ideą w nurcie **pitagorejskim jest harmonia**, która tkwi u podstaw rzeczywistości i matematyki. Najpełniej pitagorejska wizja matematyki i sposobu prowadzenia badań widoczne są u Archytasa. Jak pokazałem wcześniej, na przykładzie sporu między nim a Platonem, widać wyraźnie różnicę między platonizmem a pitagoreizmem w matematyce. Charakterystyczne dla pitagoreizmu jest odnoszenie matematyki do rzeczywistości materialnej i rozpoznawanie w niej struktur matematycznych. Jak już wspominałem, według Diogenesa z Laertios, Archytas był twórcą mechaniki matematycznej, tym, który zastosował w mechanice prawidła matematyczne. **Ta możliwość szerokiego stosowania matematyki jest związana z dualistycznym charakterem matematyki: ujmuje to, co określone (odsłania naturę rzeczy), a zarazem można ją stosować do tego, co nieokreślone (jest czynnikiem porządkującym)**[3]. Jeśli poznawana rzeczywistość wydaje się posiadać jakieś niedoskonałości, to należy system świata uzupełnić zgodnie z harmonią i zasadami obowiązującymi wśród liczb. Postrzegana niedoskonałość świata jest efektem niedostrzegania w nim struktur matematycznych. Dualistyczny charakter matematyki realizowany jest u pitagorejczyków przez budowanie dwóch matematyk: liczb parzystych i liczb nieparzystych. Jednak w gruncie rzeczy najważniejsza jest matematyka Harmonii (do niej nie mamy pełnego dostępu), traktująca liczby jako całość i ukazująca tę harmonię w rzeczywistości. Ta Harmonia jest źródłem matematyki i jej jedności. Znajduje się poza nią i jest pitagorejskim *arche*.

W pewnym sensie wspomniana przez Archytasa logistyka była nauką rozpoznająca tę pierwotną Harmonię. Poznawała bowiem „prapostacie bytu" poprzez poznawanie liczb, wielkości i relacji między nimi. Była nauką czysto pojęciową i rozumową i stosowała się tak do świata przyrody, jak i świata relacji społecznych (była podstawą budowania pokoju i sprawiedliwości). Dlatego poprzez poznawanie proporcji między liczbami, harmonijnych własności figur geometrycznych, harmonijnych zależności między sferami planet czy dźwięków docieramy do całej rzeczywistości.

---

3 J. Widomski, *Ontologia liczby*, seria „Dialogikon", Kraków 1996, s. 32.

Znacząco inna jest rola i miejsce matematyki w nurcie **platońskim.** Tu nie chodzi o to, aby przy pomocy pojęć matematycznych poznać naturę rzeczy jednostkowych i konkretnych, lecz o badanie piękna bytów matematycznych samych w sobie. Podobnie jak Archytas, chce Platon budować astronomię i muzykę, jednak dopiero po ugruntowaniu niezbędnych dla nich nauk: arytmetyki, geometrii (płaskiej) i stereometrii, i nie jako nauki obserwacyjne (jak w koncepcji pitagorejskiej), lecz jako nauki „czyste". Dlatego niezbędna jest dla muzyki budowa matematycznej teorii harmonii muzycznej (nieskażonej danymi zmysłowymi) oraz stereometria (w tym geometria sferyczna) jako matematyczna podstawa astronomii. W koncepcji platońskiej warto budować piękne teorie (stereometrię i harmonię muzyczną), nawet gdyby nie dało się tych teorii dalej rozszerzać. Pitagorejskie poszukiwanie liczb i innych struktur matematycznych w świecie zmysłowym (w tym w poruszających się ciałach niebieskich i w słyszanych dźwiękach) Platon zdecydowanie odrzuca.

Według niego nauki matematyczne mają służyć do tego, aby odciągnąć duszę od świata materialnego i skierować ją do tego, co idealne. Poszukiwanie w sferze zmysłowej struktur matematycznych lub stosowanie matematyki do jej poznawania jest zajęciem irracjonalnym i nieskutecznym. Uprawianie matematyki ma w nurcie platońskim następujące zadania: odrywa nas od świata zmysłowego i uczy, jak dojść do świata idei, wskazuje na zasadniczą odrębność między światem idei a światem materialnym i pokazuje, w jaki sposób zbudować jeden świat (matematyczny), będący „modelem" tak świata idei, jak i świata materialnego. Sam świat matematyki jest jednak odrębny od obu tych światów, a jego formalna (abstrakcyjna) struktura pozwala patrzeć jakby z dystansu na oba te światy. Budowanie takich matematycznych modeli jest możliwe jednak dopiero po odpowiednio długim i intensywnym obcowaniu ze światem idei (aby nie wpaść w niedoskonałe, a właściwie pozorne piękno świata zmysłowego). Przykładem takiej konstrukcji – podanym w *Timajosie* przez Platona – jest matematyczny model świata, budowany w oparciu o strukturę wielościanów foremnych (brył platońskich). Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna matematyki jest narzędziem do opanowania metody hipotetyczno-dedukcyjnej, ta z kolei służy do poznania świata idei. Jak zauważyliśmy w paragrafie omawiającym platoński projekt matematyki, liczby idealne oraz idee geometryczne są stosunkami, ogólnymi formami idealnych proporcji, poprzez które poznajemy relacje odpowiedniości między kolejnymi, coraz niższymi rodzajami bytu, poczynając od principiów, poprzez liczby idealne (i idee geometryczne), idee generalnie i przedmioty matematyczne, a kończąc na zjawiskach. Nie znamy prac Eudoksosa, więc nie wiemy, jak wyglądał proces tworzenia i konstrukcji u tego matematyka, ale jego ogólna teoria proporcji wydaje się zgodna z tą metodą budowania matematyki. W teorii tej możemy porównywać wielkości innego rodzaju, np. liczby naturalne i wielkości geometryczne.

To platońskie wskazanie dwóch odrębnych elementów i wyostrzenie różnic między nimi jest istotnym warunkiem zadziałania metody matematycznej, która oddziałuje jak spoiwo między nimi w ramach budowanego modelu teoretycznego. W platońskiej wizji matematyki podkreślana jest autonomia przedmiotów matematyki tak wobec świata zmysłowego, jak i świata idei, w odróżnieniu od pitagorejczyków, dla których były elementami tego świata. Model matematyczny łączy w sposób „formalny'' własności obu elementów (światów) i, jak wynika z rozważań Platona, ukazuje podobieństwo między tymi światami.

Program **archimedesowski** wyraźne odróżnia się od dwóch poprzednich, chociaż czasami był z nimi mylony (a wręcz niedostrzegany jako osobny). W paragrafie omawiającym archimedesowski projekt matematyki zauważyliśmy, że kluczem do jego zrozumienia jest budowana przez Archimedesa matematyka nieskończoności, sposób stosowania przez niego matematyki do fizyki i zbudowanie techniki matematycznej. Przed stosowaniem matematyki do świata fizycznego Archimedes najpierw go odpowiednio modeluje, tworzy pewien model (fizyczny), który następnie bada matematycznie. Przykładowo, zamiast brył (np. ciał niebieskich) rozpatruje punkty materialne (którymi są środki ciężkości tych ciał). Można zastąpić oddziaływanie grawitacyjne między bryłami (ciałami) oddziaływaniami między ich środkami ciężkości. To umożliwiłoby przypisanie grawitacji wielu ciałom (a nie tylko np. Ziemi). Do tego „zastępowania" trzeba było znać ogólną (matematyczną) metodę znajdowania środka ciężkości różnych brył i posiadać generalne techniki obliczania wielkości tego, co zastępujemy, a więc kluczowe było liczenie objętości różnorodnych brył. Dopiero wtedy otworzyła się możliwość matematycznego opisania takich oddziaływań. Ta metoda uzyskuje swój ogólny charakter. Najpierw formułujemy pojęcia pozwalające na idealizację rzeczywistości, którą chcemy badać. Archimedes pokazał, że tak środki ciężkości, jak i objętości można obliczać w sposób czysto matematyczny, chociaż do ich znajdowania przydatne mogą być odkryte wcześniej prawa fizyki (np. prawo dźwigni). Następnie poddajemy te pojęcia analizie i pokazujemy możliwości matematycznego opisu skonstruowanego modelu. To, co bada Archimedes, nie jest bezpośrednio rzeczywistością fizyczną, tylko jej fizycznym modelem, który później badamy już matematycznie. Z jednej więc strony matematyka rządzi światem fizycznym, ale z drugiej strony prawa fizyczne pozwalają odkrywać zależności matematyczne i prowadzić właściwe rozumowania. Nie ma tu sprzeczności między rzeczywistością zmysłową a światem matematyki. Przywołane tu prawo dźwigni wyraża w sposób konkretny (lub mniej ogólny) to samo, co zawarte jest w ogólnej teorii stosunków Eudoksosa. Patrząc na działanie, ten sposób badania matematycznego (i zarazem fizycznego) można nazwać analityczno-dedukcyjnym. Logiczna analiza pojęć i matematyczne metody dowodzenia są skuteczne w świecie materialnym, pod warunkiem, że rzeczywistość dostarcza nam odpowiednich danych.

Przykładowo, konstruowane przez Archimedesa urządzenia mechaniczne (takie jak dźwignia, kołowrotek, katapulta) miały charakter konstrukcji matematycznych (wszystko oparte było na ścisłych prawach i obliczeniach). Nie były wzięte z rzeczywistości, lecz były w tej rzeczywistości umieszczane (wzięte ze świata matematyki) i w ten sposób ją zmieniały i wzbogacały. Również teoria logarytmów, opracowana przez Nepera na przełomie XVI i XVII wieku, miała służyć do szybkiego wykonywania obliczeń (mnożenia i dzielenia), szczególnie przydatnych w rozwijającej się wtedy działalności handlowej (stąd brała się ogromna potrzeba wydawania tablic logarytmicznych). Jednak teoria logarytmów żyła również swoim własnym życiem, włączając się w pełni w świat matematyki – jej powstanie przyczyniło się między innymi do rozwoju teorii funkcji oraz liczb zespolonych. Podobnie sprawa wyglądała w przypadku teorii prawdopodobieństwa (której początek dali Pascal, Fermat i Jakub Bernoulli w XVII wieku).

W nurcie archimedesowskim matematyki istotne jest traktowanie wiedzy jako całości. Między elementami składowymi tej całości musi być zgodność, czyli istnieją metody ukazujące przejście między nimi. Ukazywana wewnętrzna zgodność części składowych całości związana jest z pojęciem symetrii, które w greckim rozumieniu tego słowa oznacza zgodność (podobieństwo) części składowych między sobą i z tworzoną przez nie całością.

Zauważmy jeszcze, że na arystotelesowski projekt nauki można jednak spojrzeć jak na jeszcze jeden (czwarty) nurt w matematyce – są to badania logiczne. Patrząc z pozycji powstałej na przełomie XIX i XX wieku teorii mnogości i logiki matematycznej, widzimy, że logika stoików, duża część nowożytnej analizy matematycznej czy rozważania XIV-wiecznych logików-dialektyków-matematyków (Mikołaj z Oresme, Kuzańczyk, Bradwardine), jak również analizy dialektyczne eleatów i Arystotelesa nad zagadnieniami ruchu, czasu i przestrzeni – są „dobrą” matematyką, chociaż w swoim czasie za taką nie były uznawane. Nie mieściły się bowiem w dominujących wówczas programach badawczych.

Myślę, że istnienie programów badawczych, jak i nurtów badawczych, wskazuje na jedność matematyki. Często matematycy (czy grupy matematyków) mieli swoje autorskie programy badawcze, które nie do końca mieściły się we wspomnianych nurtach. Takimi programami były, ukazane w tej pracy, na przykład programy: R. Bacona, Mikołaja z Oresme, Cavalieriego, Desargues'a, Wallisa, Galileusza, Pascala, Fermata, Leibniza, Newtona. Mimo często wyraźnych różnic możliwa była wymiana myśli, nierzadko ostra, jednak dającą możliwość wcześniej czy później podjęcia i rozwijania pomysłów z konkurencyjnych programów. Dowodem na to, że były to rzeczywiście różniące się programy badawcze, są spory i niezrozumienie tez i teorii z innych programów, a argumentem za jednością matematyki – to, że w końcu dochodziło do rozwijania i wzajemnego wykorzystywania teorii z różnych programów (w tym często ich odzyskiwania po wiekach zapomnienia). Tak było przykładowo z teorią stożkowych (i geometrią analityczną) Apoloniusza czy geometrią rzutową Desargues'a. Ponadto poszczególni matematycy nie tkwili całkowicie w danych nurtach badawczych, lecz korzystali z idei z różnych nurtów, w zależności od potrzeb badawczych. Jak zauważyliśmy, Galileusz tworzył wyraźnie w nurcie archimedesowskim, jednak można zaobserwować u niego również oddziaływanie platonizmu (rozwijanie czystej matematyki, eksperymenty myślowe i stosowanie metody hipotetyczno-dedukcyjnej), jak i pitagoreizmu (wiara w matematyczność świata i możliwość stosowania czystej matematyki do rzeczywistości materialnej). Podobnie było w przypadku innych matematyków.

Dlatego niewłaściwe jest wyróżnianie w matematyce różnych paradygmatów w sensie Kuhna. Przypomnę, że dla Thomasa Kuhna w skład paradygmatu wchodzą ogólne prawa wyrażone w matematycznej formie, modele heurystyczne oraz ontologiczne, wartości naukowe (takie jak uznanie stopnia dokładności i zakresu pomiarów, prostota i spójność teorii, itp.) oraz wzorce postępowania przy wykonywaniu danych „czynności naukowych". Paradygmat jest jak jaskinia, w której zamknięci są uczeni, jednak to dzięki paradygmatowi nauka w okresie „normalnym" rozwija się bez większych zawirowań, a dopiero zbytnie zagęszczenie anomalii prowadzi do rewolucji naukowych. Przykładem Kuhna jest rewolucja kopernikańska będąca przejściem od paradygmatu nauki arystotelesowsko-ptolemejskiej do paradygmatu nowożytnego stworzonego przez Kopernika, Galileusza, Newtona i innych. Zgodnie z koncepcją Kuhna tkwienie w danym paradygmacie uniemożliwia zrozumienia koncepcji i rozumowań przeprowadzanych w ramach innych paradygmatów. Stąd potrzebne są rewolucje naukowe (jako wyrwanie się z danego paradygmatu i przejście do innego), gdy dany paradygmat nie pozwala na spójny i skuteczny opis rzeczywistości, a teorie pochodzące z różnych paradygmatów są wobec siebie niewspółmierne.

Tadeusz Batóg w książce *Dwa paradygmaty matematyki* [4] próbuje przenieść pojęcie paradygmatu na matematykę i wyróżnia w niej dwa paradygmaty: euklidesowy (powstał w Grecji w czasach antycznych) i teoriomnogościowy, który powstał w matematyce dopiero pod koniec XIX wieku. Według niego, w starym (euklidesowym) paradygmacie naukę określa zakres i zespół przedmiotów, którymi się ona zajmuje, oraz pojęcia nauki opisujące te przedmioty; pojęcia dzielą się na podstawowe i pochodne, przy czym pojęcia pochodne definiowane są całkowicie wewnątrz teorii, natomiast o pojęciach podstawowych musimy wiedzieć wcześniej, co oznaczają i czy istnieją oraz jaki jest ich status ontologiczny. W nowo powstałym paradygmacie język teorii mnogości stał się językiem całej matematyki, a teoria mnogości ma stanowić podstawę całej matematyki. Język matematyki został ostro oddzielony od języka potocznego (znaczenie pojęć jest ustalane przy pomocy wewnętrznych procedur), ustalono precyzyjne reguły definiowania, zaksjomatyzowano teorie matematyczne, nastąpiło ponadto rozróżnienie między teorią i jej językiem oraz metateorią czy międzyjęzykiem i metajęzykiem (tego rozróżnienia dokonano w celu usunięcia antynomii semantycznych), sprecyzowano pojęcia wynikania i dowodu (przy czym pojęcie wynikania stało się prymarne w stosunku do pojęcia dowodu).

Uważam jednak, że niewłaściwe jest proste przeniesienie pojęcia paradygmatu i wykorzystanie go do wyjaśniania rozwoju teorii matematycznych. Opory niektórych matematyków wobec wprowadzenia nowych teorii matematycznych (na przykład Gaussa wobec geometrii nieeuklidesowych czy Kroneckera wobec teorii mnogości) nie są argumentem za tym, że tkwili oni w jakimś paradygmacie myślenia matematycznego, który uniemożliwiał zrozumienie innych koncepcji. Podejmowali bowiem merytoryczne dyskusje o zagadnieniach i metodach nowych działów matematyki, a istniejący opór wobec ich przyjęcia wskazywał jedynie na ich preferencje. Łatwo zauważyć, że matematyka nie jest monolitem. Występuje w niej wiele programów badawczych, które często konkurują ze sobą. Przyjęte są w nich inne założenia, czasami pojawiają się inne kryteria prawdy. Mimo tego ma miejsce oddziaływanie teorii z różnych programów na siebie. Dopełniają się one, a nie są ze sobą sprzeczne.

Odrzucając pojęcie paradygmatu w wyjaśnianiu rozwoju matematyki, odrzucam zarazem pojęcie rewolucji w naukach matematyczno-przyrodni-

[4] T. Batóg, op. cit.

czych. Zamiast niego wprowadzam pojęcie przełomu w matematyce, które przeciwstawia się pojęciu rewolucji naukowej. Przełomu nie dokonuje się nagle, lecz rozpoczęty trwa, pogłębiając przemiany w naukach i w całej kulturze. Może nawet doprowadzić z czasem do rewolucji przemysłowej, światopoglądowej czy kulturowej. Dowodem na to, że przełom nie jest rewolucją, jest trwanie po przełomie wspomnianych nurtów i realizacja wcześniejszych programów badawczych. Występowanie przełomów w nauce (a nie rewolucji) świadczy o ciągłości jej rozwoju. Jak zauważyliśmy, w czasach nowożytnych w ramach budowanej nowej matematyki pojawiły się nowe idee i metody badawcze, które w deklaracjach niektórych matematyków (na przykład Kartezjusza) wiązały się z całkowitym odcięciem od matematyki czasów wcześniejszych. Okazywało się jednak z czasem, że ta nowa matematyka w dużej mierze korzystała z wyników matematyków antycznych i średniowiecznych, a także była mozolnym odzyskiwaniem zaginionej matematyki hellenistycznej. Jednak nowe idee i metody badawcze stanowiły istotnie nowy ciężar gatunkowy, który zmieniał oblicze matematyki. Wymagały one rozbudowy siatki pojęć i ich doprecyzowania, i rodziły sprzeczności, na które wielu ówczesnych uczonych wskazywało. Pojawiał się jednak dalszy rozwój matematyki, który wskazane paradoksy stopniowo niwelował. Nowa matematyka okazała się bardzo skuteczna i nie było już powrotu do matematyki wcześniejszej, mimo że ta wcześniejsza była w niej cały czas obecna. Można było zaobserwować obecność nurtów matematyki antycznej oraz podejmowanie wcześniejszych programów badawczych. Tego, co się wtedy wydarzyło, nie można więc nazywać rewolucją naukową. Uważam, że adekwatnym pojęciem opisującym ten proces jest właśnie pojęcie przełomu. Nie musi dokonać się on gwałtownie – następują istotne zmiany w sposobie uprawiania nauki, nie następuje jednak zerwanie ciągłości z okresem wcześniejszym, a przemiany dokonują się przez dłuższy czas, nawet przez wiele wieków. Charakterystyczną cechą przełomu jest to, że otwiera on nowy okres dziejów, jednak nie zamyka poprzedniego, jak ma miejsce w przypadku rewolucji. Efekty przełomu są nieodwracalne (chyba że jakieś kataklizmy doprowadzają do zniszczenia społeczności ludzkich), nie może dojść do „kontrprzełomu" (jak do kontrrewolucji), pojawić się może jednak nowy przełom, który zaczyna współgrać z efektami poprzednich przełomów. Nie można też wskazać czasu zakończenia danego przełomu – przez dalsze dzieje generuje on kolejne efekty i przemiany. Tak przynajmniej działo się w analizowanych dziejach matematyki, rozpoczynających się od matematyki sumeryjskiej, a kończących na matematyce zachodniej.

Można też zauważyć, że takie przełomy miały miejsce we wcześniejszych okresach dziejów. W III wieku p.n.e. rozpoczął się przełom związany z powstaniem matematyki hellenistycznej, który doprowadził do ukształtowania się matematyki jako wiedzy ogólnej. Wcześniejszy przełom dokonywał się podczas tworzenia matematyki greckiej od VI wieku p.n.e., wiązał się powstaniem matematyki abstrakcyjnej. Charakterystyczna dla matematyki abstrakcyjnej jest aksjomatyzacja teorii naukowych. Ma miejsce odrywanie się teorii matematycznych od rzeczywistości poprzez budowanie bytów abstrakcyjnych spełniających warunki systemu aksjomatycznego. Podczas rozwoju matematyki abstrakcyjnej ukazała się natura matematyki jako szczególnego rodzaju wiedzy i sposobu myślenia. Rodzące się nowe idee matematyczne zostają w potocznym odbiorze odebrane jako „pomysły nie z tego świata" (oderwane od rzeczywistości, abstrakcyjne, niepraktyczne). Ponadto okazało się, że generują różnego rodzaju paradoksy i sprzeczności. Jednak matematyka uniknęła negatywnych konsekwencji tych paradoksów i pokazała drogi dalszego rozwoju, rozwijając nowe metody badawcze i przezwyciężając, groźne dla rozwoju cywilizacji, paradoksy kulturowe. Ponadto została włączona w system edukacji powszechnej jako niezbędny element kształcenia i wychowania doskonałej jednostki (idea *paidei*). Okazała się też bardzo przydatna do zastosowań praktycznych. Jej abstrakcyjność nie wykluczała zastosowań, a wręcz te możliwości zastosowań okazały się większe niż w przypadku matematyki konkretnej. Warto też zauważyć, że matematykę stosujemy jako całość. Pozornie stosujemy tylko konkretne teorie, metody matematyczne, lecz te metody działają dzięki ich obecności w całej, rozwiniętej odpowiednio matematyce, gdzie istnieje bogaty system powiązań. Do stosowania matematyki potrzebna jest dużą „nadwyżka" teoretyczna (baza, z której czerpią zastosowania).

Matematyka abstrakcyjna nie zakończyła się oczywiście wraz z rozpoczęciem nowego przełomu związanego z powstaniem matematyki ogólnej, a swój szczególny renesans przeżywała na przełomie XIX i XX wieku. Myślę, że analizy przeprowadzone w pracy pokazały, że wymienione powyżej cechy matematyki abstrakcyjnej (opór wobec nowych idei matematycznych, generowanie sprzeczności i paradoksów, rozwiązywanie tych sprzeczności oraz sprzeczności kulturowych poprzez powstawanie nowych teorii, wchodzenie matematyki w system edukacyjny, zastosowania praktyczne matematyki prowadzące do rozwoju gospodarczego i społecznego) pojawiały się również w kolejnych okresach dziejów matematyki. W ten sposób coraz pełniej objawiała się natura matematyki.

Pojawienie się cywilizacji sumeryjskiej w okresie od piątego do trzeciego tysiąclecia p.n.e. również doprowadziło do przełomu w matematyce – był to przełom otwierający dzieje naszej cywilizacji, związany z powstaniem matematyki konkretnej (rozpoznawanie stałych zależności geometrycznych i arytmetycznych w przyrodzie i wykorzystywanie ich). Jak zauważyłem, również wcześniej (w okresie przedcywilizacyjnym) istniała matematyka. Kluczowe dla rozwoju społeczności ludzkich było odkrycie liczby, wynalezienie różnych form jej zapisu oraz rozpoznanie podstawowych idei geometrycznych. Te odkrycia wyznaczyły pierwszy przełom w dziejach ludzkości, gdyż doprowadziły do częściowego uniezależnienia się człowieka od przyrody i budowania autonomicznych wspólnot, nawiązujących coraz bardziej intensywny „dialog" ze światem.

Zatrzymajmy się nieco dłużej nad przełomem hellenistycznym, gdyż – jak sądzę – najlepiej wyjaśnia istotę przełomów, jakie dokonują się w matematyce. L. Russo zauważa, że w III wieku p.n.e. miała miejsce rewolucja naukowa, która *de facto* wiązała się z powstaniem metody naukowej i różnych dyscyplin matematycznych opartych na tej metodzie. Jednak, jak zauważyłem w pracy, matematyka czasów hellenistyczny nie zerwała ciągłości z matematyką wcześniejszą, wręcz kontynuowała poprzednie zagadnienia i rozwiązywała postawione wcześniej problemy. Pojawiły się jednak nowe metody badawcze, z których najważniejsza była metoda matematycznego uogólniania, która prowadziła do wytworzenia bytów ogólnych jako przedmiotów badań matematycznych. Rodzi się ona w dużej mierze w sporze Arystotelesa z Platonem o sposób poznawania i o status przedmiotów wiedzy. Ta metoda wyraźnie zarysowuje się już u Eudoksosa, gdy tworzy ogólną teorię stosunków, a same stosunki wielkości stają się bytami ogólnymi. Stosunki wielkości nie są bowiem obiektami matematycznymi we wcześniejszym znaczeniu tego słowa, a jednak zaczynają funkcjonować w matematyce. Eudoksos zaczyna już na nich wykonywać pewne operacje (składanie stosunków).

Powoli rodzi się też niezależna symbolika dla oznaczenia tych ogólnych bytów. I tak powstaje symbolika algebraiczna, niezależne oznaczenia dla cyfr, a niektóre procedury dowodzenia i obliczania stają się ogólnymi algorytmami. W matematyce ogólnej stajemy wobec tego, co nieuchwytne dla metody ściśle dedukcyjnej. Pojawiają się wielkości i „nie-wielkości" (stosunki wielkości), przykładowo związane z pomiarem wielkości koła i innych figur geometrycznych, których nie można wydedukować z przyjętych wcześniej obiektów i aksjomatów. Pole koła nie może być uchwycone przy pomocy żadnych wielkości (miary), można je jedynie dowolnie przybliżać wielkościami. Trzeba wprowadzić nazwy (symbole) dla nieuchwytnych „bytów" (np. liczba π), które pozwalają mierzyć dane wielkości, obiekty. Ujawniło się ograniczenie metody aksjomatyczno-dedukcyjnej i powoli zaczęła się odsłaniać potrzeba budowania matematyki jako wiedzy symbolicznej i ogólnej. Zauważmy, że teoria stosunków Eudoksosa była *de facto* ogólną teorią stosunków (nieograniczoną do wielkości, można było rozpatrywać stosunki również „niewielkości"); wystarczyło, że rozpatrywane obiekty spełniały przyjęte aksjomaty (postulaty). Rozpatrywanym stosunkom można było przypisać pewne symbole i traktować je jako nowe obiekty matematyczne. Oczywiście, taka idea nie pojawiła się od razu, a dopiero rozbudowa metod algebraicznych pozwoliła na tego typu interpretację i operacje.

Matematyka ogólna, ze względu na swoją złożoność, rozwijała się bardzo powoli, a jej znaczącymi etapami były: metody algebraiczne Diofantosa i jego symbolika, rozwój średniowiecznej algebry (ogólne metody rozwiązywania równań), wprowadzenie cyfr arabskich (hinduskich), kartezjańska algebraizacja geometrii, rozwój algebry ogólnej (i innych tego typu teorii) w czasach nowożytnych (swój szczyt osiąga na początku XX wieku). Nie ma to nic wspólnego z rewolucją, która w odpowiednio krótkim czasie musiałaby wytworzyć nowe metody, teorie i odrzucić stare metody uzasadnień i argumentacji i zmienić siatkę pojęć.

Najbardziej charakterystyczną cechą matematyki ogólnej jest algorytmizacja procedur matematycznych, przy czym dokonuje się proces „obejmowania" rzeczywistości (a nie „odrywanie się" od niej, jak w matematyce abstrakcyjnej) poprzez ogólne pojęcia i algorytmy. Na przełomie III i II wieku p.n.e. nastąpiło jakby odejście od matematyki abstrakcyjnej na rzecz matematyki ogólnej, co mogło sprawiać wrażenie upadku matematyki greckiej. Jednak matematyka jako wiedza abstrakcyjna pozostawała przez całe wieki kluczowym punktem odniesienia (*Elementy* Euklidesa stanowiły niedościgły przez wiele wieków wzór ścisłości matematycznej). Kiedy w czasach współczesnych nastąpiło połączenie tych obszarów i metod, matematyka objawiła swą szczególną siłę.

Wiedza ogólna zaczęła rodzić się również w odpowiedzi na paradoksy, z którymi nie „radziła sobie" matematyka abstrakcyjna. Ponoć pierwszy Sokrates zauważył, że prawdziwa wiedza powinna zawierać się w pojęciach ogólnych. Tylko taka wiedza ma bowiem jakąś wartość jako narzędzie wyjaśniania rzeczywistości, opisywania i przewidywania. W arystotelesowskiej teorii wiedzy metoda uogólniania, ogólne metody argumentacji i tworzenie pojęć ogólnych, znajdowanie ogólnych przyczyn – stają się najważniejszymi zadaniami nauki. Można powiedzieć, że zadaniem wiedzy naukowej jest poznawanie ogółów. U Arystotelesa byty ogólne (jako przedmioty nauki) nabierają swojego właściwego znaczenia. Nie są, jak u Platona, abstraktami oderwanymi od zmysłowo poznawanych bytów, lecz wyrastają z jednostkowych rzeczy i je obejmują.

Jednak już na początku rozwoju wiedzy ogólnej pojawiły się paradoksy wiedzy ogólnej (wspomniane wcześnie paradoksy megarejczyków i inne), które znów stały się wyzwaniem dla matematyki i pobudzały jej rozwój. Jednym z nich było spostrzeżenie, że obiekty badań istnieją z jednej strony obiektywnie, a zarazem są przedmiotami konstrukcji umysłu. W ramach tego paradoksu pojawia się spór o powszechniki, o status istnienia klasy, zbioru. Rozwiązywanie paradoksu wiedzy ogólnej wiązało się z przyjęciem jednej z wersji: nominalizmu, konceptualizmu czy realizmu (rozwiązanie każdej ze stron miało charakter redukcyjny, przez eliminowanie statusu przeciwnego). Spór toczył się intensywnie przez całe średniowiecze, a odżył przy próbie określenia statusu zbiorów oraz obiektów nieskończonych, gdy pod koniec XIX wieku powstała teoria mnogości.

Można zauważyć, że już w ogólnej teorii stosunków Eudoksosa zawierała się pewna myśl uniknięcia paradoksu w sposób nieredukcyjny. Generalnie bowiem stosunki wielkości nie są wielkościami, możemy im więc (analogicznie patrząc) nie przypisywać żadnego statusu ontologicznego. Są konstrukcjami umysłu i nadają się do opisu realnych wielkości. Matematyka pokazała, że można badać i posługiwać się obiektami, które wykraczają poza kategorie bytowe, na przykład – nie są wielkościami. Ponadto w matematyce ogólnej unikamy sprzeczności nie poprzez odrywanie się od (pełnej sprzeczności) rzeczywistości, jak w matematyce abstrakcyjnej, lecz poprzez opracowanie ogólnych i ścisłych zarazem metod dowodzenia (formalnych algorytmów), które działają w sposób mechaniczny, uniwersalny. O ile więc matematyka abstrakcyjna dąży do aksjomatyzacji, o tyle matematyka ogólna – do algorytmizacji. Budowana schematyzacja i mechanicyzacja myślenia sprawiają, że wskazywane paradoksy przestają być istotne wobec skuteczności realizowanych procedur.

W paragrafie 1 rozdziału II pokazywaliśmy, w jaki sposób matematyka odnosi się do tak zwanych sprzeczności kulturowych. Te sprzeczności mają tendencję do niszczenia cywilizacyjnych osiągnięć, a rozwój nauki ma te sprzeczności przezwyciężać. Przypomnę, że sprzeczności wyrażone są w czterech mitach: pierwotnego chaosu, upadku człowieka, tragicznego losu (fatum) oraz duszy wygnanej. Cywilizacja hellenistyczna (czyli praktycznie nauka i matematyka ogólna) również stanęła wobec tych sprzeczności, które przybrały nieco inną (może groźniejszą) postać. Chaosem staje się groźba unicestwienia osiągniętych zdobyczy kulturowych, upadek to utrata źródeł i podstaw, z których wyrasta kultura, fatum przybiera postać nieodwracalności dokonanych zniszczeń, a wygnanie to utrata wiedzy i świadomości wartości tego, co posiadamy i gdzie żyjemy. Genialni uczeni okresu aleksandryjskiego opracowali teorie naukowe dające możliwość znaczącego rozwoju cywilizacyjnego: powstała technika naukowa, pojawiały się liczne zastosowania techniczne i gospodarcze (wspaniałe maszyny, budowle ułatwiające życie, rozwiązania techniczne i architektoniczne w budowanych miastach). Jak wiemy, wszystko to zostało w ogromnej mierze zniszczone, nieomal unicestwione zostały też wspaniałe osiągnięcia matematyczne tego okresu. Jednak po upadku nauki i cywilizacji hellenistycznej przez cały czas płynął przynajmniej wąski strumień podtrzymujący tradycję badań naukowych, uznania dla wartości nauki, i przerwały niektóre ważne wyniki. Po zniszczeniu Aleksandrii jako centrum nauki, powstawały inne ośrodki zorganizowane na sposób Musejonu i zawsze znajdowali się ludzie, których pociągała nauka. Dzięki temu fala barbarzyństwa nie zdołała całkowicie zniszczyć dorobku tamtego okresu, a rzeczy zniszczone były mozolne odzyskiwane i włączane w obszar kultury, którą też stopniowo budowały.

Możliwość odtwarzania, czasem z niewielkich fragmentów, rezultatów naukowych wynika w dużej mierze ze ścisłej i spójnej struktury wiedzy matematycznej – brakujące elementy są powiązane z całością, a w konsekwencji (na przykład z zastosowań technicznych i siły kultury) można wnioskować o źródłach i podstawach. Jak zauważyliśmy, metoda algorytmu i symbolika, dzięki swojemu uniwersalnemu charakterowi, dawały techniki i narzędzia nie tylko do budowania nauki, ale też do jej odbudowywania. Nie ma już nieodwracalności, lecz jest algorytmiczna powtarzalność, nie do końca jest możliwe unicestwienie i pogrążenie świata w nicości, bo świat symboli buduje nowy obszar znaczeń i odniesień. Idea algorytmu pokazuje bowiem, że pewne procedury można powtarzać nieskończenie wiele razy i za każdym razem otrzymujemy taki sam (lub podobny) rezultat. Wygenerowanie nowego symbolu matematycznego jest jakby stworzeniem nowego bytu z niczego. W miarę jego używania symbol nabiera treści, obejmuje kolejne elementy i daje możliwość przeprowadzenia rozumowania i dowodów. W znaczący sposób tę możliwość utrwalenia zdobyczny cywilizacyjnych i ich ocalenia dała technika druku, która pojawiła się w Europie w okresie renesansu.

Podobnie jak w przypadku matematyki abstrakcyjnej trudno określić czas, w którym dokonał się ten przełom, i co było najważniejszym czynnikiem jego powstania. Na pewno istotnym bodźcem były odkrycia naukowe wielkich matematyków III wieku p.n.e.: Archimedesa (w tym jego projekt matematyki), Arystarcha, Apoloniusza oraz ich kontynuatorów. Szczególnie istotna jest metoda wyczerpywania, pozwalająca obliczać pola i objętości dowolnych figur, teoria krzywych, w tym krzywych stożkowych, powstanie geometrii sferycznej na wzór geometrii płaskiej Euklidesa (ta geometria była wynikiem analizy podstaw geometrii euklidesowej, szukania alternatywnych aksjomatów i pojęć), ale przede wszystkim rozwój algebry jako nauki ogólnej.

Znaczące były też propozycje samego Arystotelesa i rozwijana aż do końca XIV wieku logika[5]. W projekcie tego filozofa należy badać całą rzeczywistość przy pomocy różnych nauk, które stopniowo będą „wyzwalały się", budując swoją pojęciową i metodologiczną tożsamość. Kluczowe było też powstanie i rozwój techniki naukowej (*stricte* matematycznej) i powstanie metody komentowania tekstów naukowych, która umożliwiała zachowanie ciągłość rozwoju nauki.

W ramach budowania ogólnych schematów myślenia ukazały się dwie teorie stosunków (stosunków wielkości Eudoksosa i stosunków klas Arystotelesa) oraz metoda konstrukcji modelu fizycznego, która umożliwia badanie rzeczywistości materialnej przy pomocy narzędzi matematycznych w ramach tego teoretycznego modelu. Kontynuowanie tych schematów przyniosło w czasach nowożytnych ogromny sukces matematyce i naukom pokrewnym.

2. Różne odsłony uniwersalności matematyki w kolejnych etapach jej dziejów

W okresie nowożytnym *explicite* było podkreślone zagadnienie uniwersalności matematyki. Mówili o niej Galileusz, Wallis, Kartezjusz, Pascal oraz Leibniz. W sposób pośredni mówi o niej Roger Bacon, gdy ukazuje możliwość stosowania matematyki do wszystkich obszarów rzeczywistości. Widzi jej nieograniczone możliwości jako uniwersalnego narzędzia badań we wszystkich naukach. Przedmiotem badań matematycznych mają stać się dowolne byty (nie tylko wielkości liczbowe czy geometryczne).

Obecność matematyki we wszystkich obszarach świata i nauki oraz jej zdolność do opisywania i poznawania rzeczywistości i jej natury to cecha uniwersalności matematyki odkryta w czasach nowożytnych. Różne dyscypliny naukowe uzyskują swoją metodologiczną autonomię, natomiast matematyka staje się uniwersalnym wzorcem ścisłości metodologicznej i narzę-

[5] Odrodzenie logiki, które nastąpiło w drugiej połowie XIX wieku, dokonało się w dużej mierze w oparciu o projekt naukowy Leibniza i wiązało się już z nowym przełomem w naukach.

dziem badań. W ten sposób staje się obecna w różnych naukach – następuje stopniowy proces ich matematyzacji. Najbardziej charakterystyczna jest matematyzacja fizyki i powstanie matematycznego przyrodoznawstwa. Galileusz połączył jakościową fizykę Arystotelesa oraz fizykę matematyczną Archimedesa. Matematyka okazała się zdolna do ujęcia czasu i przestrzeni oraz związków między nimi („matematyzacja ruchu"). Powstała fizyka jako autonomiczna i jednorodna dyscyplina badawcza. Jak zauważyliśmy, istotne w tym procesie matematyzacji ruchu (i innych zjawisk) było odkrycie przez Mikołaja z Oresme idei funkcji (na przykładzie zależności między intensywnością cechy a jej szerokością).

W tym okresie matematyka i jej uniwersalność staje się też przedmiotem refleksji filozoficznej, poczynając od matematyków i filozofów XVII wieku. Pojawia się próba określenia matematyki, zakresu jej stosowalności i zrozumienia jej skuteczności (natura dowodów matematycznych i modeli matematycznych opisujących świat). Z tym wiązał się problem statusu ontologicznego obiektów matematycznych, szczególnie wobec operowania metodami nieskończonościowymi i granicznymi, i wprowadzania do matematyki obiektów związanych z tymi metodami (granica, różniczka, zmienna, ciągłość, całka itd.).

Z punktu widzenia matematyki nowożytnej możemy dostrzec, że matematyka objawiła swoją uniwersalność już na początku swoich dziejów. W kolejnych etapach jej rozwoju odsłaniały się różne aspekty tej uniwersalności. Na etapie matematyki konkretnej matematyka objawiła się jako narzędzie pozwalające rozpoznawać harmonijną i uporządkowaną stronę rzeczywistości. Rozpoznawanie poprzez wykopaliska i odczytywanie teksów matematycznych pokazuje, że cywilizacja sumeryjska dysponowała stosunkowo zaawansowaną wiedzą matematyczną. Była ona niezbędna do rozwiązywania praktycznych problemów i realizowania imponujących przedsięwzięć technicznych, związanych z pomiarami (na przykład gruntów) czy budowlami. Świat, w którym zadziałała matematyka, stawał się światem nadającym się do zamieszkania przez człowieka i prowadzenia działalności (np. handlowej czy gospodarczej). Świat natury i świat ludzkiej kultury dawały się, dzięki matematyce, z sobą zharmonizować. Jak zauważyłem, wynalezienie przez Sumerów idei cyfry doprowadziło do wynalezienia przez nich alfabetu, jako naturalnej konsekwencji. Matematyka sprawiła, że ze zmiennego i niestabilnego świata dało się wydobyć elementy niezmienne i trwałe, na przykład wartość pomiarową, liczbę przedmiotów, ich wielkość, kształt i inne. To rozpoznawanie matematycznych elementów w świecie i świadomość niezbędności matematyki do budowania silnej i stabilnej cywilizacji jest trwałym osiągnięciem matematyki konkretnej i najważniejszą cechą jej uniwersalności.

W matematyce abstrakcyjnej pojawiły się kolejne cechy jej uniwersalności: autonomia wobec rzeczywistości zmysłowej, matematyzowalność rzeczywistości (matematyczne tłumaczenie zjawisk), usuwanie antynomiczności wiedzy i poznania, ukazywanie inteligibilności rzeczywistości, włączenie matematyki do systemu edukacyjnego (kształtowanie szlachetnego człowieka poprzez nauczanie go matematyki), budowanie metod dowodzenia i argumentowania (umysł może poznawać prawdę w oderwaniu od rzeczywistości) oraz siatki ścisłych pojęć. Wspomniana matematyzowalność rzeczywistości jest jednak różnie rozumiana, w zależności od koncepcji matematyki. W podejściu platońskim matematyka, którą wykorzystujemy do badania rzeczywistości materialnej, nie jest już *de facto* matematyką, lecz jedynie jej zwulgaryzowaną wersją (np. logistyka w rozumieniu platońskim to pewne techniki obliczeń i pomiarów, których nie powinno zaliczać się do matematyki). W podejściu pitagorejskim (Archytas) zastosowanie abstrakcyjnej matematyki do badania i poznania jednostkowych i konkretnych bytów materialnych jest naturalnym i koniecznym etapem badań matematycznych. W filozofii Demokryta znów poznanie matematyczne ma być zharmonizowane z poznaniem zmysłowym, a matematyka jako wyższa forma poznania ma być siłą syntetyzującą oba rodzaje wiedzy.

Natomiast w matematyce ogólnej widzimy matematykę jako narzędzie kondensacji wiedzy w zwięzłych formułach, symbolach i algorytmach. Została odsłonięta algorytmiczność i maksymalna (optymalna) ogólność matematycznych procedur jako centralna własność jej uniwersalności. Kolejną cechą jest przekroczenie ograniczeń związanych z badaniem jedynie wielkości i generowanie nowych obiektów matematycznych (stosunki Eudoksosa). Rzeczywistość została podzielona na różne obszary badawcze, a każdą z nich zajmuje się inna nauka. Okazało się jednak, że przynajmniej część tych obszarów badawczych zostało „przejętych" przez matematykę (mechanika, hydrostatyka, pneumatyka, geografia, technika), z naturalną możliwością rozszerzania listy matematycznych dyscyplin.

Jedną z bardziej charakterystycznych cech tej uniwersalności jest łączenie czy obejmowanie różnych obszarów. Nastąpiło połączenie abstrakcyjnych form (na przykład metod dowodzenia, symboliki) z intuicją, pozwalającą realnie wykonywać formalne operacje (kwestia intuicyjnych przeskoków w rozumowaniu i podstaw dowodzenia). W ramach projektu naukowego Archimedesa miało miejsce połączenie abstrakcyjnego modelu konstrukcyjnego z konstrukcją materialną (wpisywanie konstrukcji teoretycznych w rzeczywistość materialną). Konsekwencją tego było budowanie techniki naukowej w oparciu o matematykę oraz zastosowanie matematyki do opisu świata jako całości i poznania jego struktury (opis przedstawiony w różnych matematycznych modelach świata ukazanych w astronomii matematycznej). Matematyka stała się też wzorem dla budowanej logiki i ścisłości rozumowań. Pokazywała, w jaki sposób proste schematy i algorytmy prowadzą w sposób aprioryczny do prawdy (rozbudowy wiedzy i poznawania rzeczywistości). Nastąpił rozwój edukacji matematycznej kształtującej wszystkie sfery umysłu. Matematyka wskazała uniwersalne podstawy myślenia poprzez uchwycenie takich ogólnych kategorii, jak: harmonia, symetria, podobieństwo, odpowiedniość. Konstruowane różne paradoksy wiedzy i poznania były konsekwentnie przez matematykę „neutralizowane". Działo się to poprzez jej rozwój i tworzenie nowych metod dowodowych.

Matematyka to nie tylko metody pozwalające poznawać świat i wydobywać jego racjonalną strukturę. Jej kluczową cechą jest to, iż stała się (od czasów greckich) rodzajem rozrywki intelektualnej wyższego rzędu. Wydaje się, że matematycy nie byli (zasadniczo) bezpośrednio zainteresowani stroną praktyczną matematyki. Rozwijali teorie matematyczne, a zastosowania pojawiały się jako naturalna konsekwencja rozwoju matematyki (jej ścisłości pojęciowej i metodologicznej). To wzbudziło w kolejnych wiekach przekonanie, że Grecy (i kolejni matematycy) nie cenili praktycznej strony nauki. Sytuacja jest jednak bardziej złożona. Poza filozofią matematyki Platona i jego projektem matematyki istnieją też inne koncepcje (pitagorejska, archimedejska), a i sam Platon nie jest taki jednoznaczny. Jego opis metody hipotetyczno-dedukcyjnej (niezbędnej do poznania rzeczywistości) i rola matematyki w kształtowaniu się tej metody oraz opis wykorzystania matematyki do konstrukcji i poznania świata (w oparciu o strukturę geometryczną brył platońskich) pokazują „nieplatoński" charakter filozofii platońskiej. Poza tym fakty związane z odkryciem techniki uczonych aleksandryjskich (ich liczne wynalazki) i budowaniem techniki naukowej wyraźnie przeczą temu przekonaniu. Jednak skoncentrowanie się na stronie praktycznej matematyki ogranicza jej rozwój (matematyka jest znacznie bogatsza od jej zastosowań) i w końcu zaczyna „brakować matematyki" do kolejnych zastosowań. Najlepszym przykładem są Rzymianie zainteresowani jedynie zastosowaniami matematyki przez nich zastanej. Doprowadziło to w końcu do ograniczenia rozwoju matematyki i jej zastosowań.

Zauważyliśmy, analizując dzieje matematyki, że w kolejnych etapach matematyka odsłaniała coraz nowsze aspekty uniwersalności. Uzyskiwała rangę nauki uniwersalnej, a *de facto* miała ją już w czasach starożytnych, przede wszystkim w koncepcjach Platona, pitagorejczyków czy Archimedesa (chociaż nieco w innym znaczeniu). Wszelkie próby zastąpienia matematyki inną nauką jako nauką uniwersalną okazały się nieskuteczne. W tej roli nie sprawdziła się ani metafizyka (jako ogólna teoria bytu), ani logika budowana przez Arystotelesa, jego uczniów oraz przez stoików. Współczesnym przykładem jest program logicyzacji matematyki i jego klęska. Nie dało się ująć matematyki w języku uniwersalnej logiki, a logika w znacznej mierze stała się częścią matematyki jako logika matematyczna. Ten fenomen niezastępowalności matematyki przez inną naukę jest jednym z najciekawszych zagadnień filozoficznych, a sama matematyka staje źródłem najważniejszych problemów metafizycznych.

3. Periodyzacja dziejów matematyki

W oparciu o przedstawiony w pracy przegląd historii matematyki oraz posiłkując się wizją historiozoficzną Hoene-Wrońskiego, wyróżniam sześć okresów dziejów. Za każdy razem przejście do kolejnego okresu było spowodowane przełomem związanym z odkrywaniem nowych idei matematycznych. Każdy ze wskazanych przełomów prowadził do znaczących przemian (wręcz rewolucji) kulturowych w dziejach ludzkości, wyznaczonych rozwojem umiejętności matematycznych. W przełomach tych matematyka otwierała się na nowe aspekty rzeczywistości i rozwijany był nowy obszar doświadczeń matematycznych. Te nowe idee matematyczne, istotne dla kolejnych przełomów, były najczęściej badane już we wcześniejszych okresach dziejów, nie były jednak na tyle jasne i precyzyjne, aby mieć oddziaływanie cywilizacyjne i kulturowe.

1. Okres „przedmatematyczny" zakończony pojawieniem się idei liczby i umiejętnością wykonywania podstawowych działań arytmetycznych.
2. Okres liczby i koła, który został dopełniony odkryciem idei działań i konstrukcji matematycznych oraz poznaniem podstawowych własności liczbowych i geometrycznych.
3. Okres poznawania stałych zależności geometrycznych i liczbowych, wyrażonych, między innymi, w twierdzeniu Talesa oraz twierdzeniu Pitagorasa. Odkrywano też zależności i odpowiedniości między różnymi obiektami matematycznymi, a co za tym idzie, tymi występującymi w rzeczywistości materialnej. Ten okres rozpoczął się w czasach sumeryjsko-babilońskich. Wiązał się z powstawaniem takich rodzajów wiedzy matematycznej[6], jak: astronomia, trygonometria, optyka, mechanika.

[6] Nie od razu można przypisać im rangę dyscyplin naukowych, a więc operujących ścisłymi metodami badawczymi.

4. Okres matematyki abstrakcyjnej, który rozpoczął się od zastosowania w matematyce rozumowania i dowodzenia dedukcyjnego oraz „czysto" matematycznego podejścia do zagadnienia elementarności i pomiaru. Doprowadziło to do odkrycia zjawiska niewspółmierności i innych paradoksów matematyki, bardzo inspirujących dla dalszego rozwoju. Ten czas rozwoju metody dedukcyjnej i innych metod abstrakcyjnego dowodzenia jest zarazem okresem kształtowania nowych idei matematycznych.
5. Okres matematyki algorytmicznej, w którym znalazła swoje miejsce algebra. Rozpoczął się od odkrycia ogólnego charakteru stosunków różnych wielkości (w tym liczbowych i geometrycznych), wprowadzenia notacji algebraicznych i odkrycia idei algorytmu jako metody uniwersalnego dowodzenia, a w czasach nowożytnych związany był z odkryciem logarytmu, układu współrzędnych oraz z rozwojem geometrii analitycznej.
6. Okres matematyki ciągłościowej i relacyjnej (funkcyjnej); był związany z odkrywaniem idei funkcji, ciągłości, nieskończoności, granicy, szeregu nieskończonego, rachunku różniczkowego i całkowego, teorii liczb zespolonych i innych jako obiektów matematycznych.

Jak zauważyłem wcześniej, w kolejnych okresach rozwoju matematyka otwiera nowe obszary rzeczywistości, co jest możliwe dzięki odkrywaniu nowych doświadczeń matematycznych, i co się z tym wiąże, nowych aspektów uniwersalności matematyki. Otwierane obszary rzeczywistości są w kolejnych okresach dziejów dalej badane przez matematykę i inne nauki. W drugim i trzecim okresie dziejów (okres liczby oraz koła i odkrywanych zależności matematycznych) został odsłonięty pierwszy aspekt (stopień) uniwersalności matematyki – jest nim ścisły związek matematyki z rzeczywistością zmysłową (matematyka jest matematyką konkretną). Była poznawana harmonia bytu poprzez odkrycie zgodności między konstrukcjami umysłu a rzeczywistością.

W czwartym okresie rozwoju odsłonięty został abstrakcyjny charakter matematyki. W ramach abstrakcyjnych pojęć i struktur matematycznych można prowadzić rozumowania i przeprowadzać dowody bez trzymania się rzeczywistości materialnej, natomiast wnioski w ten sposób wyprowadzane i konstrukcje oparte o metody matematyczne mogą być rozpoznawane i stosowane w tej rzeczywistości. Odkrywając ideę elementarności, powiązano ją z bytami matematycznymi jako elementami konstruktywnymi rzeczywistości. Jednak te elementy zaczęto traktować w sposób abstrakcyjny, a własności i prawdy matematyczne zaczęto rozpoznawać w oderwaniu od rzeczywistości, przy pomocy metody dedukcyjnej. Niepotrzebny był kontakt z rzeczywistością materialną, aby rozwijać matematykę i poznawać rzeczywistość.

W tym też czasie rodzi się abstrakcyjna idea pomiaru, a sam pomiar ma mieć u swoich podstaw abstrakcyjny, elementarny byt matematyczny. Takim elementem stała się przykładowo liczba w rozumieniu pitagorejczyków. To tworzenie matematyki abstrakcyjnej natrafiło na sprzeczności i paradoksy. Pierwszym takim doświadczeniem było odkrycie przez pitagorejczyków zjawiska niewspółmierności w V wieku p.n.e., a następnie pojawiły się kolejne, w tym – paradoksy eleackie. Nie zatrzymały one jednak rozwoju matematyki, lecz doprowadziły do opracowania nowych metod i teorii naukowych. Paradoksy mogły pojawić się dopiero wtedy, gdy matematyka oderwała się od konkretnych obiektów i zaczęła stosować czysto racjonalne metody argumentowania i dowodzenia (rozumowanie dedukcyjne i metoda dowodzenia nie wprost). Rozwój matematyki zaczął mieć miejsce w ramach samych pojęć i struktur matematycznych, bez odwoływania się do obiektów konkretnych występujących w rzeczywistości zmysłowej. To w tej nowej, ponadzmysłowej, abstrakcyjnej matematyce mogły pojawić się słynne problemy geometryczne starożytnych, takie jak: kwadratura koła, podwojenie sześcianu, trysekcja kąta czy rektyfikacja okręgu (chodziło o wykonywanie dowolnych konstrukcji w sposób czysto matematyczny, w oparciu o dwa elementarne obiekty geometryczne, okrąg i linię prostą). Na poziomie matematyki empirycznej wszystkie te zadania są rozwiązywalne. Odkryty na tym abstrakcyjnym poziomie fakt niewspółmierności (boku kwadratu i jego przekątnej) prowadził do wniosku, że istnieją wielkości różnego rodzaju, np. wielkości liczbowe i geometryczne. Nie wszystko można więc sprowadzić do wielkości liczbowych i ponadto niemożliwe jest przyjęcie uniwersalnej jednostki (miary). To odkrycie wymusiło badania nad opracowywaniem nowych technik pomiaru; były to m.in. metoda wyczerpywania (wymyślona przez Eudoksosa) oraz konstruowane przez Archimedesa urządzenia mechaniczne (na przykład dźwignia), które służyły (m.in.) do obliczania pól powierzchni różnych figur i objętości kuli, paraboloidy i innych. Te badania doprowadziły m.in. do odkrycia liczby π (długość okręgu o średnicy równej 1), jako podstawowej „jednostki" pomiarów geometrycznych i mechanicznych. Dzięki tym narzędziom matematycznym mogła rozwinąć się również trygonometria, astronomia i geografia matematyczna jako wiedza czysto teoretyczna (abstrakcyjna), oparta na metodzie dedukcyjnej. Problemem, zagadnieniem i pojęciem matematycznym stał się też pomiar jako taki[7].

Następny (piąty) etap rozwoju cywilizacji wiązał się z wprowadzeniem notacji (algebraicznej) i odkryciem idei algorytmu. Jest on często niedoce-

[7] C.B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, s. 95–198.

niany w analizach historycznych. Ten przełom w nauce dokonał się bowiem pod koniec starożytności, gdy powoli rozsypywały się struktury polityczne i społeczne cesarstwa zachodniorzymskiego. Wprowadzenie i ukazanie przez Diofantosa (III wiek) i Pappusa z Aleksandrii (przełom III i IV wieku n.e.) matematycznego znaczenia notacji algebraicznej miało podstawowe znaczenie kulturowe. Dzieło Pappusa *Synagoge* w ośmiu księgach, które ukazało się około 320 roku n.e., stanowiło swoiste kompendium ówczesnej wiedzy matematycznej i było kontynuacją dzieł wielkich poprzedników (przede wszystkim Euklidesa, Apoloniusza i Diofantosa). Jego idee kontynuowali jednak dopiero matematycy arabscy, poczynając od VIII wieku, kiedy rozpoczął się złoty okres kultury i nauki arabskiej. Sztafetę dziejów matematyki podjęła Europa Zachodnia w XII wieku, poprzez tłumaczenie dzieł uczonych islamskich i greckich oraz kontynuowanie badań naukowych. Szczególne znaczenie miały badania w zakresie algebry (Abraham bar Hiyya, zwany Savasordą, Leonardo z Pizy, czyli Fibonacci, Adelard z Bath, Gerard z Cremony, Jordanus Nemomarius)[8].

Szósty okres w dziejach ludzkości rozpoczął się pod koniec średniowiecza. Pojawiła się zdolność matematyki do badania procesów ciągłych i nieskończonych i stosowania jej do różnych dyscyplin naukowych i obszarów wiedzy (w tym wyrażał się kolejny wymiar uniwersalności). Matematyka wchodzi w różne obszary rzeczywistości, przekształca je, pozwala też poznać (a może je generuje) całkiem nowe, nieznane wcześniej. Ponadto poszczególne dyscypliny naukowe i obszary kultury są przez nią matematyzowane. Istotna dla dokonanego później przełomu była propozycja Rogera Bacona rozszerzenia pojęcia doświadczenia na różnego rodzaju doświadczenia wewnętrzne, historyczne, mistyczne, ogólnoludzkie. Każda wiedza naukowa oparta jest na jakimś doświadczeniu, a jego odczytanie, uogólnienie i modelowanie możliwe jest poprzez matematykę[9]. Zauważmy, że do czasów Bacona istniały trzy podstawowe rodzaje „doświadczeń" matematycznych: arytmetyczne, geometryczne i algebraiczne. Jego koncepcja doświadczenia i roli w nim matematyki pozwalała na „uruchamianie" kolejnych matematycznych doświadczeń, co rzeczywiście w następnych wiekach nastąpiło. Miało to miejsce w pracach Thomasa Bradwardine'a, Mikołaja z Oresme, Jana Buridana i innych (XIV wiek). Doprowadziło to do odkrycia pojęcia funkcji, szerokiego zastosowania idei układu współrzędnych, korekty praw

8 A.P. Juszkiewicz, *Historia matematyki w wiekach średnich*, tłum. Cz. Kulig, PWN, Kraków 1969, s. 308–367.

9 R. Bacon, *Dzieło większe*, tłum. T. Włodarczyk, Wydawnictwo Marek Derewiecki, Kęty 2006, s. 552–554.

ruchu Arystotelesa i opracowania nowych, matematyzacji pojęcia ruchu, analizy pojęcia continuum, sum nieskończonych. W konsekwencji powstały całkiem nowe działy matematyki, takie jak rachunek różniczkowy i całkowy (Leibniz i Newton), analiza matematyczna, rachunek wariacyjny. Odkrycia te przyspieszyły znacząco rozwój gospodarczy i pozwoliły na powstanie nowożytnej fizyki (matematycznej) i, będący jej konsekwencją, rozwój techniki[10]. Kontynuacja matematyki zrodzonej w wyniku tego przełomu doprowadziła do powstania logiki matematycznej, topologii, teorii mnogości oraz ścisłego zdefiniowania pojęć granicy, ciągłości, spójności, zwartości, zbioru (nieskończonego), liczby rzeczywistej i wielu innych pojęć. Przedmiotem badań matematycznych stała się logika, lecz również sama nieskończoność, pojęcie zbioru czy zjawisko „bliskości", otwartości (w ramach topologii). Matematyka wyszła poza obszar badania ilości, wielkości, kształtu i zmienności, a rozpoczęła również analizę różnorodnych „jakości". Tym samym jej obszar zastosowań znacznie się rozszerzył, wykraczając poza nauki techniczne. W wieku XIX matematyka uwolniła się ostatecznie z ograniczeń wynikających z obserwacji przyrody oraz z intuicji związanymi z doświadczaniem rzeczywistości. Sama zaczęła budować nowe intuicje i kształtować niezależne od doświadczenia obszary badawcze. Sama stała się dla siebie przedmiotem badawczym, narodziła się metamatematyka jako badanie matematyki przy pomocy metod matematycznych. Ta domkniętość matematyki nie sprawiła, że przestała być możliwa refleksja filozoficzna nad nią, albo że straciła łączność z rzeczywistością. Jednak refleksja nad nią jest możliwa jedynie przy współdziałaniu z odpowiednimi narzędziami matematycznymi, a rzeczywistość jest rozpoznawana w coraz większym stopniu dzięki nowym metodom i strukturom matematycznym.

Od pewnego czasu możemy zaobserwować coraz wyraźniejsze symptomy kolejnego przełomu i wchodzenia matematyki w siódmy okres dziejów.

7. Okres matematyki rachunków uniwersalnych, mający swój początek w idei *characteristica universalis* Leibniza. Do tych rachunków można zaliczyć teorię kategorii i funktorów, teorię gier, geometrię fraktalną, jak również metamatematykę (badanie kategorii matematycznych przy pomocy samej matematyki).

Siódmy okres dziejów pokazuje, że matematyka odkrywa procedury i struktury, metody, które stanowią absolutną podstawę dla każdej wiedzy, jest rodzajem rachunku uniwersalnego. Ten okres dziejów matematyki jest

10 M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996, s. 122–157.

w pewnym sensie syntezą okresów wcześniejszych i pokazuje ich znaczenie i obecność w matematyce współczesnej. Poprzednie metody i obszary badań są dalej realizowane i rozwijane, jednak następuje też ciągłe rozszerzanie dziedziny badań, pojawiają się nowe dyscypliny matematyczne i metody. Ta nowa matematyka nadal jest matematyką konkretną (jak w czasach babilońskich i egipskich), abstrakcyjną (w rozumieniu starożytnych Greków), ogólną (jak w algebrze średniowiecznej) i realizuje cechę nowożytnego uniwersalizmu. Do tych cech doszła cecha matematyki jako wiedzy „absolutnej", nieuwarunkowanej (jest zdolna do absolutnej generalizacji, staje się nieuwarunkowaną podstawą innych nauk, jest niezbędna w procesach optymalizacji, minimalizacji np. założeń). W kolejnym rozdziale pracy postaram się opisać cechy tego nowego przełomu.

4. Matematyka jako *mathesis universalis*

Klasyczny sposób określenia danej dyscypliny naukowej polega na określeniu przedmiotów (obszaru) jej badań, określeniu charakteryzujących ją metod badawczych oraz specyficznego języka lub wskazaniu budujących ją subdyscyplin, posiadających swoją charakterystykę. Żadne z tych kryteriów nie działa w przypadku matematyki. Nie można wskazać ściśle jej obszaru badawczego, gdyż matematyka się rozwija, a jej przedmiot może być *de facto* dowolny. Również określenie przez język (formalny, ścisły, symboliczny) lub metodę (np. aksjomatyczno-dedukcyjną) jest nieskuteczne. W trakcie rozwoju matematyki pojawiają się bowiem kolejne metody, czasem zupełnie niespodziewane, a ponadto matematyka może być uprawiana przy pomocy języka potocznego, obrazkowego. Język symboliczny pojawił się dopiero w późnym okresie rozwoju matematyki. Niemożliwe jest potraktowanie matematyki jaka jedynie swobodnej aktywności twórczej (artystycznej), w której tworzy się i bada byty fikcyjne, gdyż obiekty matematyczne mają odniesienie do rzeczywistości.

Jak wiadomo, Arystoteles przyjął, że matematyka jest nauką o ilości, przestrzeni i liczbie. Jednak pojęcia ogólne (ilość, przestrzeń, liczba) użyte w tym określeniu nie są jednoznacznie określone i podlegały w ciągu dziejów nauki przemianom, a matematyka rozszerzała dziedzinę swoich badań. Definicja Arystotelesa funkcjonuje aż do tej pory w świadomości powszechnej, mimo iż przestała być dawno aktualna (sfalsyfikowało ją już powstanie algebry i wiele dyscyplin matematycznych nowożytnych). Z tych samych powodów nie może być rozwiązaniem wyliczenie poszczególnych działów matematyki. Kolejne klasyfikacje matematyki z czasem okazują się niepełne. Najbardziej znana jest ta pochodząca od Archytasa, w którym dzieli on matematykę na arytmetykę, geometrię, muzykę i astronomię. Dołączano do nich czasami logistykę (sztukę rachunkową), a w późniejszym okresie mechanikę, optykę, trygonometrię, algebrę i wiele innych.

Mimo tych trudności pojęcie matematyki wydaje się zrozumiałe, a ona sama wydaje się zachowywać, przez wieki rozwoju, jedność. Czym wobec tego jest matematyka? w jaki sposób oddzielić ją od pozostałych dyscyplin naukowych? Na czym polega ten fenomen jedności matematyki?

Obserwacje dziejów matematyki, które miały miejsce w tej pracy, częściowo naświetliły to zagadnienie. Spróbujmy dokonać pewnej reasumpcji i wyciągnąć wnioski w tym zakresie. Oczywiście, głównym argumentem za jednością matematyki jest uniwersalność jako taka, odsłaniająca kolejne aspekty w ramach rozwoju.

Obserwując dzieje matematyki, zauważyliśmy, że matematyka ujawniła swoją obecność w różnych obszarach aktywności intelektualnej i praktycznej. Jej zakres nieustannie się rozszerzał, jednak spojrzenie retrospekcyjne pozwalało dostrzec obecność jej nowych działów już w okresach poprzednich. Oczywiście, raczej nie występowały one wcześniej w postaci dojrzałej, jednak ich obecność pokazuje ciągłość rozwoju matematyki i jej jedność. Podobnie działo się z metodami badań matematycznych, które mimo dochodzenia nowych elementów, w swoim podstawowym schemacie pozostawały te same lub były rozwijaniem poprzednich. Nawet po utracie pewnych dzieł matematycznych istniała możliwość ich odtwarzania w oparciu o ocalałe fragmenty czy komentarze. Można również zaobserwować tak zwane długie linie rozwojowe matematyki, gdzie ciągle rozwija się to samo matematyczne zagadnienie przy pomocy nowych narzędzi. Grecy w dużym stopniu rozwinęli matematykę babilońską oraz egipską, podejmując występujące tam zagadnienia w świetle nowych metod i dostrzegając nowe możliwości matematyki. Ponadto okazuje się, że działalność matematyczna na bieżąco rozwiązuje sprzeczności kulturowe i jest w swoich różnych odsłonach obecna w kulturze i gospodarce (wpływ na technikę i powstanie w czasach hellenistycznych techniki naukowej). Jej obecność wzmacnia cywilizację, natomiast jej brak powoduje, że cywilizacja przestaje się rozwijać, słabnie i zamiera (upadek Rzymu, kryzysy w czasach hellenistycznych związane z niszczeniem zbiorów czy rozpraszaniem i zabijaniem uczonych). Włączanie tylko pewnych elementów matematyki w obszar kultury i techniki nie na wiele się zdaje, gdyż matematyka jest całością, która jest w stanie się rozwijać jedynie jako autonomiczna całość. Trzeba wraz z tymi praktycznymi działami matematyki uznawać i pozwolić funkcjonować również tym, dla których zdaje się, że nigdy zastosowań nie będzie.

Ponadto sposób konstrukcji matematyki i uprawiania matematyki wyjaśnia inne metody i struktury, na przykład dzięki metodzie aksjomatyczno-dedukcyjnej możemy nauczyć się metody hipotetyczno-dedukcyjnej, zrozumieć, czym jest metoda elementarności, analizy czy *dynamis*. W ten sposób matematyka obecna jest w filozofii jako przykład racjonalności, myślenia metodycznego i spójnego. Matematyka okazała się też źródłem metody naukowej (w tym techniki naukowej) powstałej w starożytności, pokazała, że maszyny konstruowane zgodnie z jej zasadami mogą funkcjonować w rzeczywistości i stać się jej elementem. Prawda rzeczywistości jest jedna mimo różnych teorii, a do tej przybliża nas jedna matematyka. Dzięki modelom matematycznym możemy wyjaśniać obserwowane zjawiska, nawet jeśli wydają się nam „niepojęte" i niewyjaśnialne. Matematyka jako zasada jedności i poznawalności tego, co obserwujemy, sama też powinna charakteryzować się jednością.

Powstała w czasach antycznych metoda aksjomatyczno-dedukcyjna pokazywała, że możemy w sposób czysto abstrakcyjny, w oparciu o samą siłę umysłu, rozbudowywać daną dziedzinę nauki. Związana z tą metodą ogólna idea dowodu jest obecna w każdej próbie racjonalnego poznawania świata. Pokazuje ona, w jaki sposób do istniejącego już układu prawd można dołączać w sposób spójny prawdy nowe, zwane w matematyce twierdzeniami. Ten sposób rozbudowy gmachu wiedzy gwarantuje jedność i stabilność gmachu nauki i nawet, jeśli czasami trzeba zmodyfikować podstawowe założenia (na przykład związane z wyborem składników elementarnych), to i tak prowadzone wcześniej rozumowania i wyprowadzone wnioski pozostają stałą zdobyczą. Najlepiej pokazują to *Elementy* Euklidesa, które stały się symbolem stabilnej i niezmiennej wiedzy oraz ścisłości naukowej. Przez wieki pozostawały niedoścignionym wzorem realizacji tej metody, a kiedy próbowano uściślić i uporządkować w XIX wieku podstawy analizy matematycznej i inne dyscypliny matematyczne, do tej metody w sposób jawnie nawiązano (program aksjomatyzacji różnych dyscyplin matematycznych). Oczywiście matematyka posiada również inne metody, które pozwalają na budowanie jednolitego gmachu wiedzy. Matematyka istniała przed powstaniem metody aksjomatyczno-dedukcyjnej i była to matematyka konkretna (eksperymentalna, praktyczna), a w czasach hellenistycznych zaczęła kształtować się matematyka ogólna, której istotnymi elementami są ogólne metody algorytmiczne, algebra ogólna oraz technika i astronomia matematyczna. W czasach nowożytnych i nam współczesnych mamy kolejne metody.

Zauważmy jednak, że każdy z przedstawionych w poprzednim paragrafie etapów rozwojowych wskazywał na pewną cząstkową „definicję” matematyki. Etap matematyki konkretnej to rozumienie matematyki jako narzędzia pozwalającego rozpoznawać w rzeczywistości harmonię i porządek i ujmować ją w odpowiednie struktury (jest to zanurzanie matematyki w rzeczywistość, czyli rozpoznawanie matematyczności świata). U pitagorejczyków następuje dopełnienie tej definicji poprzez ukazanie pełnego izomorfizmu między światem a matematyką. Pojawiają się metody pozwalające na zanurzanie rzeczywistości w matematyce, a tym samym otrzymujemy matematyzowalność rzeczywistości. Jednak matematyka abstrakcyjna ukazuje matematykę jako niezależną od rzeczywistości. Jej autonomia nie wyklucza związków między abstrakcyjnymi obiektami matematycznymi a rzeczywistością, a wręcz daje więcej możliwości zastosowań. W matematyce ogólnej widzimy matematykę jako narzędzie kondensacji wiedzy w zwięzłych formułach, symbolach i algorytmach. Uniwersalność matematyki nowożytnej pokazuje, że posiada ona metody i sposoby dowodzenia mogące mieć zastosowanie we wszystkich naukach, a ponadto, że jest narzędziem pozwalającym rozpoznawać strukturę rzeczywistości (tę jawną i ukrytą). W pewnym sensie każda z tych matematyzowanych nauk staje się w miarę rozwoju dyscypliną matematyczną. A w ostatnim „odsłonięciu” matematyka okazuje się być nieuwarunkowanym początkiem i podstawą każdej wiedzy i narzędziem jej syntezy. Matematyka jest więc wiedzą pozwalającą nam zrozumieć rzeczywistość; dyscypliną badań naukowych cechującą się autonomią wobec rzeczywistości zmysłowej, przy jednoczesnym zachowaniu z nią istotnego związku; skutecznym narzędziem modelowania rzeczywistości; nauką mającą zastosowania w różnych obszarach nauki i kultury; nauką badającą obiekty będące pierwotnym przedmiotem myślenia; narzędziem syntez naukowych.

Już Grecy zauważyli, że słowo „matematyka” wywodzi się od słowa *hē mathēmatikē* oznaczającego po prostu spójną wiedzę. Pojawia się więc synonimiczność słów nauka (wiedza) oraz matematyka, a także spostrzeżenie, że matematyka jest taką dziedziną wiedzy, której nie można zrozumieć bez dogłębnego studiowania, co odróżnia ją on nauk niematematycznych[11]. Ponadto żadne nasze doświadczenie nie może być pomocne przy zrozumieniu matematyki, trzeba wręcz uwolnić się od skojarzeń potocznych i zmysłowych, aby wejść w czystą strukturę wiedzy matematycznej. Dlatego myślę, że najwłaściwszą nazwą, ujmującą naturę matematyki i sumującą wymie-

[11] Jest to „definicja” podana przez Autoliosa żyjącego pod koniec III wieku p.n.e. Por. L. Russo, op. cit., s. 207.

nione określenia, jest *mathesis universalis*. Tak Kartezjusz, jak i Leibniz chcieli zbudować maksymalnie ogólną naukę (*mathesis universalis*) na wzór matematyki. Miała to być nowa nauka, niebędąca konkretną dyscypliną naukową, lecz łącząca wszystkie formalne i aprioryczne nauki. Miała to być nauka o wszystkim, co jest możliwe do wyobrażenia, nieograniczająca się tylko do wielkości, jej przedmiotem miało być wszystko, co istnieje w naszej wyobraźni. Ta nowa nauka ma więc badać dowolne obiekty i relacje (związki, kombinacje) między nimi[12].

W analizowanym wcześniej fragmencie pracy *Reguły kierowania umysłem* Kartezjusz przyjmuje, że ta nowa nauka ma badać wszystko, co jest możliwe do badania (nie jest ograniczona pod względem przedmiotu badania) w zakresie porządku i miary. Dopiero dalszy rozwój matematyki pokazał znaczenia kartezjańskiego określenia matematyki. Nie jest jednak do końca jasne, czy Kartezjusz utożsamiał tę nową naukę z matematyką, czy matematyka miała być tylko jej częścią. Na pewno jednak miała obejmować klasyczne dyscypliny matematyczne (związane z matematyką czystą oraz stosowaną), jak również nową algebrę i nauki poddane kartezjańskiej metodzie badań[13]. Jak pokażę w kolejnym rozdziale, budowanie ogólnej nauki (*mathesis universalis*) na wzór matematyki kończyło się powstawaniem kolejnych dyscyplin matematycznych, które starano się wykorzystać jako podstawę całej matematyki wraz z jej uniwersalnym językiem (tak stało się z teorią mnogości, a współcześnie takie próby są podejmowane z teorią kategorii i funktorów). Nie udaje się więc wyjść poza matematykę przy budowie nauki uniwersalnej, a mimo powstawania kolejnych dyscyplin matematycznych, czasami zasadniczo różniących się od poprzednich, zachowuje ona swoją jedność.

Dlatego myślę, że obserwacja powstawania i tworzenia się matematyki starożytnej pozwala nam przyjąć jej następujące określenie: **dziedziną badań matematyki są pierwotne przedmioty myślenia**. Nie są to byty wyabstrahowane z rzeczywistości (ani materialnej, ani świata idei, ani jakiegokolwiek innej), lecz mające swoją pełną autonomię. Jak zauważyliśmy, kolejne możliwości poznawania świata i rozwoju cywilizacji wiązały się z odkrywaniem nowych obiektów matematycznych (liczby, formy geometryczne, zależności między nimi, pomiar, konstrukcje i dowody matema-

12 *Mathesis Universalis, Computability and Proof*, red. S. Centrone, S. Negri, D. Sarikaya, P.M. Schuster, „Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science" 2019, t. 142, s. 2 (Springer Nature Switzerland AG).

13 Por. F. Buzon, *Mathesis Universalis,* [w:] *The Cambridge Descartes Lexicon,* red. L. Nolan, Cambridge University Press, Cambridge 2015, s. 475–478.

tyczne, abstrakcyjne metody i obiekty oraz ogólne formy, symbole, algorytmy). Potoczne doświadczenie generuje antynomie, które zdają się dotykać także matematyki, jak sugerowały paradoksy starożytnych. Jednak rozwijająca się matematyka pokazała, że poprzez rozbudowywanie obszaru doświadczeń matematycznych i metod można wskazywanych trudności uniknąć. Wprowadzenie teorii stosunków i metody wyczerpywania dało możliwość obliczania powierzchni figur ograniczonych krzywymi i dokonywania „przybliżonych" metod kwadratury np. koła (w sposób jednak ścisły i zgodny z metodą matematyki). Również wprowadzenie ruchu, przekroju oraz „metody ogólnych warunków", jako elementu konstrukcji nowych krzywych (kwadratrysa, krzywe stożkowe, cysoida Dioklesa, ślimacznica Archimedesa), pozwoliło na wykonywanie konstrukcji, nazwanych problemami starożytnych. Trzeba było jednak przyjąć inne składniki elementarne potrzebne do konstrukcji. Zamiast prostej i okręgu (jak w konstrukcjach platońskich) można było przyjąć krzywe stożkowe, obiekty otrzymywane dzięki najprostszym rodzajom ruchu, czy takie, które spełniają pewne ogólne warunki (co prowadziło do odkrywania zależności algebraicznych).

Najciekawszą sytuację mamy, gdy rozpatrujemy zależność między ideą przyczynowości a strukturą liczb naturalnych. Każda liczba naturalna otrzymywana jest z liczb ją poprzedzających, można je więc traktować jako jej przyczynę. Podobnie jak w przypadku poprzednim można zauważyć, że struktura liczb naturalnych jest znacznie bogatsza od idei przyczynowości. Trzeba więc przyjąć, że pierwotnym przedmiotem myślenia są liczby naturalne i to dzięki uchwyceniu ich struktury możemy wypracować ideę przyczynowości. Ponieważ jedną z własności liczb naturalnych jest istnienie elementu najmniejszego, więc w naturalny sposób pojawia się też „strzałka" czasu pokazująca strukturę „upływu" czasu na wzór wzrastania liczb naturalnych.

Podsumowując, przywołajmy jeszcze raz kluczową własność matematyki, która mówi, że dzięki rozpoznawanym przez nasz umysł obiektom matematycznym możemy bez sprzeczności myśleć o rzeczywistości i w konsekwencji ją poznawać. Matematyka jest warunkiem dostrzegania racjonalnych struktur w poznawanej rzeczywistości, a rozumienie matematyki jedynie jako modelu rzeczywistości nie jest adekwatne. W żadnej z przedstawionych głównych koncepcji matematycznych nie pojawia się takie rozumienie. Rzeczywistość w swojej racjonalnej strukturze wyłania się, gdy „przykładamy" do niej matematykę. Matematyka jawi się więc jako to, co jest pierwotnym przedmiotem naszego myślenia i co pozwala patrzeć na rzeczywistość w sposób racjonalny. Dotyczy to w równym stopniu rzeczywistości zmysłowej, jak i świata idealnego (np. świata idei platońskich)[14].

W ten właśnie sposób wyłaniały się kolejne działy matematyki – nie tyle jako idealizacja i wyabstrahowanie pewnych elementów z rzeczywistości zmysłowej, lecz jako doświadczenie „innej rzeczywistości”, dzięki której stało się możliwe poznawanie świata jako spójnego i harmonijnego układu, i to w sposób racjonalny. I tak pojawiło się matematyczne doświadczenie geometryczne (Tales), następnie arytmetyczne, muzyczne (Pitagoras), optyczne (Euklides), mechaniczne, hydrostatyczne (Archimedes), astronomiczne (Hipparch) i inne. Każde z tych doświadczeń ukazywało kolejny aspekt rzeczywistości i ją „humanizowało”, czyniąc poznawalną i inteligibilną.

---

[14] Te analizy odnoszą się częściowo do pracy: W. Wójcik, *Przełom czy rewolucja – znaczenie matematyki dla wystąpienia rewolucji kulturowej*, „Zagadnienia Naukoznawstwa” 2007, vol. 43, s. 83–93.

ROZDZIAŁ VI
KSZTAŁTOWANIE SIĘ NOWYCH PROGRAMÓW BADAŃ W MATEMATYCE WSPÓŁCZESNEJ. ZAPOWIEDŹ KOLEJNEGO PRZEŁOMU

1. Nowe teorie wykraczające poza matematykę nowożytną

W czasach współczesnych intensywnie rozwijana jest matematyka we wszystkich wymiarach jej uniwersalności, kontynuując nowożytny program uniwersalności związanej z pojęciem nieskończoności, funkcji, granicy i ciągłości, ale również nawiązując do matematyki konkretnej, abstrakcyjnej i uniwersalnej. Jednak coraz wyraźniej są w niej obecne zwiastuny nowego przełomu. Pojawia się coraz więcej teorii matematycznych, które nie pasują do schematu matematyki „klasycznej". Do najbardziej charakterystycznych należy teoria kategorii i funktorów, geometria fraktalna oraz teoria gier.

Jednak już w czasach średniowiecznych i nowożytnych pojawiały się idee, które wyprzedzały rodzący się aktualnie przełom. Twórcami ich byli Ramon Llull oraz Gotfried Wilhelm Leibniz. Jeden, jak i drugi budują filozofię „pokoju", mającą jednoczący charakter. Według tej filozofii, do prawdy docieramy przy pomocy różnych źródeł i żadne z nich nie jest uprzywilejowane. Proces poznawczy jest jeden, na który składa się droga poznania naukowego, teologicznego, filozoficznego czy mistycznego. Wierzą oni w siłę argumentów racjonalnych nie tylko w dyskusjach filozoficznych, lecz także religijnych. Uważają, że poprzez zbudowanie czysto formalnego systemu można poznawać, badać prawdę i przekonywać innych. Zauważmy, że tego typu idee znajdowały się już w *Harmonii* Arystarcha. Jego logistyka była nauką czysto pojęciową i dostarczała dowodów w oparciu o czysty rozum i przy pomocy formalnych operacji na liczbach. Pozwalała badać zjawiska przyrody, ale również rozstrzygać kwestie społeczne – zaprowadzać pokój i sprawiedliwość.

Rajmund Llull (1232–1316) był matematykiem, filozofem, logikiem i mistykiem, człowiekiem o wszechstronnej wiedzy (polihistor), jednym z najwybitniejszych umysłów średniowiecza. Dążył do stworzenia uniwersalnego modelu, który dawałby zrozumienie całej rzeczywistości i pozwalał w sposób czysto rachunkowy i logiczny dochodzić do prawdy i przekonywać innych. Jego *Art* (*Ars Magna*, wydana w 1305 roku) miała być też podstawowym narzędziem nawracania na chrześcijaństwo muzułmanów i żydów. Miały to być więc argumenty racjonalne, formalne, jednak docierające do takich, którzy taki sposób wymiany myśli uznają za wartościowy. W swoich ideach wpłynął na Leibniza, na opracowaną przez niego *Ars combinatoria.* Llull napisał około 250 prac, jednak większość z nich zaginęła. Pierwsza wersja jego *Sztuki*, którą przedstawił w Paryżu w latach 1288–89, została odrzucona przez uczonych z powodu złożonej struktury i stosowania całkiem nowego, „dziwacznego" słownictwa. W kolejnej uprościł całą strukturę, dzięki czemu mógł wyjaśnić istotę swojej idei. W pracy przyjął założenie, że istnieje ograniczona liczba niewątpliwych prawd we wszystkich rodzajach wiedzy i można je otrzymać czysto mechanicznie (przy pomocy „kół Llulla"), w oparciu o kilka ustalonych na początku podstawowych pojęć. Na przykład w dyskursie o Bogu przyjął jako te pojęcia dziewięć atrybutów Boga, co do których uznał, że mogą zgodzić się z nimi tak żydzi, jak i muzułmanie; były to: dobroć, wielkość, wieczność, moc, mądrość, wola, siła, prawda i chwała. Przez czysto mechaniczne zestawianie tych pojęć otrzymamy najważniejsze prawdy chrześcijańskie – jako logiczno-mechaniczną konieczność wybranych wcześniej atrybutów[1].

Pomysł Llulla rozwinął w XVII wieku Leibniz, łącząc go ze swoją monadologią i wizją nauki uniwersalnej. Według niego, należy utworzyć z nich katalog pojęć pierwotnych (alfabet myśli) i przypisać im pewne symbole. Leibniz zakładał, że każde pojęcie można rozłożyć na skończoną liczbę pojęć pierwotnych. Jak przy pomocy dziesięciu cyfr można otrzymać każdą liczbę (mimo iż tych liczb jest nieskończenie wiele), tak samo przy pomocy alfabetu myśli będzie można utworzyć dowolne pojęcie. Wszystkie pojęcia będzie więc można otrzymać poprzez odpowiednią kombinację tych pierwotnie wybranych symboli. Automatycznie ta procedura będzie zawierała dowody wszystkich możliwych faktów. Jedynym kryterium łączenia poszczególnych elementów jest spójność i logiczność budowanej struktury. W liście do A. Arnaulda Leibniz pisze, że ten rachunek uniwersalny miałby we wszystkich naukach takie samo zastosowanie, jak w matematyce. Pisze: „Mam definicje, aksjomaty, twierdzenia i problemy wielce godne uwagi o koincydencji, o determinacji (czyli o *de unico*), o podobieństwie, o relacji w ogólności, o mocy lub przyczynie, o substancji, i wszędzie rozwijam w listach metodę

1 R. Llull, A. Bonner, E. Bonner, *Doctor Illuminatus: A Ramon Llull Reader*, Princeton University Press, Princeton 1993, s. 291–367.

ścisłą i dokładną, taką jak w algebrze, czyli w dziedzinie liczb”[2]. Według Leibniza nie ma problemu, aby ten rachunek stosować do zagadnień związanych z przypadkiem i domniemaniami. Jak to rozbić – pokazali, według niego, Pascal, Huygens i inni w budowanej teorii prawdopodobieństwa. Jest to jedna z najbardziej rozwijających się współcześnie teorii, a rodziła się, jak wiemy, w korespondencji Pascala z Fermatem oraz w pracach Huygensa, samego Leibniza i Jakuba Bernoulliego[3]. Głównym motywem podjęcia tych badań było matematyczne uchwycenie gier hazardowych, a w późniejszym okresie – różnorodnych zjawisk społecznych (statystyka społeczna) czy opracowanie teorii błędów popełnianych przy pomiarach czy obliczeniach. Mamy tu próbę racjonalnego ujęcia czegoś, co wydawało się pozaracjonalne, „rządzone” przez emocje, namiętności, przypadek, fatum, ale też szczęśliwy zbieg okoliczności. Pojęcie przypadku często wiązało się z charakterem naszej wiedzy, a raczej niewiedzy, którą dało się zniwelować albo nie. W przypadku Pascala motywacja była dodatkowo religijna. To poddawanie się metodom matematycznym przebiegało jednak bardzo powoli.

Już w XVII wieku pojawiają się pojęcia i metody, które służą ujęciu omawianych zagadnień. W wydanej w 1657 roku pracy *De ratiociniis in ludo aleae* (*O rachubach w grze w kości*) Huygens wprowadza pojęcie *nadziei matematycznej.* Tak zwana klasyczna definicja prawdopodobieństwa (prawdopodobieństwo jest stosunkiem liczby przypadków sprzyjających do wszystkich jednakowo możliwych) w sposób formalny pojawiła się dopiero w słynnej pracy Jakuba Bernoulliego *Ars conjectandi* z 1713 roku. Praca ta zawierała również twierdzenie (nazwane później prawem wielkich liczb lub twierdzeniem Bernoulliego), które otworzyło rachunek prawdopodobieństwa na zastosowania. W dalszej części Autor rozwija metody kombinatoryczne oraz pokazuje zastosowania wprowadzonych twierdzeń i metod do rozwiązywania różnych zagadnień społecznych i ekonomicznych. W XVIII wieku Abraham de Moivre (1667–1754) formułuje i dowodzi twierdzenia graniczne, Thomas Bayes (1702–1761) wprowadza pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego, Karol Gauss opracowuje teorię błędów pomiaru i pokazuje, że rozkład tych błędów jest rozkładem normalnym. Rozkład normalny okazał się rozkładem występującym w wielu bardzo różnych sytuacjach. Najdoskonalszym dziełem i ukoronowaniem tych wysiłków była słynna praca P.S. Laplace’a *Teoria analityczna prawdopodobieństwa*, która ukazała się w 1812 roku.

Mimo tak dynamicznego rozwoju przez wielu uczonych teoria prawdopodobieństwa nie była uznawana za teorię matematyczną. Zaczęto jednak

[2] G.W. Leibniz, *Korespondencja z Antoine’em Arnauldem*, PWN, Warszawa 1998, s. 130.
[3] Ibidem, s. 154–155.

intensywniej stosować ją do różnych zagadnień, w tym do ekonomii, biologii, psychologii (biometryka), astronomii i do nowych teorii fizycznych (termodynamika, mechanika kwantowa). Ludwig Boltzman (1844–1906) zauważył, że podstawowe prawa natury mają raczej naturę stochastyczną (a więc opartą na prawach rachunku prawdopodobieństwa) niż ściśle deterministyczną. Nawet podanie w 1933 roku aksjomatyki teorii prawdopodobieństwa przez Kołmogorowa i oparcie jej na „porządnych" teoriach matematycznych (teorii mnogości i teorii miary) nie zakończyło sporów wokół niej. Okazało się bowiem, że dotyczy ona praktycznie wszystkich nauk i dziedzin życia i stanowi ich podstawę. Aksjomatyzacja zamyka jej rozwój w pewnych ustalonych schematach. Już efekty kwantowe (w tym zasada nieoznaczoności Heisenberga) domagają się wyjścia poza klasyczną teorię opartą na logice boolowskiej. Kazimierz Urbanik w swoim artykule o osiągnięciach Hugona Steinhausa w zakresie teorii prawdopodobieństwa zauważa, że

> rachunek prawdopodobieństwa, w swej kołmogorowskiej postaci, jest matematycznym modelem klasycznej mechaniki statystycznej. Istotnie, przestrzeń zdarzeń elementarnych to przestrzeń fazowa rozpatrywanego układu fizycznego. Niech S będzie σ-ciałem zdarzeń losowych. Fizyczną interpretację rodziny S uzyskujemy następująco: funkcje S-mierzalne na przestrzeni fazowej to wielkości fizyczne. Szczególnie prostymi wielkościami fizycznymi związanymi z rozpatrywanym układem fizycznym są indykatory zbiorów S-mierzalnych. Opisują one własności systemu w zerojedynkowym języku logiki formalnej. Wyznaczają również matematyczną strukturę całej rodziny wielkości fizycznych. Jest rzeczą oczywistą, że rodzinę indykatorów zbiorów S-mierzalnych można utożsamić z σ-ciałem S. W fizyce nazywa się ono logiką układu fizycznego[4].

Natomiast stan układu to rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni fazowej. Matematyczny model klasycznej mechaniki statystycznej to przestrzeń fazowa, logika i stan układu, co daje tak zwaną trójkę Kołmogorowa: przestrzeń zdarzeń elementarnych, σ -ciało zdarzeń losowych i miarę – prawdopodobieństwo. Okazuje się, że boolowska logika nie jest możliwa do przyjęcia w mechanice kwantowej.

> Zastępuje się ją przez logikę będącą σ-kratą [...] Poza oczywiście σ-algebrą Boole'a typowymi przykładami są tu tak zwane standardowe logiki podprzestrzeni ośrodkowej, nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. One to służą do opisu kwantowej mechaniki. Stanami w niej są funkcje przeliczalnie addytywne na ortogonalnych elementach logiki unormowane na elemencie maksymalnym [...] Są to kwantowe odpowiedniki rozkładów prawdopodobieństw. Ich badanie jest treścią tak zwanego niekomutatywnego (nieprzemiennego) rachunku prawdopodobieństwa[5].

---

[4] K. Urbanik, *Idee Hugona Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa*, „Wiadomości Matematyczne" 1973, t. XVII, s. 45–46.

[5] Ibidem, s. 46.

Można więc budować rachunek prawdopodobieństwa, opierając się na innych „nieklasycznych" logikach, aby był on bardziej przydatny do opisu teorii kwantowych. Tym samym okazuje się on bardziej podstawowy od tych teorii, i badając czy rozwijając go, docieramy do podstaw nauk i rzeczywistości.

Jak pokazywałem, rachunek prawdopodobieństwa był w znacznej mierze częścią nowożytnego schematu uniwersalności matematyki, jednak jego współczesna rozbudowa pokazuje konieczność wykroczenia poza ten schemat i wskazuje na konieczność budowania „nowej matematyki" jako wiedzy odkrywającej podstawy rzeczywistości.

Do takich nowych matematyk należy teoria gier, która w inny sposób niż teoria prawdopodobieństwa ukazała zagadnienie „gry" i jej matematyczne podstawy. W 1913 roku wychodzi książka E. Zermela[6], a następnie, w latach 1921 – 1927, seria prac E. Borela[7], w których pokazane są możliwości matematyzacji pojęcia gry. W roku 1925 H. Steinhaus drukuje pracę *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*[8]. W roku 1928 wychodzi fundamentalna praca Johna von Neumanna *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, która wprowadza podstawowe pojęcia i definicje teorii gier[9]. W 1944 ukazuje się książka Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna *Theory of Games and Economic Behavior*[10], która uchodzi za „definitywne" sformułowanie matematycznej teo-

---

6 E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, „Proc. Fifth Congress Mathematicians. Cambridge 1912", Cambridge University Press, Cambridge 1913, s. 501–504.

7 Przed pracą Steinhausa wyszły trzy prace E. Borela: *La théorie du jeu et les équations intégrales á noyau symétrique gauche,* „Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences" 1921, t. 173, s. 1304–8; *Sur les jeu ou intervient l'hasard et l'habileté des joueurs*, „Association Francaise pour l'Advancement des Sciences" 1923, s. 79–85; *Sur les jeu ou intervient l'hasard et l'habileté des joueurs*, [w:] *Theorie des Probabilités*, Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris 1924, s. 204–224. Natomiast w latach 1926–1927 ukazały się kolejne dwie: *Un théorem sur les systémes de formes linéaires á detérminants symétrique gauche*, „Compte Rendus Académie des Science", 1926, t. 183, s. 925–927; *Algébre et calcul des probalilités*, „Compte Rendus Académie des Science", 1927, t. 184, s. 52–53.

8 H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*, „Myśl Akademicka" 1925, nr 1, s. 13–14; wersja angielska*, Definitions for a Theory of Games and Pursuits,* „Naval Research Logistics Quarterly" 1960, nr 7, s. 105–108, oraz [w:] H. Steinhaus, *Selected papers,* Warszawa 1985, s. 332–336.

9 J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, „Mathematische Annalen" 1928, nr 100, s. 295–320; 10 lat później mamy kolejne dwie prace: *Traité du calcul des probalilités st ses applications*, [w:] *Applications des jeux de hasard*, t. 4, z. 2, Paryż 1938, s. 122; *Jeux oú la psychologie joue un role fondamental*, ut supra, s. 71–87.

10 J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1944.

rii gier. Powstają kolejne prace ukazujące możliwości rozbudowy tej teorii, m.in. Johna Nasha, *Equilibrium Points in N-Person Games*[11]. Kluczowym pojęciem teorii gier okazuje się pojęcie strategii, a twierdzenie o minimaksie – najważniejszym twierdzeniem. Ten matematyczny schemat można stosować do różnorodnych sytuacji, nawet takich, w których pojęcie gry nie było wcześniej używane.

Matematyka pokazuje analogię między bardzo różnymi sytuacjami – grami: może to być gra w szachy, pościg, gra losowa czy ekonomiczna gra o osiągnięcie maksymalnego zysku. Niezależnie od okoliczności zewnętrznych, od nastawienia graczy (na przykłady ich chęci oszukania), można ustalić wspólne pojęcia i kategorie pozwalające opisać i rozwiązywać badane zagadnienia. Przy pierwszym intuicyjnym podejściu do zagadnienia dostrzegamy błędne koło, albowiem najlepsza strategia ruchu jednego gracza zależy od strategii drugiego, i *vice versa*. W przypadku pościgu inna jest strategia ścigającego i ściganego: pierwszy dąży do minimalizacji czasu, w którym osiągnie cel, a drugi – do jego maksymalizacji, uwzględniając pierwotne położenie obu i inne parametry (prędkość, kąty między nimi, itd.). Okazuje się, że strategia minimaks (czyli strategia pościgu jako reakcja na strategię uciekającego) daje ten sam efekt, co strategia maksmini (strategia ucieczki jest w reakcji na strategię pościgu), obie przynoszą ten sam wynik, co jest treścią wspomnianego twierdzenia o minimaksie.

Ponadto okazuje się, że teoria ta ma ścisłe związki z innymi teoriami matematycznymi, wydawałoby się – bardzo odległymi, jak: teoria mnogości, topologia, logika, itp. Dobrymi przykładami są tu prace H. Steinhausa, B. Knastera i S. Banacha nad zagadnieniem „sprawiedliwego podziału" (to zagadnienie i pojęcie zostało ujęte matematycznie). Strategia miała być tak ustalona, aby była niezależna od subiektywnych i indywidualnych odczuć i działań poszczególnych osób biorących udział w podziale, a każdy uczestnik czuł, że został potraktowany sprawiedliwie[12]. Podobnie w pracy z 1962 roku *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*[13] mamy pokazany związek teorii gier z teorią mnogości. Sformułowany w oparciu o teorię gier

---

11 J. Nash, *Equilibrium Points in N-Person Games,* „Proceedings of the National Academy of Sciences" 1950, t. 36, s. 48-49.

12 S. Banach, B. Knaster, H. Steinhaus, *The problem of fair division*, „Econometrica" 1948, t. 16, s. 101–104; dalsza część ukazała się rok później, gdzie Steinhaus zaprezentował „podział dla *n* osób z wykorzystaniem metody Banacha", *Sur la division pragmatique,* „Econometrica" 1949, t. 17 (supplement), s. 315–319.

13 H. Steinhaus, J. Mycielski, *A matematical axiom contradiction the axiom of choice,* „Bulletin of the Polish Academy of Sciences" 1962, t. 10, s. 1–3.

„aksjomat determinacji" został wprowadzony do teorii mnogości jako aksjomat zastępujący pewnik wyboru[14]. Powstała w ten sposób alternatywna teoria mnogości była słabszą teorią od klasycznej teorii mnogości, zachowującą jednak najważniejsze twierdzenia. Natomiast zostaje wyeliminowanych wiele paradoksalnych efektów (do których prowadzi aksjomat wyboru), na przykład istnienie zbiorów niemierzalnych czy możliwość paradoksalnego podziału kuli (twierdzenie Banacha-Tarskiego)[15].

Kolejną teorią niemieszczącą się schemacie matematyki klasycznej jest geometria fraktalna. Jej twórcą był **Benoit Mandelbrot** (1924–2010), matematyk pochodzenia żydowskiego, urodzony w Warszawie. W 1936 wyemigrował wraz z rodziną do Francji, gdzie ukończył w 1947 École Polytechnique, czołową francuską uczelnię. Miał ponadprzeciętne zdolności matematyczne (w tym pamięć geometrycznych konstrukcji i kształtów), potrafił intuicyjnie znaleźć rozwiązanie geometrycznych problemów poprzez wizualną i wyobrażeniową analizę geometrycznych figur. Inspiracją dla jego badań była książka George'a Zipfa *Human behavior and the principale of least effort* (1949). W książce omawiane były zjawiska (w naukach społecznych), które nie podlegały tzw. rozkładowi normalnemu. Ważną inspiracją były też prace Norberta Wienera o cybernetyce i Johna von Neumanna z teorii gier. Okazało się, że do badania tych zagadnień można było stosować metody matematyczne. Mandelbrot skonstruował i nazwał nowe obiekty matematyczne fraktalami – w tym słynny zbiór Mandelbrota. Teoria ta pozwala opisywać i badać obiekty o nieregularnych kształtach i strukturze, które nie są dostępne dla klasycznej geometrii. Zastosował swoją teorię do badania złożonych zjawisk fizycznych, biologicznych i społecznych, na przykład do opisu budowy chmur czy grzbietów górskich oraz analizy rynku finansowego. Jego teoria miała być „złotym środkiem" między geometrią euklide-

[14] Aksjomat determinacji jest oparty na „grze Banacha". Polega ona na tym, że dwóch graczy na przemian wybiera jedną z cyfr od 0 do 9. W ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg cyfr, który odpowiada pewnej liczbie z przedziału [0,1]. Na początku tej gry gracz I wybiera dowolny podzbiór A z przedziału [0,1] i stara się, aby tworzona przez kolejne wybory liczba znalazła się w tym zbiorze. Natomiast gracz II postępuje zupełnie przeciwnie. Opisana gra Banacha jest przykładem gry nieskończonej Γ_A. Pojawia się naturalne pytanie: czy istnieje strategia wygrywająca, tzn., czy ta gra jest zdeterminowana? Steinhaus i Mycielski formułują aksjomat determinacji, który zakłada, że gra Banacha jest zdeterminowana dla dowolnego zbioru A.

[15] Praca Banacha *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* (wspólna z A. Tarskim) z 1924 („Fund. Math." 6, s. 244–277), pokazywała że przy założeniu pewnika wyboru można rozłożyć kulę na skończoną liczbę części, a następnie złożyć z tych części dwie kule o tej samej wielkości, co kula pierwotna.

sową (której prosta struktura w coraz mniejszym stopniu nadawała się do zastosowań dla szybko rozwijającej się nauki) a abstrakcyjnymi teoriami matematyki współczesnej. Teoria fraktali została odkryta poprzez dostrzeżenie analogicznych zjawisk i procesów w bardzo, zdawałoby się, odległych dziedzinach. Wskazuje ona na występowanie procesów czy struktur samopodobnych, ukazujących porządek w pozornie chaotycznych zjawiskach. Analizując zjawiska ekonomiczne na giełdzie, zauważył, że klasyczne modele matematyczne próbujące je opisać nie sprawdzały się, gdyż badane procesy nie są zgodne z rozkładami opisywanymi przez krzywą Gaussa. Mamy całą masę przypadków i zjawisk, które z punktu widzenia modeli klasycznych są przypadkowe, podlegają jednak opisowi fraktalnemu. W ten sposób nastąpił matematyczny wgląd w wiele zjawisk przyrodniczych i społecznych, w tym hydrodynamicznych, astronomicznych, kosmologicznych. Można metodą fraktalną badać różne obiekty o nieregularnych kształtach (linie brzegowe, płatki śniegu, kształty chmur i gór, meandry rzek, wzory kraterów księżycowych, ruchy Browna, częstotliwość uderzeń serca, struktura ludzkich płuc, układ naczyń krwionośnych, liście paproci, brokuły czy dziury w szwajcarskim serze). Uderzające jest podobieństwo niektórych fraktalnych kształtów do żywych organizmów i zadziwiające, jak przy pomocy prostych formuł matematycznych można generować różnorodność i bogactwo kształtów występujących w świecie.

Teoria fraktalna nie mieściła się wprawdzie w matematyce klasycznej, jednak nawiązała z nią bliski kontakt. Badane w tej teorii struktury samopodobne i „chropowate" (czyli takie, których wymiar Hausdorffa nie jest liczbą całkowitą) można było opisać i zreplikować komputerowo za pomocą fraktalnych formuł. Również wiele konstruowanych przez matematyków na przełomie XIX i XX wieku krzywych (czasami określanych jako konstrukcje „patologiczne" czy sprzeczne z intuicją) zostały opisane jako fraktale (zbiór Cantora, krzywa Sierpińskiego i inne). Ukoronowaniem tych badań była książka *The Fractal Geometry of Nature* wydana w 1982. Była ona swoistym manifestem „nowej matematyki" i wzbudziła zainteresowanie przedstawicieli wielu dyscyplin naukowych. Przy pomocy formuł fraktalnych tworzono sztuczne krajobrazy, filmy animowane i gry komputerowe. W latach 70. XX wieku Mandelbrot rozpoczął badania (prowadzone wcześniej przez matematyków francuskich: Pierre Fatou i Gastona Julii) nad rozwinięciami liczb zespolonych, zawierającymi pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych. Metoda Julii była następująca: wstawiał daną liczbę do równania, następnie wyliczał rozwiązanie, a otrzymany wynik znowu podstawiał do równania; i ten proces powtarzał w nieskończoność. Mandelbrot pokazał, przy pomocy komputerów, jego reprezentację graficzną i otrzymał rysunek o kardioidalnym kształcie (nazwany zbiorem Mandelbrota) Wykorzystując analizę zespoloną oraz technikę komputerową, można w ten sposób otrzymać zestawy najpiękniejszych fraktali. Niektórzy uznali to za nowy rodzaj sztuki.

Geometria fraktalna pokazała, że bardzo złożone kształty mogą być generowane przez powtarzanie prostych instrukcji, a niewielkie zmiany w instrukcjach mogą dawać całe bogactwo różnorodnych kształtów i form. Jedna z ważniejszych korzyści, jaką daje zastosowanie obrazowania fraktalnego, polega na tym, że liczba danych potrzebnych do zapisywania badanych obrazów może być znacząco zmniejszona. Otrzymujemy swoistą fraktalną optymalizację badań i opisów[16].

Najbardziej typowa dla zbliżającego się kolejnego przełomu w matematyce jest teoria kategorii (i funktorów). Stworzyło ją dwóch matematyków: **Samuel Eilenberg** (1913–1998) oraz **Saunders MacLane** (1909–2005). Pierwszy z nich pochodził z Warszawy, współtworzył warszawską szkołę matematyczną, a w połowie lat 30. zaczął interesować się zastosowaniami metod algebraicznych w topologii. W 1939 roku ukazała się praca Eilenberga na temat oddziaływania grup podstawowych na wyższe grupy homotopii[17]. W okresie warszawskim napisał kilka prac z topologii algebraicznej, współpracując z Karolem Borsukiem. Interesowały ich związki między topologią i algebrą, a wyniki analiz okazały się istotne dla powstałej niedługo później teorii kategorii[18]. Krótko przed wojną, w kwietniu 1939 roku, opuszcza Polskę i w roku 1947 zostaje profesorem Columbia University w Nowym Jorku. W 1952 roku wydaje (wspólnie z Normanem Steenrodem) książkę *Foundatins of Algebraic Topology.* W 1949 roku przyłączył się do grupy matematyków francuskich, występujących pod pseudonimem Nicola Bourbaki. Od roku 1940 współpracuje też z MacLanem, czego efektem była seria piętnastu prac na temat grup kohomologii. Swoje prace traktowali jako kolejne kompozycje muzyczne tworzące jedną całość. Ukazali zależności między homologią i homotopią, stworzyli teorię kategorii i funktorów i podali aksjo-

[16] Por. następujące prace: B. Mandelbrot, A. Aharony, J. Feder, *Fractals in physics. Essays in honour of Benoit B. Mandelbrot. Proceedings of the international conference honouring Benoit B. Mandelbrot on his 65th birthday*, Amsterdam, New York 1990; J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, New York 1987; H.O. Peitgen, P.H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, New York 1986; K. Barański, *Benoit Mandelbrot i jego fraktale,* „Matematyka" 2011, nr 1, s. 3–13.

[17] S. Eilenberg, *On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups*, „Fundamenta Mathematicae" 1939, t. 32, s. 167–175.

[18] S. Jackowski, *Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy,* „Wiadomości Matematyczne" 2014, t. 50, nr 1, s. 21–43.

matykę dla teorii homologii i kohomologii. Można teorię kategorii i funktorów traktować jako kontynuację słynnego programu F. Kleina z Erlangen, w którym badanie przestrzeni geometrycznych oparte jest na badaniu ich grup transformacji. U Eilenberga i MacLane'a mamy uogólnienie pojęcia grupy (w pojęciu kategorii) oraz odwzorowania do pojęcia funktora i naturalnej transformacji (są to tak zwane strzałki). Miał to być uniwersalny język w badaniach metamatematycznych ukazujący jedność matematyki. Tym samym teoria kategorii dostarcza ogólnych narzędzi, dzięki którym możemy badać struktury matematyczne oraz odwzorowania. W tych badaniach sama struktura staje się zmienną, co jest jakby kontynuacją procesu „uzmienniania", tak istotnego dla tworzenia się algebry ogólnej (i innych działów matematyki). Jednak w teorii kategorii dzieje się coś więcej: strzałki (jako odwzorowania między strukturami, zwanymi obiektami) są od struktur niezależne. Strzałki nie są odwzorowaniami między konkretnymi strukturami, są odwzorowaniami „samymi w sobie", jeśli tak można powiedzieć. Ukazują, czym, tak naprawdę, są odwzorowania i funkcje. Jest to tak, jakby czasowniki w języku były na równi z rzeczownikami.

Z tego powodu teoria kategorii różni się od wszystkich klasycznych teorii matematycznych, które są teoriami „obiektowymi". Teorią obiektową jest również teoria mnogości, która traktowana jest w matematyce współczesnej jako podstawa innych teorii. Teoria kategorii odrzuca założenie, że wszystkie matematyczne obiekty zawsze można odnieść do pewnego uniwersum zbiorów. Na przykład w teorii mnogości funkcję można traktować jako zbiór (uporządkowanych par punktów), natomiast podejście kategoryjne dopuszcza taką interpretację funkcyjnej zależności, że funkcja nie daje się przedstawić jako zbiór. W teorii kategorii pojęcia uzyskują swoje znaczenia w konkretnych układach i odniesieniach, bez nich są tylko „czystą formą". MacLane wyjaśnia to zagadnienie na przykładzie matematycznego pojęcia grupy. W języku teorii mnogości grupa G jest pewnym zbiorem elementów z wyróżnionym elementem (neutralnym), spełniającym pewne własności. „Zanurzamy" więc pojęcie grupy w pojęciu zbioru, czyli uniwersum zbiorów (pojęcie zbioru jest też wyrażone w języku zbioru). W podejściu kategoryjnym pojęcie grupy może być interpretowane w każdej kategorii (nie tylko w kategorii zbiorów). Pojęcie grupy staje się tym samym zmienne i w zależności od kategorii może to być grupa topologiczna (w kategorii topologicznej), w kategorii rozmaitości różniczkowych staje się grupą Liego. Następuje uzmiennienie pojęcia grupy i nabiera ono znaczenia dopiero w konkretnej kategorii[19].

[19] J.L. Bell, *From absolute to local mathematics*, „Synthese" 1986, nr 69, s. 409–426.

W 1963 roku F.W. Lawvere pisze, pod kierunkiem Eilenberga, doktorat *Functorial Semantics of Algebraic Theories.* Rozpatruje w nim „kategorię kategorii" oraz rozwija elementarną teorię kategorii zbiorów (czyli wyrażoną w języku logiki pierwszego rzędu). W teorii Lawvere'a nie ma pojęcia „bycia elementem zbioru" (teoria mnogości bez elementów). Pojęcie „bycie elementem" zostaje zastępuje pojęciem „składania funkcji". Pojawia się zmiana myślenia o matematyce na „myślenie o istocie matematyki w kategoriach formy (kiedy to wiodącym pojęciem jest izomorficznie inwariantna struktura), w przeciwieństwie do substancji (której odpowiadałoby rozumienie zbiorów poprzez ich elementy)"[20].

Teoria kategorii daje też nowe narzędzia do badań klasycznych zagadnień i teorii matematyki, jest narzędziem badania podstaw i uogólniania poszczególnych teorii. Przykładem przywołanym przez M. Stopę jest zastosowanie teorii kategorii do zbudowania nowych podstaw geometrii różniczkowej. W ten sposób rozwija się nowa syntetyczna geometria różniczkowa, która może okazać się kluczowa dla budowy kwantowej teorii grawitacji, a więc unifikacji fizyki (jest to próba zbudowania nowej podstawy tych teorii poprzez wspólną dla nich kategoryjną teorię toposów)[21].

Istnieje dość bliski związek między podstawowymi ideami otwierającymi nowe obszary aktywności matematycznej a nowymi tendencjami w sztuce. Ciekawie ten współczesny przełom opisuje francuski poeta i teoretyk sztuki polskiego pochodzenia **Guillaume Apollinaire** (Apolinary Kostrowicki, 1880–1918) w książce *The Beginnings of Cubism*, opublikowanej w 1912 roku.

> These painters, while they still look at nature, no longer imitate it, and carefully avoid any representation of natural scenes which they may have observed, and then reconstructed from preliminary studies. Real resemblance no longer has any importance, since everything is sacrificed by the artist to truth, to the necessities of a higher nature whose existence he assumes, but does not lay bare. The subject has little or no importance any more… Thus we are moving towards an entirely new art which will stand, with respect to painting as envisaged heretofore, as music stands to literature. It will be pure painting, just as music is pure literature… This art of pure painting, if it succeeds in freeing itself from the art of the past, will not necessarily cause the latter to disappear; the development of music has not brought in its train the abandonment of the various genres of literature, nor has the acridity of tobacco replaced the savoriness of food[22].

---

[20] M. Stopa, *Teoria kategorii i niektóre jej logiczne aspekty,* „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2018, nr 64, s. 14–15.

[21] Ibidem, s. 15.

[22] Cyt. za: J. Gray, *Platos Ghost's. The modernist transformation of mathematics*, Princeton University Press, Princeton, Oxford 2008, s. 1.

Apollinaire widzi otwieranie się nowej sztuki malarstwa, która będzie się miała tak do klasycznego malarstwa, jak muzyka w stosunku do literatury (muzyka jest to bowiem czysta literatura). To czyste malarstwa ma uwolnić się od sztuki przeszłości, jednak nie musi doprowadzić do jej zniknięcia, lecz pozwoli na uchwycenie jej ducha i podstaw. Podobnie jest z nową matematyką, wyzwala się z założeń matematyki klasycznej, jednak jej nie przekreśla, raczej pozwala na lepsze zrozumienie wcześniejszych teorii. Nowa matematyka otwiera się też na nowy wymiar uniwersalności matematyki, co wiąże się z nową odsłoną sprzeczności kulturowych. Analiza tych sprzeczności pozwoli nam uchwycić charakter otwierającego się nowego wymiaru uniwersalności matematyki, która, jak pokazywaliśmy w tej pracy, bierze udział w dyskusji nad kondycją kultury.

Mentalność i aktywność rewolucyjna w różnych postaciach jest nową realizacją rzeczywistości obecnej w micie pierwotnego chaosu. Rewolucja niszczy porządek społeczny, zrywa ciągłość rozwoju, przekreśla podstawowe wartości, dokonuje często przewartościowania. Jeśli stosujemy pojęcie rewolucji w odniesieniu do nauki, to jej rozwój staje się *de facto* iluzoryczny, a odkrycia dokonywane w nauce – kwestią przypadku. Zamiast dyskursu naukowego, dowodów i argumentów racjonalnych, zwycięża narracja ideologiczna oraz nakazów administracyjnych. Tego typu narracja wymyka się spod kontroli rozumu (chociaż przywoływane argumenty ukazywane są jako naukowe i podparte opiniami autorytetów naukowych), a ustalenia nauki przekazywane są jako nieuchronna konieczność (dyktat ideologiczny i administracyjny). Jest to parodia nauki (jej uniwersalności, dążenia do prawdy, stosowania nauki do rozwoju gospodarczego i społecznego), będąca nową odsłoną zła ukazanego w micie o fatum, niszcząca wolność nie tylko w obszarze działań naukowych. Współcześnie mamy do czynienia z utratą wartości naukowych nie przez ich zagubienie czy zniszczenie, lecz poprzez ukazanie nauki i tego, co jest dla niej istotne, jako antywartości. Nauka ukazywana jest jako główna siła odpowiedzialna za niszczenie przyrody, a ponadto teorie naukowe (bez zastosowań) przedstawia się jako niepraktyczne, a więc zbędne. Niknie konieczny komfort uprawiania nauki dla niej samej, przestaje ona być obszarem wolnej myśli, nieskrępowanej dyktatem zewnętrznych nakazów i presji. Zapomina się, że zastosowania wynikają z teorii, są z nimi nierozdzielnie złączone, jednak te zastosowania są możliwe jedynie w oparciu o teorie odpowiednio rozwinięte, zaawansowane. Tak realizowana jest nowa odsłona mitu o wygnaniu. W przypadku mitu o upadku, jako irracjonalnym wydarzeniu, mamy ukazanie nauki, jak i prawdy, do której dąży, jako form przemocy, źródło nierówności społecznej, gdyż nie każdy jest w stanie wniknąć w zawiłości teorii naukowych (*nota bene*, coraz bardziej rozwiniętych i złożonych). Mozolny rozwój człowieka w procesie edukacji, poprzez przyswajanie kolejnych elementów teorii naukowych, przestaje być wartością promowaną i pożądaną. Liczy się szybkie osiągnięcie „wiedzy", w oparciu o łatwe metody czy środki. Sugeruje się adeptom nauki, że istnieje „królewska" droga do wiedzy (matematyki) lub że każda wiedza jest równie wartościowa. Zapomina się o odpowiedzi, którą Menaichmos udzielił Aleksandrowi Macedońskiemu, gdy ten chciał szybko, na skróty, zdobyć wiedzę matematyczną – że w geometrii (której wartość jest szczególna) nie ma specjalnej drogi królewskiej, jest tylko jedna dla wszystkich, i jest to droga stopniowej i mozolnej pracy.

Jaka jest (czy będzie) odpowiedź nauki? Jakie nowe formy edukacyjne (i uprawiania nauki) wyłonione zostaną, aby rozwijające się sprzeczności kulturowe, grożące upadkiem cywilizacji, rozwiązać, przezwyciężyć? Oczywiście, nie znamy odpowiedzi na te pytania, jednak można wskazać obszary badawcze, w których takie odpowiedzi się kształtują wraz z nową formą cywilizacji. W dużej mierze te drogi pokazują nowe teorie matematyczne, omówione w skrócie wcześniej, które wykraczają poza schemat nowożytny i niosą ze sobą nowe idee.

2. Rodzący się nowy wymiar uniwersalności

Wraz z rozwojem matematyki odsłaniały się nowe wymiary rzeczywistości, związane z nowymi rodzajami doświadczeń matematycznych. W tych kolejnych odsłonach matematyka jest rozpoznawana coraz bardziej jako wiedza uniwersalna. Te nowe rodzaje doświadczeń matematycznych stały się wyznacznikiem doświadczeń dla innych rodzajów wiedzy i całej kultury. Matematyka pokazała, że rzeczywistość nie zamyka się w obszarze świata materialnego, ani nawet abstrakcyjnego czy idealnego (jako autonomicznego wobec świata zmysłowego). W kolejnym etapie (matematyki ogólnej) mamy ukazanie rzeczywistości symbolicznej i formalnej, którą matematyka konstruuje i poznaje. Dowodem na istnienie tej rzeczywistości są metody algorytmiczne, formalne procedury, matematyczne konstrukcje i modele, które są skuteczne w pozostałych wymiarach rzeczywistości (matematyczna technika, matematyczne modele świata, dowody na istnienie rzeczywistości transcendentnej). W czasach nowożytnych powoli odsłaniania była (z wielkimi oporami) rzeczywistość wielkości nieskończonych i ciągłych. Tworzone są metody badawcze ukazujące odpowiedniość między skończonością i nieskończonością oraz ciągłością i dyskretnością (rachunek różniczkowy i całkowy, geometria rzutowa, teoria liczb rzeczywistych, teoria mnogości). Odsłaniana jest w tych badaniach relacyjna struktura rzeczywistości w doskonaleniu narzędzia, jakim jest pojęcie funkcji czy relacji.

Współcześnie odkrywany jest kolejny rodzaj rzeczywistości, dopełniający poprzednie cztery. Można go nazwać wymiarem podstawowym, ukrytym, jest to rzeczywistość „bezznaczeniowa", „czysta forma", a poszczególne pojęcia uzyskują znaczenie dopiero w konkretnych odniesieniach. Jak wyjaśniałem wcześniej, przykładowo, pojęciu grupy w teorii kategorii nie można nadać jakiejś uniwersalnej charakterystyki (jak w przypadku klasycznego podejścia, gdy jest traktowana jako zbiór z pewnymi własnościami), lecz jest ono interpretowane dopiero w pewnej konkretnej kategorii jako, na przykład, grupa topologiczna, i dopiero wtedy nabiera znaczenia. Podobnie w przypadku geometrii fraktalnej możemy patrzeć na odpowiednie wzory rekurencyjne jako na generatory całej masy fraktali. Czy będziemy mieli do czynienia w przyszłości z pewnego rodzaju wiedzą „absolutną", nieuwarunkowaną, dającą możliwość absolutnej generalizacji, budowania systemów uniwersalnej optymalizacji, minimalizacji założeń i generujących struktur?

W pracy pokazywałem, że wraz z odkrywaniem kolejnych wymiarów rzeczywistości ukazywane też są dalsze aspekty uniwersalności matematyki. Od czasów matematyki konkretnej matematyka cały czas daje argumenty za tym, aby widzieć w rzeczywistości struktury harmonijne i uporządkowane. Ponadto bez wiedzy matematycznej niemożliwa jest realizacja kolejnych, coraz bardziej zaawansowanych, pomysłów technicznych, gospodarczych i handlowych (np. metody pomiarów i obliczeń niezbędne niemal we wszystkich obszarach życia). Okazuje się, że dzięki nowym ideom matematycznym możliwe staje się zharmonizowanie świata przyrody i kultury – struktury matematyczne należą do obu tych światów. Ponadto matematyka wskazuje na kolejne niezmienne i stabilne elementy w świecie, który w poznawaniu i refleksji pozamatematycznej wydaje się zmienny i niestabilny. Kolejnym istotnym elementem ukazującym siłę matematyki jest wykorzystanie jej jako narzędzia do skondensowanego zapisywania rozrastającej się wiedzy, w stosunkowo prostych formułach i algorytmach. Poprzez matematykę została ukazana siła prostych schematów i modeli w odkrywaniu prawdy.

Kiedy rozwijające się nauki przyrodnicze w czasach nowożytnych zaczęły wskazywać na matematyczność przyrody jako kluczową właściwość świata, okazało się, że matematyka „przejęła" funkcję poznawania i opisywania rzeczywistości, z której „zrezygnowała" filozofia. Szczególnie charakterystyczne jest przypisywanie modelom matematycznym cechy prawdziwości (model heliocentryczny Kopernika przyjęty przez Galileusza jako prawdziwy czy „hipotez nie wymyślam" Newtona) i przyjęcie, że poznaje ona strukturę, naturę świata. A ponieważ matematyka poznaje strukturę świata, to zaczyna ingerować (matematyzować) w różne obszary wiedzy o świecie.

Również dzięki matematyce wzrosła (i ciągle wzrasta) sprawność (moc) techniczna (w tym obliczeniowa) ludzkości. Potrzebna jest coraz większa liczba ludzi znających matematykę, a przynajmniej jej techniki obliczeniowe i algorytmiczne. I, paradoksalnie, mimo swojej technicznej formy, język matematyki stał się językiem uniwersalnym, ponadnarodowym, dzięki któremu można porozumieć się z przyrodą i z drugim człowiekiem (odpowiednio wykształconym). Staje się też narzędziem badań w naukach przyrodniczych i ekonomicznych oraz generalnie narzędziem tworzenia metod badawczych dla różnych nauk. Dlatego tak ważna jest edukacja matematyczna, i to nie tylko z tych czysto technicznych powodów. Matematyka kształtuje umysł i zdolności argumentacji, dowodzenia, daje uniwersalne podstawy myślenia, otwierając i uwrażliwiając na podstawowe elementy kultury. To w niej bowiem są obecne takie uniwersalne kategorie filozoficzne, społeczne i kulturowe, jak: harmonia, symetria, podobieństwo, odpowiedniość.

Te wskazane powyżej elementy stają się fundamentem budowanych silnych, trwałych i stabilnych cywilizacji. Do upadku cywilizacji mogą doprowadzić różne kataklizmy zewnętrzne (epidemie, powodzie, wojny, itp.) lub zanik aktywności matematycznej (spowodowany na przykład brakiem ludzi uzdolnionych matematycznie czy zainteresowanych matematyką). Są to jednak czynniki irracjonalne, w dużej mierze przypadkowe i nieprzewidywalne. Czasami same osiągnięcia cywilizacyjne (np. techniczne) mogą być wykorzystane (przez tzw. barbarzyńców) do niszczenia człowieka i kultury, co pokazały w szczególnie dramatyczny sposób wydarzenia XX wieku. Nie powinno to być jednak argumentem za ograniczeniem rozwoju nauki, gdyż zmniejszanie czynnika racjonalnego w życiu społecznym z całą pewnością nie wpłynie na podniesienie poziomu intelektualnego i moralnego.

Spróbujmy teraz nieco dokładniej scharakteryzować wyłaniający się nowy wymiar uniwersalności matematyki, związany z nowym rodzajem rzeczywistości poznawanym przez matematykę i występującymi aktualnie odsłonami sprzeczności kulturowych. Zwrócę uwagę na następujące cechy tej uniwersalności: matematyka staje się nieredukowalnym źródłem racjonalności i poznawania realności i obiektywności świata; pokazuje (w ramach metamatematyki), jak budować syntetyzującą wiedzę o świecie czy metanaukę; jest nieredukowalnym składnikiem edukacji; matematyka (w procesie rozwoju) ukazuje rolę pojęć podstawowych w kulturze i w budowaniu relacji między nauką i kulturą.

2.1. Matematyka jako źródło racjonalności

W coraz bardziej rozrastającym się kulcie irracjonalizmu, relatywizmu i subiektywizmu matematyka pozostaje kluczowym i nieredukowalnym (mimo wielu prób) źródłem racjonalności i kontaktu nauki ze światem. Pokazuje, że nie wszystkie fantazje umysłu są równie dobre, bo niektóre mogą zamykać na rzeczywistość, a wręcz negować jej istnienie. Matematyka natomiast pokazuje niekończące się bogactwo rzeczywistości. Rodzące się kolejne teorie naukowe, dzięki modelom matematycznym, odnajdują swoje podobieństwo do rzeczywistości. Podobieństwo jest jednak możliwe między obiektami odrębnymi, które mają swoją tożsamość. Dlatego nauka musi zachowywać swoją autonomię wobec świata, a z drugiej strony – musi się do rzeczywistości nieustannie odnosić – w procesach jej modelowania, interpretowania, weryfikowania, odkrywania i poznawania. Tę relację między naukami przyrodniczymi a matematyką szczególnie trafnie ujmuje K.R. Popper w swojej koncepcji racjonalizmu krytycznego i falsyfikacjonizmu. Według niego, rozwój teorii fizycznych opiera się nie na metodzie indukcji fizycznej, która z faktów poprzez uogólnianie i weryfikację prowadzi do otrzymania praw ogólnych, lecz na metodzie dedukcyjnej, w której stawiamy śmiałe hipotezy, wyprowadzamy z nich dedukcyjnie wnioski (zdania bazowe) poddawane procesom falsyfikacji. Potwierdzenie zdania bazowego umacnia teorię i przybliża ją do prawdy, a falsyfikacja prowadzi do odrzucenia przyjętych hipotez. Oczywiście, ścisła dedukcja jest możliwa w ramach matematycznego modelu, a więc matematyka jest odpowiedzialna za kontakt teorii z rzeczywistością (zdaniami bazowymi) i za przybliżanie się teorii do prawdy.

2.2. Powstanie metanauk inspirowane matematyką (metamatematyka)

Powstanie metanauk jest kolejną cechą charakteryzującą nowy wymiar uniwersalności. Przez całe wieki od powstania nauki i filozofii greckiej taką rolę pełniła filozofia, oczywiście, w pewnym tylko zakresie. Nie zawsze filozofowie byli bowiem zainteresowani refleksją nad naukami, a ponadto taka refleksja wymagała stosunkowo dobrej znajomości nauk matematycznych. W miarę rozwoju nauk matematyczno-przyrodniczych, nauki coraz bardziej „wymykały się” analizie filozoficznej. Jeszcze Newton domagał się, aby filozofia była syntezą nauk przyrodniczych, wykorzystującą ich osiągnięcia. Kilkakrotnie, już od starożytności, pojawiały się próby budowania nauk, które taką rolę miały pełnić. Taki był status dialektyki platońskiej, jak również logiki zbudowanej przez Arystotelesa i stoików, czy powstałej w czasach nowożytnych metodologii nauki czy filozofii i historii nauki. Jak opisywałem w paragrafie 3 rozdziału III, zgromadzenie przez Platona matematyków i filozofów i skłonienie ich do wspólnej refleksji nad naukami zaowocowało powstaniem platońskiego rozwoju matematyki. Podobnie było w przypadku logiki (połączonej z klasyfikacją nauk i budową ich podstaw metodologicznych) – wzrost wiedzy skutkował rozwojem wielu nauk przyrodniczym i innych.

Współcześnie pojawiają się kolejne metanauki: etyka nauki, socjologia nauki, metody organizacji i zarządzania nauką, naukoznawstwo, ale też wewnętrzna historia nauki. Ta refleksja nad nauką, poszukiwanie skutecznych i odpowiednich metod i sposobów dochodzenia do prawdy miały zawsze cztery podstawowe składniki: deskrypcyjny, eksplanacyjny, predykcyjny oraz światopoglądowy. Oczywiście, rozwój nauki domaga się od metanauk coraz bardziej rozbudowanych i wyrafinowanych metod badawczych. Pozostawanie przy starych schematach badawczych dyskwalifikuje najczęściej badania nad nowymi naukami.

Czy metanauki są potrzebne i możliwe wobec dzisiejszego bogactwa dyscyplin naukowych? Czy są w stanie ponadideologicznie ogarnąć współczesną wieżę Babel nauk? Taką możliwość tworzenia konstruktywnie działających metanauk pokazała, budowana od przełomu XIX i XX wieku, metamatematyka. Powstała ona wraz z refleksją nad podstawami matematyki (i próbami ich uściślania) oraz z rodzeniem się logiki matematycznej i teorii mnogości. David Hilbert, aby uniknąć antynomii (teorii mnogości, analizy matematycznej, rachunku prawdopodobieństwa i innych), proponował dokonać formalizacji i aksjomatyzacji matematyki, i w jej ramach dowodzić niesprzeczności systemu. Chociaż program Hilberta nie został zrealizowany, jednak doprowadził do powstania nowej dyscypliny matematycznej – metamatematyki. Jej przedmiotem stały się teorie sformalizowane i metody prowadzące do formalizacji (w tym same dowody, modele teorii, relacje między teoriami, zagadnienie obliczalności). Siłą rzeczy były wykorzystywane metody nowo powstałych teorii matematycznych: logiki matematycznej, teorii mnogości, oraz stare teorie: algebra i arytmetyka teoretyczna, które z racji swojego przedmiotu badań zawsze poruszały zagadnienia podstaw matematyki.

Istotne jest to, że metody badawcze metamatematyki wyrosły z samej matematyki (generalnie są to metody dedukcyjne) i korzystają z wyników innych teorii matematycznych, a wyniki uzyskane w metamatematyce są często wykorzystywane w wielu teoriach matematycznych. Najbardziej znane wyniki metamatematyczne to twierdzenie Gödla o niezupełności (teoria niesprzeczna zawierająca arytmetykę musi być niezupełna, a więc zawierać twierdzenia niedowodliwe), twierdzenie o dedukcji, twierdzenie Löwenheima-Skolema, metoda Gentzena o automatycznym dowodzeniu twierdzeń rachunku zdań (tzw. sekwensy Gentzena), teza Churcha-Turinga i wiele innych. Duży wkład w badania metamatematyczne mieli polscy logicy, np. A. Tarski (definicja prawdy, rozróżnienie między prawdziwością i dowodliwością w systemach dedukcyjnych i pokazanie, że generalnie pojęcia prawdy nie da się zastąpić pojęciem dowodu), A. Lindenbaum (twierdzenie o niezmienniczości pojęć logicznych przy wzajemnie jednoznacznych przekształceniach uniwersum teorii, konstrukcja algebr Lindenbauma-Tarskiego), S. Jaśkowski (formalizacja metody dedukcji, logiki parakonsystentne), A. Mostowski (prace nad teorią modeli, w tym twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego, metoda Fraenkla-Mostowskiego i udowodnienie niezależności aksjomatu dobrego porządku od aksjomatu liniowego porządku).

Twierdzenia wypracowane w ramach metamatematyki pokazują możliwości tkwiące w teoriach sformalizowanych, ale też ich ograniczenia. Okazuje się, że – w gruncie rzeczy – matematyka bada samą siebie. Potrzebna była jednak refleksja metodologiczna, która dostrzegła te elementy i narzędzia tkwiące w matematyce. Wydaje się, że jedynie nauki formalne są w stanie wytworzyć środki do badania swoich własnych teorii. Jest to swoiste domknięcie teorii sformalizowanych na badania „meta". W przypadku innych nauk pojawia się refleksja zewnętrzna realizowana przez konkretną metodologię danej nauki czy filozofię nauki[23]. Myślę jednak, że sam sposób, w jaki metamatematyka powstaje, można potraktować jako generalną metodę tworzenia innych metanauk. W przypadku etyki nauki należy dokonać metodologicznej analizy danej teorii i dostrzec zagadnienia etyczne, które się w niej znajdują.

Okazało się, że dużo problemów moralnych jest generowanych przez same teorie naukowe i ich rozwój. Oczywiście, nauka sama w sobie nie może być wartością moralną, ani nie zawiera w sobie wartości i zasad moralnych. Dane przekonanie moralne może wprawdzie skłonić uczonego do podjęcia lub zaniechania danych badań, lecz nie może wpłynąć na ich merytoryczną wartość i zawartość. Gdy patrzymy jednak na racje, na jakich nauka jest ufundowana, lub cele, do których dąży, wówczas możemy ją traktować jako

---

[23] A. Lemańska, *Matematyka – metamatematyka – filozofia matematyki,* „Studia Philosophiae Christianae" 1992, nr 28, z. 2, s. 231–239.

dziedzinę, w której występują i są realizowane pewne wartości (również etyczne). Znaczy to, że nauka jest nośnikiem dobra. Abstrahując od „czysto” wewnętrznej struktury nauki, zauważmy, że występuje ona w relacji do innych obszarów rzeczywistości: do świata przyrody, który opisuje i wyjaśnia, do obszaru zastosowań, do człowieka jako twórcy nauki, do świata kultury, do nauki jako źródła wiedzy, do metafizyki jako teorii bytu. Zwróćmy jedynie uwagę na ostatni punkt, w który mogą rodzić się zagadnienia etyczne nauki. Nauka stawia najgłębsze metafizyczne pytania i stopniowo udziela na nie odpowiedzi, demaskuje odpowiedzi fałszywe, które pojawiają się i pojawiały w filozofii. Jest to proces nieskończony. To zaangażowanie ontologiczne nauki otwiera ogromny obszar badań w ramach etyki nauki.

Podobnie jest z socjologią nauki. W samej strukturze teorii naukowej (a dokładniej – u jej podstaw) tkwią elementy związane ze współpracą uczonych, tworzeniem wspólnot, stowarzyszeń, szkół naukowych. Odkrycia rodzą się w odpowiednim „klimacie” intelektualnym, społecznym, i bez tego by nie powstały. Trzeba zauważyć, że refleksja metanaukowa (w ramach tych nauk) sprawia, że nauka staje się częścią kultury i wzmacnia potencjał człowieka. Refleksja metanaukowa usuwa sprzeczności i problemy, które generuje nauka w kulturze i w relacji człowieka do świata przyrody, i pozwala na dalszy rozwój nauk. Aktywność naukowa (dostępna wąskiej grupie specjalistów) oraz refleksja metanaukowa muszą wyprzedzać tak zwane kulturowe oddziaływanie nauki na człowieka (zmieniające jego mentalność).

2.3. Nieredukowalność matematyki w procesie edukacji

Kiedy pewne mechanizmy społeczne i gospodarcze sprawnie funkcjonują, wydaje się czasami, że można ograniczyć obecność matematyki w obszarze edukacji. Można czerpać z zasobu, który wypracowały poprzednie pokolenia. Tak było w dużym stopniu w starożytnym Rzymie, w którym korzystano z matematyki technicznej opracowanej przez Greków, ograniczając niemal do zera badania w zakresie matematyki teoretycznej, czystej (jak wiadomo, taki podział, wobec jedności matematyki, jest fałszywy). Było kilka okresów ożywienia w głównych ośrodkach imperium (przede wszystkim w Aleksandrii, I–II wiek n.e.), ale ogólnie poziom matematyki się znacząco obniżył po wspaniałym rozkwicie IV–III wieku p.n.e. Ten brak zainteresowania matematyką (a może i talentów matematycznych) u Rzymian jest zastanawiający. Byli oni jednak bardzo sprawni w zastosowaniach i do tej pory ich wspaniałe budowle i rozwiązania techniczne zadziwiają. Z czasem nastąpił upadek również w zakresie nauczania matematyki. Po koniec istnienia Cesarstwa Rzymskiego wyraźnie spadł poziom wykształcenia elit (nie mówiąc o reszcie społeczeństwa), co doprowadziło do zapaści cywilizacyjnej. Pozornie taka sytuacja nam współcześnie nie grozi wobec ogromnej liczby szkół, uniwersytetów, politechnik i innych szkół wyższych. Jednak poziom nauczania sukcesywnie spada – mimo ciągłego wzrostu poziomu scholaryzacji. Po czasach, gdy szkoły politechniczne były centami badań matematycznych, pozostało już tylko wspomnienie. Wydaje się, że wzrasta (procentowo) liczba osób, dla których matematyka staje się nauką „obcą i nieprzyjazną". Ten zanik kultury matematycznej jest groźny, a może być zlekceważony wobec ciągłego postępu technicznego. Kolejnym zagrożeniem jest oddzielanie nauk praktycznych, technicznych, ścisłych od nauk humanistycznych. Traktuje się te ostatnie jako kosztowny i w dużej mierze zbędny dodatek.

Podejmowane są jednak próby poprawy tej sytuacji, aby uwzględniając nową sytuację naukową i społeczną, zachować tradycyjne wartości i treści edukacyjne. Ciekawa jest propozycja rozwijania idei „nowego humanizmu" Georga Sartona, która ma być przezwyciężeniem opozycji dwóch kultur: klasycznego humanizmu oraz empiryczno-przyrodniczo-technicznej. W oparciu o tę ideę Michał Kokowski buduje model uniwersytetu nowego humanizmu. Nauka, jako wytwór człowieka i narzędzie budowania cywilizacji, nie wystarczy do właściwego rozwoju. Wokół niej musi budować się nowy humanizm, który wykorzystuje zdobycze nauki, pokazuje jej humanistyczne implikacje. Według Sartona, włączy on naukę powtórnie w życie i zbuduje jedną wspólnotę naukowców, filozofów, artystów i świętych. W ten sposób będzie kształtować i potwierdzać jedność ludzkości[24]. Sarton proponuje, aby rozwijać historię nauki jako dyscyplinę akademicką, co ma pomóc w realizacji tego celu. M. Kokowski proponuje, aby ten pogląd uogólnić i wprowadzić do nauczania akademickiego zintegrowane naukoznawstwo (na zachodzie znane jako *science studies*), aby

> przeciwdziałać obowiązującej w Polsce, nieznanej na świecie w takim nasileniu, technokratycznej manierze deprecjonowania humanistyki narodowej, co znajduje swój jednoznaczny wyraz w ocenie parametrycznej działalności naukowej (m.in. ocenie czasopism naukowych, a szczególnie monografii naukowych)[25].

Jak wcześniej wspomniałem, tak historia nauki, jak i naukoznawstwo należą do metanauk, charakterystycznych dla rodzącego się przełomu. Z całą pewnością muszą więc być wykorzystane w nauczaniu jako narzędzie syntetyzujące różne rodzaje wiedzy i ukazujące cywilizacyjne znaczenie nauki.

---

[24] M. Kokowski, *Uniwersytet nowego humanizmu*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2015, t. 203, nr 1, s. 20–25.

[25] Ibidem, s. 23.

Dlatego idea uniwersytetu nowego humanizmu jest jak najbardziej słuszna. Uniwersytet musi być miejscem, w którym ukazuje się pozytywne aspekty wszystkich nauk i prowadzi niczym nieskrępowany dialog na temat nauki przez przedstawicieli wszystkich dyscyplin nauki i humanistyki. W przeciwnym razie absolwenci poszczególnych kierunków będą tkwili w osobnych światach, przekonani o wyższości swojej dyscypliny i niskiej wartości innych. Historia nauki, etyka nauki, naukoznawstwo (i inne metanauki) nie tylko dają wgląd w całość nauk, ale również uczą pokory. Śledząc historię poszczególnych dyscyplin naukowych, widzimy, jak powoli były zdobywane kolejne obszary nauki i jak wiele błędów uczeni popełniali. Zresztą w tradycji polskiej kultury nauka to nie tylko anglosaskie *science*, ale również nauki humanistyczne i społeczne, i warto do tej tradycji nawiązywać. Przed laty Bogdan Suchodolski sformułował koncepcję integralnej historii nauki, która łączyła się z integralnym postrzeganiem samej nauki. Ponieważ nauka bada każdy obszar rzeczywistości (przyrodę, człowieka, kulturę, społeczeństwo), to również historia nauki powinna badać te wszystkie nauki oraz związki, jakie między nimi zachodziły bądź zachodzą. Nie tylko bada rozwój idei naukowych, teorii, metod, instytucji, stowarzyszeń naukowych, ale ukazuje też integralny charakter nauki. Wraz z pogłębianiem badań historycznych coraz bardziej widoczne są powiązania między naukami i znaczenie poszczególnych dyscyplin, widoczne staje się zmaganie nauki z twardą rzeczywistością oraz wzajemne przenikanie się myśli i bytu.

> Z tego punktu widzenia historia nauki staje się historią odrębności umysłu ludzkiego w bycie i równocześnie historią współmierności tego umysłu z naturą bytu. [...] Przeto historia nauki staje się nie tylko historią sądów i teorii naukowych, ale także historią ludzi tworzących naukę, przez naukę wychowywanych i budujących naukową cywilizację[26].

Aby dostrzec te powiązania, musimy spojrzeć na naukę z odpowiedniego dystansu i sięgnąć w przeszłość do wspólnego pnia, gdy zależności były prostsze i łatwiejsze do uchwycenia. Poznanie to spójne i harmonijne ujęcie rzeczywistości we wszystkich jej wymiarach, które pociąga za sobą rozumienie i właściwą interpretację. Poprzez kontakt z formami przeszłymi poznajemy drogi płodne nauki, ale też błędne koncepcje i ślepe uliczki[27]. Patrząc z tej perspektywy, pojęcia podstawowe w matematyce jawią się jako łączniki matematyki z kulturą.

---

[26] B. Suchodolski, *O pojmowaniu historii nauki. Z prof. drem Bogdanem Suchodolskim rozmawia Marek Arpad Kowalski,* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 1985, z. 3–4, s. 461–2.

[27] Por. I. Stasiewicz-Jasiukowa, *Zawiesić w czasie. O polskich historykach nauki i kultury*, Warszawa 2002, s. 52–58.

3. Pojęcia (idee) podstawowe w matematyce jako łączniki nauki z kulturą

Ukazując etapy rozwoju matematyki, zauważyłem, że otwierała się ona na kolejne wymiary rzeczywistości. Najpierw (w czasach babilońskich i egipskich) był to wymiar konkretności, później abstrakcyjności (od Greków), następnie ogólności (wraz z powstaniem systemu pozycyjnego i algebry), a w czasach nowożytnych – uniwersalności (nowożytnej). W czasach współczesnych matematyka otwiera się na nowy wymiar. Rodzą się teorie (np. teoria kategorii i funktorów, geometria fraktalna), które nie mieszczą się w istniejącym schemacie matematyki. Rodzi się więc nowy przełom w matematyce, którego jesteśmy świadkami, a który się jeszcze w pełni nie dokonał. Ten nowy wymiar „uniwersalności" można określić jako otwarcie na wiedzę „bezwzględną", pierwotną wobec innych nauk, będącą ich podstawą, a zarazem formalną syntezą. Wraz z każdym z tych etapów rozwojowych pojawiają się też nowe rodzaje poznawania i budowania obiektów matematycznych – konkretyzacja, abstrakcja, uogólnianie, uniwersalizacja czy optymalizacja (w tym minimalizacja założeń, aksjomatów). We wszystkich tych rodzajach poznania przejawia się matematyczna metoda analizy i syntezy w kolejnych swoich odsłonach.

Jak wskazywałem wcześniej, w matematyce konkretnej analiza polegała na badaniu rzeczywistości materialnej i rozpoznawaniu w niej harmonii i porządku, natomiast synteza to realizacja różnych konstrukcji (urządzeń technicznych, budowli) w oparciu o wiedzę matematyczną; w matematyce abstrakcyjnej analizujemy przyjęte założenia (aksjomaty, postulaty) i przeprowadzamy dowody dedukcyjne, czego efektem jest wygenerowanie abstrakcyjnego obiektu matematycznego (przy pomocy definicji czy odpowiedniej konstrukcji geometrycznej lub arytmetycznej); w matematyce ogólnej znów mamy analizę poprzednio odkrytych obszarów rzeczywistości, obejmowanych siatką pojęć ogólnych, natomiast synteza to kondensacja matematycznych działań i obiektów w algorytmach i odpowiednich symbolach; w czasach nowożytnych analiza była badaniem i matematyzowaniem nieskończoności, ciągłości, zmienności i relacji, które znalazły swój syntetyczny wyraz w konstrukcjach kolejnych uniwersalnych struktur matematycznych (struktury algebraiczne, geometryczne, topologiczne, różniczkowe). W matematyce współczesnej poddano analizie same podstawy matematyki i innych nauk (ale również dowolnych obszarów aktywności i doświadczeń człowieka, jak w teorii gier czy geometrii fraktalnej), badane są struktury, leżące u podstaw uchwycenia i zrozumienia pozostałych obiektów matematycznych, ponadto sprawdza się zakres obowiązywania metody matematycznej (w tym zagadnienie mierzalności, obliczalności) i buduje alternatywne teorie, na przykład poprzez zmianę podstawowych aksjomatów.

Do poprzednich elementów definiujących matematykę dochodzi zdolność matematyki do badania podstaw wiedzy i aktywności we wszystkich obszarach oraz budowania uniwersalnych syntez. Matematyka sprawia, że poprzez jej struktury możemy bez sprzeczności myśleć o rzeczywistości, a jej obiekty (liczby, formy geometryczne, algebraiczne) są *de facto* pierwotnymi przedmiotami naszego myślenia i pozwalają widzieć racjonalność rzeczywistości we wszystkich jej wymiarach (materialnym, idealnym, ogólnym, relacyjnym, formalnym). Ponadto stało się jasne, że ukształtowany w czasach średniowiecznych i nowożytnych język symboliczny nie jest jedynym językiem matematyki (jak się powszechnie uważa). Matematykę możemy uprawiać również przy pomocy innych środków.

Przez cały okres dziejów pojęcia podstawowe odgrywały w matematyce rolę szczególną. Te pojęcia (kategorie) mają ogólnokulturowy charakter, są obecne u podstaw matematyki, uzyskują w matematyce swoją konkretną realizację i stanowią generatory tych matematycznych realizacji. Przyjrzyjmy się ich roli na przykładzie, wspominanych już wcześniej, pojęć odpowiedniości, harmonii, podobieństwa i symetrii. Są one właściwie metapojęciami, ogólnymi kategoriami, które pokazują, w jaki sposób matematyka (jak i cała nauka) utrzymuje łączność z kulturą i jest obecna i w świecie przyrody, i w innych wymiarach rzeczywistości. Dzięki nim możemy obserwować wzajemne oddziaływanie tych wytworów aktywności człowieka. Mimo w dużej mierze technicznego charakteru matematyki te pojęcia nie tracą w matematyce swoich filozoficznych i kulturowych znaczeń, sensów i odniesień. W matematyce pełnią rolę pojęć podstawowych (nad którymi inne są nadbudowane), pozwalają na tworzenie kolejnych generalizacji (ale też konkretyzacji) i pokazują wewnętrzną zgodność poszczególnych działów matematyki oraz są źródłem jej jedności.

Spójrzmy teraz na przykłady ich obecności w matematyce. Jak pokazały przeprowadzone analizy, matematyka w trakcie rozwoju rozszerzała dziedzinę swoich badań, pojawiały się nowe dyscypliny matematyczne, obiekty i metody. Rozszerza się zakres rzeczywistości badanej przez matematykę, a wręcz ta rzeczywistość mogła być dopiero dostrzeżona i rozpoznana dzięki nowym metodom matematycznym. W naturalny też sposób pojęcia te konfrontowane są z sytuacjami antykulturowymi, w swoich kolejnych odsłonach wyrażonymi w czterech mitach: micie pierwotnego chaosu, upadku, tragicznego losu oraz duszy wygnanej.

W przypadku mitu pierwotnego chaosu pojawiają się kolejne aspekty harmonii (Kosmos, Mikrokosmos, uporządkowany świat matematyki, nauki); mit upadku staje wobec idei symetrii, określającej zgodność części składowych między sobą i tworzonej przez nie całości (w każdym człowieku jest obecna ukryta prawda, te poszczególne prawdy są zgodne między sobą i z Prawdą); mit duszy wygnanej staje wobec idei podobieństwa (budujemy świat inny niż świat idealny, z którego zostaliśmy wygnani, inny też od świata realnego, a jednak podobny do obu), a fatum jest neutralizowane przez ideę odpowiedniości (między przyjętymi założeniami a udowodnioną tezą oraz pomiędzy poszczególnymi krokami dowodowymi istnieje odpowiedniość, która sprawia, że rozumowanie dedukcyjne prowadzi w sposób racjonalny i kontrolowany przez umysł do jednoznacznych wniosków).

Zacznijmy od pojęcia odpowiedniości, które, poczynając od matematyki konkretnej, przyjmowało kolejne wymiary uniwersalności i „nasycało się" kolejnymi aspektami rzeczywistości.

U podstaw odkrycia pojęcia liczby było spostrzeżenie, że między poszczególnymi liczbami a rzeczami istnieje odpowiedniość, oraz że między niektórymi grupami nawet całkiem różnych przedmiotów istnieje odpowiedniość – mają tę samą liczebność, moc (np. grupa trzech kamieni odpowiada grupie trzech ptaków). Dotyczyło to również odkrycia form geometrycznych: formy geometryczne pojawiły się jako wynik spostrzeżenia, że konstruowane przez człowieka kształty odpowiadają (lub mogą odpowiadać) pewnym kształtom w przyrodzie. Okazało się, że pewne własności można przenosić między różnymi obszarami bez niszczenia ich podstawowych własności. Sama idea pomiaru opiera się na spostrzeżeniu, że istnieje odpowiedniość między liczbami i obiektami geometrycznymi a obiektami fizycznymi, i odwrotnie. Ustalając, przykładowo, pewien wzorzec miary (na przykład odcinek, kwadrat, sześcian), możemy go odnieść do danych obiektów fizycznych i znaleźć odpowiednią liczbę. Najczęściej dany pomiar jest możliwy jedynie z pewną dokładnością, gdyż, na przykład, dany odcinek jednostkowy (wzorcowy) nie mieści się dokładnie w danej mierzonej wielkość.

W okresie abstrakcyjnym ujawniana była odpowiedniość między samymi obiektami matematycznymi (liczbami, figurami geometrycznymi), co prowadziło do sformułowania twierdzeń matematycznych. W twierdzeniu Talesa [jeśli kąt przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to: 1) stosunki odpowiednich boków są równe; 2) odpowiednie kąty są równe] równym kątom odpowiadają równe stosunki odpowiednich boków. W podstawowym twierdzeniu arytmetyki (każdą liczbę naturalną można jednoznacznie rozłożyć na czynniki pierwsze) ujawnia się kolejna interesująca zależność (odpowiedniość): każdej liczbie odpowiada pewien układ liczb pierwszych (np. liczbie 4389, i tylko jej, układ: 3, 7, 11, 19).

W kolejnym okresie dziejów matematyki ogólnej idea odpowiedniości jest realizowana poprzez teorię proporcji i równania (odpowiedniość występuje między dowolnymi elementami, które realizują daną proporcje czy równanie). Następuje znaczące rozszerzenie obiektów, które sobie „odpowiadają". Dostrzeżono, że pomiędzy pewnymi działaniami i twierdzeniami matematycznymi istnieje odpowiedniość, co doprowadziło do sformułowania różnych algorytmów. Przykładowo, spostrzeżono, że procedura dzielenie liczb z resztą może być rozszerzona i sformułowana w postaci algorytmu Euklidesa. Odpowiedniość dotyczy teraz wyższego stopnia abstrakcji: już nie obiektów abstrakcyjnych, lecz operacji wykonywanych na tych obiektach. Algorytm ten daje duże możliwości, między innymi pozwala na rozróżnienie wielkości na współmierne i niewspółmierne, otwiera też drogę do powstania ułamków ciągłych (łańcuchowych, nieskończonych).

Stało się to jednak dopiero w kolejnym okresie dziejów (uniwersalizmu nowożytnego), gdy nieskończoność stała się obiektem badań matematycznych. Poza ułamkami ciągłymi były to szeregi nieskończone, zjawisko ciągłości, granicy, continuum. Pojawiła się odpowiedniość między tym, co skończone, a tym, co nieskończone, np. zauważono, że nieskończone szeregi mogą dawać skończoną sumę. Najbardziej charakterystycznym przykładem matematycznej realizacji idei odpowiedniości jest pojęcie funkcji (które kształtowało się przez cały okres nowożytny) pozwalające ustalać odpowiedniość między dowolnymi obiektami, klasami obiektów, zbiorami, strukturami, itd.

Również ustalenie odpowiedniość między stosunkami liczb a liczbami doprowadziło do wygenerowania nowych liczb (wymiernych). Okazało się, że na stosunkach można wykonywać operacje arytmetyczne jak na liczbach naturalnych. Można też ustalić w prosty sposób równość dwóch stosunków: dwa ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{m_1}{n_1}$ są równe, jeśli $mn_1 = nm_1$. W ten sposób powstaje nowy rodzaj obiektów matematycznych, a liczby naturalne można traktować jako ich rodzaj. Oczywiście, nie wszystkie własności liczb naturalnych przenoszą się na nowe liczby, np. liczby wymierne nie mają własności posiadania bezpośredniego następnika, oraz nie zachodzi własność, że każdy podzbiór liczb posiada liczbę najmniejszą. Te powyższe własności liczb naturalnych są podstawą bardzo silnego środka dowodowego, jakim jest zasada indukcji matematycznej (zupełnej). Jest to argument za tym, że tworząc nowe liczby, nie możemy zrezygnować ze starych. Arytmetyka liczb naturalnych nadal zachowuje swoje znaczenie. Metoda indukcji zupełnej pozwala dowodzić istnienia pewnych własności dla dowolnej klasy obiektów, które możemy ponumerować liczbami naturalnymi (lub innymi, które posiadają te dwie własności). Składa się ona z dwóch etapów:

(A) sprawdzamy, czy dana własność *W* jest prawdziwa dla obiektu o numerze 1;

(B) dowodzimy, że spełnianie własności *W*, przez dowolny obiekt o numerze *n*, pociąga za sobą spełnianie tej własności przez obiekt o numerze $n + 1$.

W oparciu o etapy (A) i (B) wnioskujemy, na mocy indukcji zupełnej, że własność *W* jest prawdziwa dla wszystkich obiektów. Ta metoda dowodzenia matematycznego nie była znana starożytnym, pojawiła się dopiero w czasach nowożytnych, w pracach Pascala i Bernoulliego. Jest też charakterystyczna dla okresu nowożytnego, gdyż *explicite* korzysta z nieskończoności. „Dostrzega" odpowiedniość między kolejnymi liczbami naturalnymi (własność liczby *n* przechodzi na liczbę następną) i tę przechodnią własność przenosi na nieskończoną całość. Istnieje więc odpowiedniość między operacją tworzenia kolejnych elementów nieskończonego ciągu a całością, którą ten nieskończony ciąg tworzy. W przypadku kolejnych rozszerzeń pojęcia liczby również korzystamy z idei odpowiedniości. Przypomnijmy, że postulat Eudoksosa zakładał, że dowolna liczba może być rozumiana jako stosunek pewnych dwóch odcinków. Ten postulat można rozszerzyć na dowolne liczby rzeczywiste (na przykład $\sqrt{2}$ jest stosunkiem dwóch odcinków – przekątnej kwadratu i jego boku). W wieku XIX Dedekind podjął ideę Eudoksosa i w pracy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* z roku 1872[28] założył istnienie odpowiedniości między przekrojami liczb wymiernych a punktami na prostej czy liczbami. Zauważył, że trzem własnościom prostej geometrycznej odpowiadają trzy analogiczne własności prostej wymiernej:

1. Dla trzech punktów (liczb) *a, b, c*, jeśli *a* jest na prawo od *b*, *b* na prawo od *c*, to *a* jest na prawo od *c*.
2. Dla dowolnych punktów (liczb) *a* i *c* istnieje nieskończenie wiele punktów (liczb) między nimi.
3. Punkt (liczba) *p* dzieli punkty (liczby) prostej na dwie klasy: klasę P_1 punktów (liczb) na lewo od *p* i klasę P_2 punktów (liczb) na prawo od *p*.

Własność 3. nosi nazwę „podziału Dedekinda". W przypadku liczb istnieją podziały niewyznaczone przez liczby wymierne i te podziały można traktować jako liczby niewymierne. Wówczas otrzymujemy pełną odpowiedniość między prostą geometryczną a liczbami rzeczywistymi (liczby wymierne wraz z niewymiernymi).

---

[28] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Leipzig 1872.

Podobnie Cantor, w pracy wydanej w tym samym, 1872 roku[29], ustala odpowiedniość między ciągami fundamentalnymi liczb wymiernych[30] a punktami prostej geometrycznej. Każdemu z takich ciągów przypisuje symbol (*Zeichen*), który nazywa jego granicą. Dopiero po określeniu porządku (liczbowego) i działań arytmetycznych na tych symbolach nazywa je liczbami (*Zahlengrössen*). Zauważa, że można określić przyporządkowanie – każdej tak zdefiniowanej liczbie – punktu z prostej (geometrycznego *continuum*). W przypadku liczb wymiernych a_n, przy ustalonym początku i jednostce na osi liczbowej, punktowi p odpowiada wymierna odległość tego punktu od początku. Pozostałe punkty prostej mogą być osiągnięte przy pomocy odpowiedniego ciągu liczb wymiernych $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$, który przybliża dany punkt dowolnie blisko. Ten ciąg można traktować jako liczbę rzeczywistą, czyli każdemu punktowi na prostej odpowiada dokładnie jedna liczba. Przyporządkowanie w drugą stronę jest regulowane odpowiednim aksjomatem: „Dla każdej liczby istnieje określony punkt na prostej, którego współrzędna jest równa temu punktowi”[31].

Odpowiedniość realizowana w czasach współczesnych może dotyczyć tak różnych elementów, jak absolutność i lokalność, czysta forma i pojęcie posiadające znaczenie. Odpowiedniość wchodzi na jeszcze bardziej abstrakcyjny poziom: zestawia ze sobą elementy nieobiektowe i obiektowe, czysto formalne i będące nośnikami znaczeń, uniwersalne i lokalne, absolutne i względne.

Chciałbym na koniec przywołać opinię Wacława Sierpińskiego na temat odpowiedniości, korą przedstawił w swoim wykładzie habilitacyjnym. Uważa pojęcie odpowiedniości za jedno z najważniejszych pojęć matematycznych, które jest osnową myślenia, podstawą konstrukcji innych pojęć oraz źródłem pomysłów. Kieruje nas ono do badania zależności między przedmiotami, pozwalając na abstrahowanie od samych tych przedmiotów, byle zachowane zostały odpowiednie zależności. Wystarczy, że zbadamy zależności między elementami danego modelu, który odpowiada jakiemuś fragmentowi świata materialnego, a tym samym poznajemy zależności obowiązujące w świecie. Podkreśla, że praktyczne znaczenie matematyki polega na stosowaniu pojęcia odpowiedniości[32]. Przypisuje mu więc Sierpiński rolę

---

[29] G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen,* „Mathematische Annalen” 1872, t. 5, s. 123–132.

[30] Nieskończony ciąg $a_1, a_2, \dots a_n$ …nazywa się ciągiem fundamentalnym, jeśli istnieje liczba całkowita N taka, że dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej ϵ mamy dla dowolnych m i dla wszystkich $n > N$.

[31] Ibidem, s. 128.

[32] W. Sierpiński, *Pojęcie odpowiedniości w matematyce,* „Przegląd Filozoficzny” 1909, R. 12, z. 1, s. 8–19.

matematycznego *arche*, i rzeczywiście – takie znaczenie ono posiada, podobnie jak pojęcia harmonii, podobieństwa i symetrii.

Jak wiemy, słowo harmonia oznacza współbrzmienie i zgodność elementów tworzących pewną całość i stało się ono centralnym pojęciem w koncepcji filozoficznej pitagorejczyków. Cały świat charakteryzował się, według nich, doskonałą harmonią (był więc Kosmosem), a w oparciu o ideę harmonii (która stanowiła arche) można było tłumaczyć poszczególne zjawiska zachodzące w świecie. Dzięki pojęciu harmonii pojawia się zagadnienie matematyczności przyrody (świat jako Kosmos, zbudowany zgodnie z matematyką) oraz matematyzacji (rozpoczęty przez Galileusza proces matematyzacji ruchu oraz pozostałych zjawisk fizycznych). Również samo rozumienie liczb, jako budujących harmonię i porządek, ma swoje odniesienie do tego pojęcia. Podstawowym wstrząsem otwierającym drogę matematyki było poznanie harmonii bytu poprzez odkrycie zgodności między matematycznymi konstrukcjami umysłu a rzeczywistością. W szkole pitagorejskiej pojęcie harmonii uzyskało znaczenie matematyczne, harmonię możemy bowiem poznawać i tworzyć dzięki liczbie i proporcjom liczbowym. Pojawiło się w teorii harmonii muzycznej jako proste proporcje liczbowe ujmujące długość strun, które współbrzmią harmonijnie. Kluczową rolę w rozumieniu harmonii pełni słowo „proste". Harmonię muzyczną tworzyły bowiem stosunki **najprostszych** liczb (czyli liczb 2, 3 i 4). Były to: oktawa (4:2), kwinta (3:2) i kwarta (4:3). Oznacza to, że równoczesne uderzenie dwóch strun o długościach pozostających w powyższych proporcjach daje dźwięk harmonijny, miły dla uszu. Podobnie w kosmologii platońskiej, świat utworzony jest z pięciu wielościanów foremnych, cechujących się prostotą konstrukcji (ponadto istnieje tylko pięć takich wielościanów). Świat czerpie swą harmonię i piękno z harmonii tych geometrycznych brył. Jedną z realizacji harmonii była proporcja matematyczna, a najbardziej harmonijne i piękne były te proporcje i stosunki, które charakteryzują się prostotą. Najprostsza jest tak zwana złota (boska) proporcja utworzona jedynie z dwóch wielkości (generalnie potrzebne do utworzenia proporcji są cztery). Mówiono, że stosunek danej wielkości do jej części większej równa się stosunkowi części większej do pozostałej, mniejszej. Proporcja stała się podstawą opracowania kanonów architektury i sztuki[33]. Również ta proporcja jest powszechnie realizowana w przyrodzie[34].

---

[33] Dokładna analiza tego zagadnienia występuje na przykład w: M.C. Ghyka, *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, Universitas, Kraków 2001.

[34] Występuje często wśród organizmów żywych, na przykład ciało człowieka (cechujące się pięknem) zbudowane jest zgodnie z tą proporcją (pępek stanowi punkt złotego podziału

W języku matematyki symbolicznej, ogólnej, możemy tę proporcję zapisać w następujący sposób: $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Jeśli wprowadzimy oznaczenie $\rho=\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}$, to otrzymamy $\rho=\frac{1}{\frac{1}{\rho}}=\frac{1}{1+\rho}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{\rho}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\rho}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$. Jest to ułamek łańcuchowy wyrażający stosunek ρ, a więc złotą proporcję. Wielkość ρ wyrażona jest przez „**najprostszy**" ułamek łańcuchowy utworzony z samych jedynek. Tym samym pojęcie harmonii, ujęte w postaci „złotego cięcia", uzyskuje swoją reprezentację w matematyce ciągłościowej. Ponadto można na ten wzór spojrzeć jak na czysto formalny wzór generujący strukturę fraktalną. Przykładowo, przekątne w pięciokącie foremnym przecinają się w punktach dzielących te przekątne złotym podziałem. Punkty przecięcia tworzą wewnątrz mniejszy pięciokąt foremny, a tę procedurę możemy kontynuować w nieskończoność. Tego typu fraktalnej realizacji złotego podziału jest bardzo wiele.

Idea podobieństwa, jako kolejne matematyczne *arche,* jest związana z przyjęciem istnienia odrębnych bytów i ustala odpowiednie relacje między nimi. Pozwala budować pojęcia, struktury i modele matematyczne, które ujmują te relacje, w końcu opisują i modelują rzeczywistość. Mimo odrębności, jesteśmy w stanie przypisać obiektom pewne istotne cechy „wspólne", określające ich podobieństwo. Te cechy wspólne mogą być częścią każdego z tych obiektów, ale zasadniczo mają jakby „drugą naturę" jako byty niezależne i abstrakcyjne, łączące te konkretne obiekty w pewną nową całość. W przypadku całkowicie odrębnych bytów pojawia się jedynie „formalny" aspekt podobieństwa, jak mamy w platońskiej koncepcji tworzenia świata przez Demiurga z dwóch „światów" – idei oraz pramaterii. Podobieństwo między tymi światami budowane jest przez byty matematyczne.

Pierwszą matematyczną „nieoczywistą" realizacją idei podobieństwa jest podobieństwo trójkątów (i w konsekwencji dowolnych wielokątów). Wskazuje się na pewne własności figur, które to podobieństwo zapewniają (równość kątów czy proporcjonalność boków). Niektóre rodzaje figur są do siebie zawsze podobne (odcinki, koła, wielokąty czy wielościany foremne) i mają one szczególne znaczenie, na przykład jako jednostki pomiarowe czy składowe pewnych konstrukcji. W kolejnym etapie pojawia się ogólne pojęcie i reguła pozwalająca ustalać formalnie podobieństwo między poszczególnymi wielokątami (czy innymi obiektami) – jest to skala (stosunek) podobieństwa wyliczany w oparciu o stosunki odpowiednich boków (czy gene-

długości ciała, podstawa kolana części dolnej, miejsce połączenia szyi i tułowia części górnej, itd.).

ralnie odpowiednich odcinków). Matematyczna koncepcja podobieństwa pozwala na konstrukcję map i modeli podobnych do rzeczywistych obiektów. Pojęcie podobieństwa można też rozszerzać na dowolne zjawiska i obiekty poprzez pojęcie „liczby podobieństwa". Porównujemy wtedy charakterystyczne dla nich wielkości i ich stosunki (dla wielokątów tymi wielkościami są właśnie długości boków). Liczby podobieństwa są bezwymiarowymi wielkościami fizycznymi, które otrzymujemy jako stosunek wielkości mierzalnych, i to one określają podobieństwo danych obiektów czy zjawisk[35]. W ten sposób idea podobieństwa w jej matematycznej formie jest realizowana w naukach technicznych i pozwala na budowanie laboratoryjnych modeli i przenoszenie otrzymanych tam wyników do rzeczywistości (zastosowania technologiczne i przemysłowe). Istnieje bardzo dużo różnych liczb podobieństwa: podobieństwo kinematyczne pól fizycznych, podobieństwo układów dynamicznych. Podobieństwo dynamiczne układów określa liczba Newtona $N_e = \frac{Ft}{mv}$ (stosunek popędu Ft danego układu do jego pędu mv), a podobieństwo hydrodynamiczne – liczba Eulera $E_u = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ (stosunek różnicy ciśnień Δp, w dwóch charakterystycznych punktach przepływu, do iloczynu gęstości płynu ρ i kwadratu prędkości przepływu)[36].

W wymiarze matematyki uniwersalnej porównujemy poszczególne struktury różnych dyscyplin matematycznych i znajdujemy podobieństwo między poszczególnymi kategoriami, na przykład między kategoriami miarowymi (teoria miary), topologicznymi, teoriomnogościowymi, algebraicznymi, geometrycznymi. Pomysł Kartezjusza zbudowania geometrii analitycznej był zakorzeniony w tej idei i budował podobieństwo między geometrią a arytmetyką. W algebrze Boole'a odkryta została dualność (podobieństwo) między prawami działań na zbiorach a prawami rachunku zdań. Podobnie w geometrii rzutowej obowiązuje zasada dualności, która pozwala w prosty sposób generować nowe twierdzenia przez zastąpienie pojęć „punkt" i „prosta" miejscami. W książce *Measure and Category* ukazane są liczne twierdzenia dualne, odpowiednio w teorii miary i w topologii (gdzie teoriomiarowe pojęcie „zbiór miary Lebesgue'a dodatniej" odpowiada w topologii pojęciu „zbiór II kategorii Baire'a; intuicyjnie są to zbiory „duże")[37].

---

[35] Por. L. Müller, A. Wilk, *Teoria podobieństwa w badaniach modeli fizycznych i matematycznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.

[36] Dokładniejszą analizę tego zagadnienia przedstawiam w pracy: W. Wójcik, *Obecność pojęć „optymalnych" w matematyce jako argument za matematycznością przyrody*, [w:] *Ponad demarkacją*, red. W. Kowalski, S. Wszołek, Tarnów 2008, s. 39–62.

[37] J.C. Oxtoby, *Measure and Category,* Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin 1980.

Takimi twierdzeniami dualnymi są np. twierdzenie Steinhausa i twierdzenie Picarda o sumie algebraicznej zbiorów (twierdzenie Steinhausa jest ogólniejsze)[38].

Czwartą z omawianych idei podstawowych jest symetria. W starożytnej Grecji terminu tego używano do określenia prawidłowości, która polega na „właściwej proporcji elementów stanowiących składniki danej struktury, jak i na właściwym stosunku części struktury do jej całości"[39]. Symetria odnosi się również do pojęć miary, umiaru, równowagi, określa stan równowagi układu, daleki od skrajności. Jest to zasada pozwalająca ustanawiać zgodność części, dzięki której tworzą one całość. Co ciekawsze, w najdawniejszych czasach greckich synonimem słowa symetria był termin harmonia. Analogiczna sytuacja występuje w odniesieniu do słowa podobieństwo, przy pomocy którego określano symetrię jako podobieństwo części pewnej całości między sobą i w stosunku do tej całości. Również bardzo blisko tych trzech terminów jest słowo odpowiedniość – ona również tworzy harmonię między rzeczami, które sobie odpowiadają. Na poziomie intuicyjnym rozróżnienie tych terminów, idei, jest właściwie niemożliwe – są one ściśle od siebie zależne i się nawzajem określają. Różnice między nimi wyłaniają się dopiero w trakcie rozwoju matematyki, kultury, gdy uzyskują konkretne realizacje.

Jednym z ważniejszych odkryć w historii cywilizacji był wynalazek koła. Jednak u jego podstaw tkwi odkrycie idealnej symetrii koła (chodzi o ideę symetrii, a nie odpowiedniości, podobieństwa czy harmonii). To symetria koła sprawia, że można przemieszczać duże ciężary przy użyciu stosunkowo małej siły; i podobnie jest w przypadku innych wynalazków: im doskonalsza symetria konstruowanych kół, tym sprawniej działa (i jest bardziej stabilny) pojazd kołowy, kołowrotek, tokarka, żarna obrotowe, itp. W okresie matematyki abstrakcyjnej pojawia się twierdzenie, które tę doskonałą symetrię koła ujmuje: (każda) średnica dzieli koło na dwie równe części. Średnica jest osią symetrii koła, wobec tego koło ma nieskończenie wiele osi symetrii (na tym polega doskonałość jego symetrii). Na tym twierdzeniu oparta jest metoda poszukiwania figur symetrycznych: im więcej takich osi czy płaszczyzn (w przypadku brył), tym figura bardziej symetryczna. Te idealne symetrie matematyczne możemy rozpoznawać w przyrodzie, gdzie występują z pewnym przybliżeniem, np. symetria dwuboczna ciała ludzkiego. Na poziomie matematyki ogólnej pojawiają się ogólne reguły i działania określające czy

---

[38] Twierdzenie Steinhausa: Jeśli $A, B \subset R$ są zbiorami o mierze Lebesgue'a dodatniej, to $A + B = \{a + b \colon a \in Aib \in B\}$ zawiera odcinek. Twierdzenie Picarda: Jeśli zbiór $A \subset R$ jest zbiorem II kategorii Baire'a, to $A + A = \{a + b \colon a, b \in A\}$ zawiera odcinek.

[39] J. Gajda, *Koncepcje symetrii w filozofii starożytnej*, s. 11.

generujące figury symetryczne, jak: symetria osiowa, środkowa, płaszczyznowa, walcowa, symetryczna, obrotowa czy translacyjna. Te kolejne przykłady, mimo że ukazujące ogólne reguły budowania figur symetrycznych, nie dawały narzędzia uniwersalnego, które mogłoby służyć do rozpoznawania struktur symetrycznych w sposób generalny. Dopiero algebraiczne pojęcie grupy, które pojawiło się w matematyce w XIX wieku, dawało taką możliwość. Czym jest struktura grupy? Jest to „trójka” $(G, e, \circ)$, składająca się ze zbioru G, elementu neutralnego e oraz działania grupowego $\circ$, spełniająca własności: 1. $\forall a, b (a \circ b) \in G$ (wewnętrzność); 2. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e$ (odwracalność); 3. $\forall a \in G (a \circ e = e \circ a = a)$ (własność elementu neutralnego); $\forall a, b, c \in G (a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$ (łączność). Ideę symetrii można uchwycić przy pomocy pojęcia automorfizmu, a więc przekształcenia (funkcji) wzajemnie jednoznacznego przestrzeni w siebie zachowującego wewnętrzną strukturę. Okazuje się, że automorfizmy (wraz z działaniem składania odwzorowań i przekształceniem identycznościowym) tworzą grupę przekształceń. W jaki sposób automorfizmy łączą się z pojęciem symetrii? Jeśli mamy figurę F w danej przestrzeni i automorfizmy, które zachowują tę figurę bez zmian, to tworzą on grupę, która opisuje symetrię figury F[40]. Wobec ogromnych zastosowań (obecności) grup przekształceń w nauce (i nie tylko) Hermann Weyl postawił hipotezę, że każda symetria związana jest z pewną grupą przekształceń[41]. Przykładowo, symetria polegająca na nierozróżnianiu elementu danego układu (np. zbioru położeń danej cząstki) związana jest z grupą permutacji, a w geometrii euklidesowej nierozróżnialne są te figury, które można przekształcić na siebie przy pomocy izometrii[42]. Z tego typu spostrzeżeń bierze się program Feliksa Kleina, zalecający, aby sklasyfikować różne geometrie w oparciu o grupy przekształceń i ich niezmienniki. Ponadto formułuje Weyl pewną metazasadę, dającą kryterium do badania symetrii w różnych zjawiskach: „Jeżeli warunki, które jednoznacznie określają jakieś zjawisko, mają pewną symetrię, wówczas w tym zjawisku przejawia się ta sama symetria”[43]. Ta zasada jest powszechnie stosowana w naukach, a opiera się na idei symetrii. Chcąc zmatematyzować po-

40 H. Weyl, *Symetria*, tłum. S. Kulczycki, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 43–47.

41 Ibidem, s. 121–142.

42 Ponieważ izometrie tworzą grupę przekształceń, można traktować geometrię euklidesową jako opartą na grupie izometrii i badającą niezmienniki tej grupy. Na tej podstawie Felix Klein podaje propozycje klasyfikacji geometrii w oparciu o grupy przekształceń i ich niezmienniki. W przypadku mechaniki Newtona mamy do czynienia z przestrzenią afiniczną, w której niezmiennikami są ruchy inercjalne zachowywane przez tzw. przekształcenia Galileusza.

43 H. Weyl, *Symetria*, op. cit. s. 123.

jęcie prawdopodobieństwa, zakładamy, że u jej podstaw tkwią podstawowe własności liczbowe. Dobrym przykładem jest dokonana przez Steinhausa matematyzacja gry w orła i reszkę. W celu realizacji tego zadania interpretuje nieskończone rzuty monetą jako ciągi zero-jedynkowe i interpretuje je jako liczby rzeczywiste z przedziału [0, 1] w zapisie dwójkowym, natomiast zdarzenia losowe są podzbiorami zawartymi w tym odcinku (Steinhaus zakłada, że te podzbiory są mierzalne w sensie Lebesgue'a). Wówczas można wykorzystać teorię miary do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń[44]. Do prawidłowego obliczania prawdopodobieństw zdarzeń związanych z rzutami monetą trzeba przyjąć jeszcze dwa założenia:

1) moneta jest „uczciwa", a więc wypadnięcie orła i reszki jest tak samo prawdopodobne i wynosi $\frac{1}{2}$;
2) kolejne rzuty są niezależne od siebie (jest to tak zwana niezależność stochastyczna[45] zdarzeń opisywana równaniem: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, gdzie A i B są zdarzeniami niezależnymi).

W przypadku ciągu n niezależnych rzutów monetą otrzymamy: $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}$. Jest to prosta zależność z rachunku prawdopodobieństwa, która jest identyczna, jak udowodniona przez E. Borela dla liczb[46]. Wykazał on, że prawie każda liczba t z przedziału [0;1] (tj. każda t za wyjątkiem pewnego zbioru o mierze Lebesgue'a równej zeru) ma asymptotycznie tę samą liczbę zer i jedynek w swoim rozwinięciu dwójkowym. Okazuje się więc, że twierdzenie arytmetyczne ma swój odpowiednik probabilistyczny. „Tajemnicza" więź łączy te dwie, wydawałoby się, tak odległe dziedziny matematyki. Ta sama reguła obowiązuje w arytmetyce, jak i w teorii prawdopodobieństwa. Dotarliśmy do pewnej ukrytej symetrii łączącej arytmetykę i matematykę przypadku (rachunek prawdopodobieństwa) i pokazaliśmy, że harmonia rozpoznawana przez wieki w arytmetyce jest również obecna w nowej teorii prawdopodobieństwa[47].

---

[44] Por. K. Urbanik, *Idee H. Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa,* „Wiadomości Matematyczne" 1973, nr 17, s. 39–50.

[45] Związane z niezależnością funkcje stochastyczne stały się przedmiotem badań w programie badawczym Steinhausa i jego ucznia Marka Kaca. W latach 1936–1940 ukazała się w „Studia Mathematica" seria sześciu prac (napisanych wspólnie), poświęconych stochastycznej niezależności.

[46] M. Kac, *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, vol. 12, The Mathematical Association of America, New Jersey 1959, s. 15–18; 21–34.

[47] Por. W. Wójcik, *The problem of intuition in mathematics in the thoughts and creativity of selected Polish mathematicians in the context of the nineteenth-century breakthrough in mathematics*, „Ruch Filozoficzny" 2019, t. 75, nr 4, s. 173–176.

W otwierającym się nowym wymiarze uniwersalności w czasach współczesnych idea symetrii ma swoje szczególne miejsce. Geometria fraktalna odkrywa symetrie ukryte w pozornie chaotycznych strukturach (dlatego często nazywa się ją teorią chaosu). W teorii kategorii mamy przejście na wyższy stopień abstrakcji i uzmiennienia. Zmiennymi stają się struktury, w tym struktura grupy.

Jak wiemy, Weyl założył, że każda symetria związana jest z pewną grupą przekształceń. W teorii kategorii nie można nadać pojęciu grupy charakterystyki – nie jest zbiorem z pewnymi własnościami, lecz czystą formą. Przekształcenia są strzałkami, które nie potrzebują zbiorów, aby „działać". Odwołanie do „elementów" grupy zostaje zastąpione przez sformułowanie strzałkowe, a interpretacja pojęcia „grupa" jest możliwa w każdej kategorii (topologicznej, różniczkowej, geometrycznej, itd.). Grupa nabiera znaczenia dopiero w danej kategorii, jest maksymalnie formalna i niejednoznaczna. Z pojęcia grupy pozostaje tylko sama forma bez struktury (struktura zostaje uzmienniona). W tak abstrakcyjnym rozumieniu grupy również symetria pokazuje swoją maksymalnie ogólną (a zarazem podstawową) formę. Odnosi się bowiem do wszystkich możliwych interpretacji formy grupy, a więc do wszystkich struktur, gdzie automorfizmy grupy są realizowalne.

4. Struktura obiektów matematycznych

Omówione cztery pojęcia podstawowe odnoszą się do całej rzeczywistości, ujmują jej całokształt, pełnią rolę *arche*, najbardziej pierwotnych elementów, prapostaci bytu. Na wyższym poziomie ontycznym pojawiają się kolejne elementy, które, jak w koncepcji pitagorejskiej, mają dualny charakter (są sobie parami przeciwstawne): struktura liczbowa, dyskretna (continuum), nieciągłość (ciągłość), skończoność (nieskończoność), wymierność (niewymierność), ograniczoność (nieograniczoność), osiągalność (nieosiągalność), proporcja i miara (brak proporcji i miary). Oczywiście, powyższa lista jest niezupełna.

W przypadku tych dualnych elementów pojawia się również zdolność generowania konkretnych obiektów matematycznych, na przykład continuum może mieć realizacje jako linia prosta, krzywa, płaszczyzna, przestrzeń czy inne figury geometryczne. Jednak te realizacje napotykają na trudności związane z pojawianiem się sprzeczności wytwarzanej przez elementy dualne. Jak pokazywały paradoksy Zenona z Elei, niezależnie od tego, jaką przyjmiemy strukturę odcinka (dyskretną czy continuum), dochodzimy do sprzeczności. Rozwój matematyki (usuwanie tych sprzeczności i powstawanie kolejnych pojęć i metod) jest możliwy dzięki „uruchomieniu" pojęć podstawowych, na przykład dzięki idei harmonii otrzymujemy harmonię tych przeciwstawnych elementów. Jedną z możliwych metod, która tę harmonię buduje, jest teoria proporcji Eudoksosa czy przekrojów Dedekinda.

Analizując więc strukturę obiektu matematycznego, musimy uwzględnić te dwa składniki: działanie pojęć podstawowych (w ich realizacjach) oraz relacje między elementami dualnymi (zawierające sprzeczność, jak i metodę ich uzgodnienia). Problemem jest ponadto samo uchwycenie, czym jest obiekt matematyczny.

Jak pisałem wcześnie, idąc tropem myśli Kartezjusza, przedmiot badań matematyki może być dowolny, chodzi o to w badaniach matematycznych, aby w tym, co badamy, poszukiwać porządku i miary. Przedmiotem badań matematyki stały się w czasach współczesnych: nieskończoność, przypadek, chaos. Nie znaczy to jednak, że stały się one obiektami matematycznymi. Do badania tych fenomenów zostały wykorzystane istniejące obiekty matematyczne i pojawiły się nowe. Obiekt matematyczny i przedmiot badań matematycznych to nie jest to samo, chociaż w wielu przypadkach obiekt matematyczny staje się przedmiotem takich badań (na przykład w metamatematyce). W drugą stronę przejście nie jest możliwe. Aby coś było przedmiotem badań matematycznych, muszą być użyte matematyczne narzędzia badań lub zastosowany sposób badań musi być matematyczny – poszukiwanie porządku i miary. Dzięki tym badaniom mogą pojawić się nowe obiekty matematyczne, które będą wynikiem tych badań, jako idealizacja (abstrakcja, generalizacja, uniwersalizacja) badanego przedmiotu czy wydobycie z niego ukrytych struktur matematycznych (konkretyzacja, eksploracja). Nie można więc określić, czym są obiekty matematyczne generalnie, gdyż tworzą się przez cały czas w procesie rozwoju matematyki i zależne są od przedmiotu badań, a ten może być *de facto* dowolny. Obiekty matematyczne występują też na różnym stopniu ogólności. W początkowym okresie rozwoju matematyki można wskazać jedynie dwa obiekty matematyczne (jeśli bierzemy pod uwagę najwyższy stopień ogólności): jest to liczba (wielkości dyskretne, czym zajmowała się arytmetyka) oraz continuum geometryczne (geometria). Później pojawiły się kolejne obiekty matematyczne związane z nowymi teoriami matematycznymi (np. obiekty algebraiczne, różniczkowe, topologiczne). Obiekty w najbardziej ogólnym ujęciu nie są definiowalne, chociaż występują jako elementy matematyki, często są wykorzystywane w definicji ich konkretnych realizacji. Możemy więc zdefiniować, czym jest liczba naturalna, rzeczywista (poprzez odpowiednią aksjomatyzację) – bez formalnego odwoływania się do generalnego pojęcia liczby. Jednak te generalne pojęcia cały czas „pracują" i pokazują, że nie można sprowadzić matematyki do czysto formalnych struktur i operacji.

Ponadto w matematyce mogą funkcjonować przez dłuższy czas obiekty, którym nie jest przypisane żadne pojęcie (są niezdefiniowane). Takimi obiektami były, na przykład, liczba (nienaturalna) czy granica (stosowana w metodzie wyczerpywania). Samo pojęcie linii (prostej, krzywej) i ogólnie figury geometrycznej (płaskiej, bryły) czy continuum geometrycznego też przez wiele wieków rozumiane było jedynie intuicyjnie. Podanie precyzyjne definicji liczby rzeczywistej, krzywej, continuum geometrycznego i innych (co nastąpiło dopiero na przełomie XIX i XX wieku) nie sprawiło, że poprzednie rozumienie, w dużym stopniu intuicyjne, zniknęło[48]. Przykładowo, liczby w swoim ogólnym rozumieniu dalej są przedmiotem badań jako przedmioty niedefiniowalne, wymagające pełniejszego zrozumienia, a ta refleksja może doprowadzać i prowadzi do powstawania nowych rodzajów liczb (np. liczb hiperrzeczywistych w analizie niestandardowej A. Robinsona czy kwaternionów).

Poznać dany obiekt matematyczny i jego strukturę (i to na różnych poziomach ogólności) można poprzez analizę logiczną oraz przez analizę dziejów pojęć, dowodów, twierdzeń i hipotez, z którymi ten obiekt jest związany.

Chciałbym wskazać generalny schemat, któremu podlegają pewnego rodzaju obiekty matematyczne, a dokładniej obiekty, które nie są jedynie swoimi pojęciami (otrzymanymi poprzez definicję, aksjomatyzację), lecz mają swoją bardziej złożoną strukturę[49]. Można w nich wyróżnić następujące elementy:

1) definicje pojęć określających dane obiekty;
2) paradoksy i kontrprzykłady, z którymi te obiekty są związane;
3) twierdzenia (hipotezy), w których te obiekty występują (jawnie lub w sposób ukryty);
4) pojęcia podstawowe;
5) pojęcia dualne;
6) wymiary uniwersalności.

Mówmy o obiektach będących na „wysokim" stopniu ogólności, jak: liczba, forma geometryczna, linia, stosunek wielkości, granica, obiekt algebraiczny, itd. Pojawia się jednak jedno z najważniejszych pytań: czy możemy

[48] Dokładniejszą analizę roli intuicji w matematyce pokazuję w cytowanej już pracy: W. Wójcik, *The problem of intuition in mathematics…*

[49] Oczywiście, większość obiektów matematycznych, przynajmniej na pewnym poziomie uszczegółowienia, posiada jedynie formalną strukturę.

przy definiowaniu bardziej konkretnych obiektów odciąć się od znaczeń ogólnych? Klęska formalistycznego programu matematyki pokazała, że nie jest to możliwe. Myślę, że rozważania tej pracy też ukazały tę nieredukowalność wielu obiektów matematycznych do ich formalnego składnika.

W powyższym schemacie występują trzy poziomy złożoności. Pierwszy z nich dotyczy obiektów, które są swoimi pojęciami (punkt 1); drugi poziom dotyczy obiektów bardziej złożonych (punkty 1–3), natomiast punkty 4–6 określają strukturę „głęboką" obiektów matematycznych (oczywiście, tylko niektórych).

Spójrzmy na pojęcie linii jako na obiekt matematyczny występujący od początku dziejów matematyki i posiadający pełną strukturę złożoności. Spośród ogromnej liczby różnych linii (jako form geometrycznych jednowymiarowych) w matematyce antycznej wybrano tylko dwie, jako elementarne, przy pomocy których starano się definiować, konstruować inne i opisywać zjawiska. Były to linia prosta oraz okrąg. Stało się tak dlatego, że w naturalny sposób można było dostrzec w ich strukturze realizację pojęć podstawowych: charakteryzowały się doskonałą symetrią, harmonią, podobieństwem (wszystkie odcinki są do sobie podobne, tak jak i okręgi), a odpowiadające im w rzeczywistości obiekty materialne (jako konstrukcje, czy elementy konstrukcji) cechowały się pięknem, użytecznością i skutecznością. Jednak w równie wyraźny sposób dały dostrzec się pojęcia dualne. Linia ukazała swoje podwójne oblicze: jako złożona z pewnych elementów niepodzielnych, dyskretnych (punktów, atomów), a zarazem posiadająca strukturę continuum, linia prosta była ograniczona (odcinek), a zarazem nieograniczona (linia prosta). Odcinek powinien być podstawą pomiarów jako jednostka pomiarowa, ale okazało się, że same odcinki mogą być między sobą niewspółmierne (więc nawet same siebie nie zmierzą). W oparciu o te podstawowe elementy (linii prostej i okręgu) nie dało się wykonać podstawowych konstrukcji (problemy delijskie). Duża jednak liczba konstrukcji geometrycznych była przy ich pomocy wykonywana i w ten sposób okazały swoją przydatność i moc. Szukając rozwiązania tych problemów, wygenerowano kilka ważnych metod i nowych teorii. Teoria proporcji oraz metoda wyczerpywania pozwalały wykonywać pomiary i obliczać pola i objętości figur, zachowując znaczenie wybranych figur elementarnych. Już Hipokrates z Chios w V wieku p.n.e. rozwiązał problem podwojenia sześcianu, wykorzystując metodę podwójnej średniej proporcjonalnej, a Menaichmos sto lat później pokazał, że metoda Hipokratesa, a więc znalezienie x i y w podwójnym równaniu $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, sprowadza się do znalezienia punktów przecięcia paraboli oraz hiperboli (po przekształceniu powyższej proporcji otrzymujemy bowiem równania tych dwóch krzywych stożkowych: $x^2 = ay$ oraz $xy = ab$). Jak pisałem wcześniej, właśnie Menaichmos rozpoczął badania nad krzywymi stożkowymi. Pokazał ich przydatność do rozwiązywania problemów delijskich, a ponadto zauważył, że te krzywe otrzymujemy przez przecięcie stożka płaszczyznami nierównoległymi do jego podstawy. Potem, jak wiemy, teorię stożkowych opracował Apoloniusz. Można było więc rozszerzyć liczbę krzywych elementarnych do wszystkich stożkowych (okrąg i linia prosta też należały do stożkowych), aby „nierozwiązalne" (w oparciu o konstrukcje platońskie) problemy znalazły rozwiązanie. Rozwiązywanie tych problemów prowadziło też do rozpatrywania równań (kwadratowych), które opisywały w sposób algebraiczny krzywe stożkowe. Natomiast Hipokrates z Chios rozwiązał zagadnienie kwadratury koła przy pomocy kwadratrysy. Również niewspółmierność boku kwadratu i jego przekątnej nie była taka groźna, gdyż kwadraty zbudowane odpowiednio na tym boku i przekątnej były już współmierne. Wystarczyło więc wejść na wymiar wyżej i otrzymywaliśmy współmierność i rozwiązanie zagadnienia. Eudoksos, Archimedes i inni przy pomocy metody wyczerpywania obliczali znów pola powierzchni ograniczonych łukami, co wcześniej dawało się zrobić tylko w szczególnych przypadkach. Powstały więc ogólne metody rozwiązywania danych problemów matematycznych i pojawiły się różne krzywe, które okazały się dobrym narzędziem badań. Krzywe stożkowe okazały się szczególnie ważne, gdyż należały do tej samej rodziny, co okrąg i prosta (były przekrojami stożka), i pokazywały znaczenie badań algebraicznych. Jak wiemy, ten argument z „harmonii" był kluczowy dla Keplera przy zastępowaniu kołowych orbit planet przez orbity w kształcie elipsy.

W czasach nowożytnych okazało się, że krzywe można wyrażać przy pomocy funkcji jako wykresy funkcji. Pojęcie funkcji i układu współrzędnych pozwalało więc na uniwersalne ujęcia problemu krzywych. Do ich ścisłego zdefiniowania trzeba było jednak jeszcze kilku nowych pojęć: continuum topologicznego i wymiaru. Gdy udało się zdefiniować pojęcie funkcji ciągłej, uznano, że można zdefiniować krzywą jako ciągły obraz odcinka (tzw. krzywa Jordana). Okazało się, że sytuacja nie jest taka prosta. Pojawiło się wiele „kontrprzykładów" (czyli przykładów krzywych sprzecznych z intuicją krzywej). Najbardziej znana jest konstrukcja krzywej Peana, czyli krzywej wypełniającej kwadrat. Jest to sprzeczne z intuicją, że krzywa posiada tylko długość (nie może być dwuwymiarowa). Zostało w końcu sformułowane pojęcie continuum geometrycznego i wymiaru topologicznego, a krzywa została zdefiniowana jako continuum topologiczne jednowymiarowe. Definicja ta dawała „uniwersalną" i bardzo szeroką definicję krzywej, tzn., można ją było stosować do różnych działów matematyki. Obejmowała jednak przypadki też niezgodne z intuicją (np. krzywe niezawierające łuków), które można było na konkretne potrzeby wykluczyć przy pomocy dodatkowych założeń. Definicja ta została sformułowaną przy pomocy narzędzi teorii mnogości i topologii, jest więc ograniczona do kategorii teoriomnogościowych i topologicznych. Jeśli wyjdziemy poza schemat, w którym teoria mnogości jest podstawą matematyki, siłą rzeczy pojawią się inne możliwości definicyjne. Nie można więc uznać tego rozwiązania za ostateczne, a intuicje tkwiące w pojęciu linii (krzywej, prostej, odcinka) ciągle są obecne w opracowywaniu kolejnych metod i rozwiązań. Analizując poszczególne obiekty matematyczne, wchodzimy w dzieje matematyki i odsłaniają się związki matematyki z kulturą i cywilizacją.

ZAKOŃCZENIE

Znaczenie matematyki dla rozwoju i zachowania cywilizacji wydaje się bezsporne. Można wskazać wiele przykładów kluczowego udziału matematyki w podniesieniu poziomu cywilizacyjnego społeczeństwa i ochrony jego kondycji i sprawności w różnych obszarach. Matematyka stanowi podstawę nauk technicznych jako element projektowania i modelowania, określa również rygor ścisłości rozumowania w naukach i stanowi rdzeń wielu najważniejszych teorii naukowych (i to nie tylko przyrodniczych, ale również społecznych i ekonomicznych). Stanowi istotny element określający wzorce w sztuce, architekturze i literaturze. Zgodnie ze wzorem metody matematycznej została skonstruowana logika, a wiele podstawowych problemów i pytań dotyczących natury człowieka i świata jest inspirowanych przez problemy i badania matematyczne. Określa ona również kierunek badań różnych filozoficznych projektów, dokonuje demistyfikacji wielu fałszywych wyobrażeń, tak w ramach filozoficznych, jak i religijnych doktryn, uściśla ich podstawy i pozwala na lepsze i pełniejsze ich rozumienie. Matematyka jest promotorem ścisłości w rozumowaniu, akcentuje wartość dowodu i racjonalności i występuje przeciwko nieuprawnionym autorytetom, zwyczajom i przesądom. Dzięki skuteczności matematycznych dowodów i metod budzi wiarę w możliwości człowieka, a piękno matematycznych konstrukcji ma ogromną wartość estetyczną, podobnie jak inne dzieła ludzkiej kultury.

Utrzymanie odpowiedniego poziomu wiedzy matematycznej wydaje się więc, mimo znaczącego wysiłku intelektualnego i organizacyjnego, konieczne dla zachowania przynajmniej *status quo* cywilizacyjnego. Nie od wszystkich wymaga się poznania i opanowania matematycznych struktur i technik matematycznego dowodzenia, jednak edukacja powinna ukazać wszystkim sens i wartość matematycznej działalności oraz dać możliwość uchwycenia, przynajmniej w minimalnym stopniu, miejsca matematyki w rozwoju społecznym i cywilizacyjnym. Chodzi o utrzymanie w społeczeństwie kultury matematycznej, która ma, niestety, tendencje do zanikania, również w czasach współczesnych.

Jednym z bardziej zastanawiających paradoksów czasów współczesnych jest sytuacja, w której obserwujemy ciągłe poszerzanie się dziedziny matematyki i obszaru jej zastosowań, przy jednoczesnym zaniku kultury matematycznej. Łatwo zauważyć, że kurczy się kontakt ogółu ludzi z dorobkiem matematycznym, i to mimo zwiększania się liczby ludzi zdobywających wiedzę (w tym matematyczną) na różnych szczeblach edukacji. Z jednej strony wydaje się to naturalne wobec gwałtownego rozrostu dziedziny nauk matematycznych w czasach nowożytnych i współczesnych. Problemem jest jednak utrata ogólnej wiedzy na temat miejsca matematyki (szczególnie klasycznej, ale i współczesnej) w różnorodnych obszarach cywilizacji. Ponadto niedostrzegany albo i kontestowany jest fakt, że od początku swojego powstania matematyka rozwija się *de facto* w sposób kumulatywny i pokazuje ciągłość rozwoju cywilizacyjnego. Rozwój matematyki w czasach nowożytnych i współczesnych nie przekreślił matematycznego i cywilizacyjnego znaczenia starych teorii. Wobec ogromnego wzrostu liczby dyscyplin matematycznych (jest ich aktualnie wiele tysięcy) i obecności matematyki niemal we wszystkich obszarach życia, teza o jej uniwersalności wiedzy, głoszona przez wielu uczonych aż od starożytności, zdaje się mieć coraz mocniejsze potwierdzenie. W świadomości powszechnej istnieje bałwochwalczy podziw dla matematyki, a zarazem lęk przed nią, jak i przed naukami, które się z niej wywodzą. Oczywista teza o uniwersalności matematyki wydaje się dla wielu paradoksalna. Jednak praktycznie nikt nie ma wątpliwości, że we wszystkich zdobyczach techniki obecna jest matematyka, a bez niej rozwój współczesnej cywilizacji byłby niemożliwy.

Ta ambiwalencja w podejściu do matematyki jest charakterystyczna nie tylko dla czasów współczesnych, jak mogliśmy zobaczyć w przeprowadzonych analizach. Może też posłużyć do zrozumienia stanu współczesnej kultury pełnej paradoksów. Ta kultura jest określana najczęściej poprzez pojęcia zapośredniczone w innej kulturze, w innych czasach i wartościach. Nie jest nawet epoką opozycyjną wobec wcześniejszych, jak renesans wobec średniowiecza, lecz jedynie epoką „post" (postmodernistyczną, postindustrialną, poststrukturalną, posthumanistyczną). Epoka nowożytna już przeminęła, a nowa jeszcze nie nastała i nie wiemy nawet, czy kiedykolwiek nastanie. Można by ją było nazwać „średniowieczem", gdyby nazwa nie była już zarezerwowana. Niektórzy uważają, że doszliśmy do końca dziejów, kultury, człowieka. Odnosi się wrażenie, że żyjemy w czasach rozbiórki, dekonstrukcji oraz ucieczki od wszelkich wartości. Jak zauważyłem, analizując dzieje matematyki, żyjemy w czasach przełomu, a tego rodzaju „końce" cywilizacji miały miejsce już kilkakrotnie. We wcześniejszych okresach, czasami po dłuższym okresie zastoju, rozwój był kontynuowany, utracone zdobycze cywilizacji stopniowo odzyskiwane. Przełom w nauce nie ma jednak nic wspólnego z rewolucją naukową, ponieważ, jeśli cywilizacja trwa, ma miejsce ciągły jej rozwój (przynajmniej w oparciu o wiedzę matematyczną). Nie znaczy to jednak, że czynniki zewnętrze wobec nauki nie doprowadzą do zniszczenia zdobyczy cywilizacji. Nie wynika to jednak z dynamiki rozwoju nauk, której podstawą jest matematyka.

Wyjaśnieniem tego fenomenu ciągłego rozwoju matematyki i wnioskiem z przeprowadzonych analiz historycznych jest przedstawiona w pracy koncepcja historiozofii matematyki. Wskazuję w niej na istnienie siedmiu okresów w dziejach ludzkości: to okres przedmatematyczny, który jest zarazem okresem przedcywilizacyjnym; okres liczby i koła; okres poznawania pierwszych stałych zależności geometrycznych i liczbowych; okres matematyki abstrakcyjnej; okres matematyki algorytmicznej; okres matematyki ciągłościowej; oraz (kształtujący się współcześnie) okres matematyki rachunków uniwersalnych. W każdym z tych okresów (nie licząc oczywiście okresu przedcywilizacyjnego) pojawiają się nowe doświadczenia matematyczne, nowe aspekty uniwersalności i kolejno odsłaniane wymiary rzeczywistości.

Chciałbym teraz wskazać kilka możliwości tkwiących w zaprezentowanym w książce podejściu do historii matematyki. W ostatnim paragrafie pracy pokazywałem, w jaki sposób zaprezentowana uniwersalność matematyki na tle pewnej wizji historiozoficznej pozwala na uchwycenie struktury obiektów matematycznych. Są one z jednej strony stabilne i zachowują niezmienne treści przez całe dzieje, ale z drugiej – ciągle się rozbudowują, przyjmując nowe elementy. Wskazuje to na ciągłość rozwoju matematyki i jej jedność mimo wzrastającej różnorodności matematycznych dyscyplin. Te cechy matematyki naświetlałem przez całą pracę, pokazując, że matematyka kolejnych okresów dziejów była w stanie nawiązać do osiągnięć wieków poprzednich i je twórczo rozwijać. W pracy zawarta jest więc polemika z koncepcją rewolucji naukowych i niewspółmierności teorii naukowych. Rewolucje mogą mieć miejsce w obrazie świata i w kulturze (i kilka razy w dziejach nastąpiły), natomiast w naukach pojawiają się co pewien czas przełomy, rozpoczynające się od nowych doświadczeń matematycznych. Matematyka otwiera kolejne wymiary rzeczywistości, co daje nowe możliwości badawcze i rozwojowe naukom i kulturze. Wraz ze swoim rozwojem matematyka objawia coraz pełniej swą uniwersalność, odsłaniając jej kolejne rodzaje. To wszystko sprawia, że jest źródłem i kryterium rozwoju cywilizacyjnego. Oczywiście, rozwój matematyki to rozwój jej poszczególnych obiektów, metod, idei oraz teorii. Analizując (w sposób formalny i filozoficzny) przynajmniej niektóre obiekty matematyczne, poznajemy ich strukturę, która zawiera w sobie dzieje kształtowania się tego obiektu oraz dzieje matematyki jako takiej (a nawet szerzej, dzieje nauki i kultury).

Przyglądając się niektórym odkryciom w dziejach matematyki, zauważyliśmy, że dzięki matematyce mamy możliwość usuwania pojawiających się w procesie poznania świata sprzeczności i w konsekwencji otwiera się droga pełniejszego poznawania rzeczywistości. Matematyka pozwala dostrzegać racjonalne struktury w poznawanej rzeczywistości, a co więcej, otwiera kolejne jej wymiary. Staje się więc pierwotnym przedmiotem naszego myślenia w odniesieniu do wszystkich rodzajów rzeczywistości, tak zmysłowej, jak i idealnej.

Od pewnego czasu coraz więcej mówi się o matematyce z okresu przedhelleńskiego. Odkrywane są osiągnięcia wielkich cywilizacji Sumerów, Akadyjczyków i Babilończyków (ale również Egipcjan), szczególnie poruszające w zakresie nauk matematycznych. Coraz bardziej widać, jak wiele starożytni Grecy zawdzięczali tamtym ludom. Aleksander Macedoński podbija tereny będące na wyższym poziomie cywilizacyjnym od Hellady. Następuje interesująca synteza kultur. Zaraz na początku okresu aleksandryjskiego (III wiek p.n.e.) miał miejsce znaczący rozwój matematyki greckiej (a właściwie hellenistycznej). To wtedy osiągnęła ona poziom, który stał się niedościgniony przez wiele wieków. Wtedy też przewyższyła osiągnięcia poprzedników. Niesprzyjające okoliczności zewnętrze i wydarzenia polityczne powstrzymały jednak ten spektakularny rozwój nauki. Miało miejsce kilka renesansów w okresie panowania Rzymu (przełom I i II oraz III i IV wieku n.e.), jednak generalnie ogromny dorobek matematyczny zostaje odrzucony i zaprzepaszczony. To, co ocalało, było później w okresie średniowiecza i w czasach nowożytnych mozolnie odczytywane, odzyskiwane, uzupełniane i rozwijane. Ten dokonujący się fenomen rekonstrukcji matematyki starożytnej jest kolejnym dowodem na jedność matematyki i ciągłość jej rozwoju (mimo niesprzyjających okoliczności zewnętrznych przez cały czas płynie przynajmniej wąski strumyk kontynuacji idei i wyników).

To odzyskiwanie osiągnięć naukowych i kulturowych innych cywilizacji czy ludów wiąże się z fenomenem zapominania (czasami gwałtownego) o osiągnięciach poprzednich pokoleń. Najbardziej spektakularne jest zniknięcie cywilizacji sumeryjskiej i pamięci o Sumerach na przełomie starej i nowej ery, mimo że język sumeryjski używany był w Mezopotamii aż do I wieku p.n.e. jako język nauki. Nie ma żadnej wzmianki o tym ludzie i ich kulturze aż do przełomu XIX i XX wieku, kiedy ta cywilizacja została odkryta na nowo, a język odczytany. Nieco podobna sytuacja (chociaż nie aż tak drastyczna) miała miejsce z osiągnięciami matematyki i techniki naukowej okresu aleksandryjskiego. Również osiągnięcia uczonych końca średniowiecza na około dwieście lat zostały przemilczane i zapomniane. Na szczęście część tych odkryć odnaleziono i do nich nawiązano. Najczęściej próby dezawuowania, niedostrzegania, niszczenia albo „zapominania" osiągnięć poprzedników były spowodowane motywami niemerytorycznymi, zewnętrznymi, takimi jak: próby podniesienia rangi swoich odkryć, niezrozumienie wyników, lekceważenie czasów wcześniejszych, brak dostępu albo dostęp niepełny do prac wcześniejszych, zarazy, wojny, wydarzenia polityczne. Nie wynikały one z wewnętrznej logiki i dynamiki rozwoju nauki, ale często skutecznie blokowały jej rozwój.

Od dłuższego czasu badany jest fenomen powstania i rozwoju Polskiej Szkoły Matematycznej. Na przykładzie tej szkoły naukowej widać wyraźnie te zjawiska, o których wspomniałem: niedostrzegania, niszczenia, zapominania. Analizy powstania, rozwoju i upadku tej szkoły (spowodowanego wojną i wrogością kulturową agresorów), a potem odzyskiwanie jej dorobku i kontynuacja w innych warunkach politycznych i w innych miejscach (na emigracji) pokazują siłę i możliwość szerokiego oddziaływania jej matematycznych osiągnięć.

Często przedstawia się wspaniałe osiągnięcia polskich matematyków tego okresu na tle słabości okresu wcześniejszego, w którym Polska nie wydała zbyt wielu wybitnych matematyków. Wskazuje się na różne źródła tego ożywienia. Podkreśla się koncentrację jedynie na kilka dyscyplinach matematycznych, które wówczas dopiero zaczęły się rodzić (chodzi o program Janiszewskiego i skupienie polskich matematyków na teorii mnogości, topologii i logice matematycznej). Z drugiej jednak strony rozwijanych było wiele różnych programów badawczych, a to, co łączyło te programy, to zainteresowanie badaniami podstaw matematyki i innych nauk. Siłą rzeczy wchodzono więc na różne obszary badawcze, co sprawiało, że Polska Szkoła Matematyczna składała się *de facto* z kilku szkół naukowych. Rozwój matematyki powoli wpływał na rozwój innych nauk i prowadził do pozytywnych przemian cywilizacyjnych, który to czas został przerwany wybuchem II wojny światowej i represjami, jakie dotknęły ziemie polskie i jej mieszkańców. Środowisko uczonych zostało w znacznej mierze zniszczone i rozproszone. Duża część matematyków zginęła, a część wyemigrowała, głównie do Stanów Zjednoczonych. Powstało na Zachodzie kilka znaczących ośrodków badań matematycznych (w ramach nowych teorii), założonych przez polskich matematyków. Chodzi przede wszystkich o takich uczonych, jak: Samuel Eilenberg, Alfred Tarski, Antoni Zygmund, Jerzy Spława-Neyman, Jan Łukasiewicz, Mark Kac, Stanisław Ulam, Otton Nikodym, Bolesław Sobociński, Czesław Lejewski. Ci, którzy zostali w kraju, częściowo w innych miejscach tworzyli nowe ośrodki, próbując kontynuować badania przedwojenne. Częściowo się to udało, jednak o kontynuacji Polskiej Szkoły Matematycznej można mówić raczej w środowisku amerykańskim (i szerzej zachodnim). Mimo dramatu wojny, idee i wyniki wypracowane w środowisku polskich matematyków były kontynuowane, odzyskiwane i rozwijane. W dużej mierze ta kontynuacja pokazała uniwersalny charakter badań prowadzonych w Polsce międzywojennej i miała kluczowy wkład do rozwoju światowej matematyki i logiki. Sądzę, że kluczem do zrozumienia tego sukcesu jest fakt, że polscy matematycy nawiązali do badań otwierających nowy przełom w matematyce, wypracowali nowe idee i teorie w ramach tego przełomu i dostrzegli uniwersalny charakter matematyki ukazywany w ramach nowych teorii matematycznych.

Chciałbym w dalszej części moich badań – ich kontynuacji – pokazać, w oparciu o przedstawioną koncepcję uniwersalności matematyki, w jaki sposób polscy matematycy budowali nowe teorie, jak tworzyli wspólnoty naukowe, i przybliżyć charakter opracowanych przez nich programów badawczych i dokonanych w ich ramach osiągnięć.

Tę listę otwiera program badania podstaw matematyki, w tym logiki matematycznej i teorii mnogości (J. Śleszyński, J. Łukasiewicz, A. Tarski, W. Sierpiński i inni), następnie mamy program rozwoju rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej (S. Mazurkiewicz, J. Spława-Neyman), badań topologicznych (topologii geometrycznej – Z. Janiszewski, S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński, jak również algebraicznej – K. Borsuk, S. Eilenberg), analizy funkcjonalnej (H. Steinhaus, S. Banach), szeregów Fouriera i funkcji analitycznych (A. Rajchman, A. Zygmund, S. Saks, K. Marcinkiewicz), badania alternatywnych wersji teorii mnogości (S. Leśniewski, B. Sobociński) oraz matematycznych podstaw nauk przyrodniczych (S. Zaremba, O. Nikodym, K. Żurawski). Szczególne znaczenie dla rozwoju matematyki tego okresu miało badanie podstaw geometrii. Najbardziej znane są badania B. Bolzano, G. Cantora i D. Hilberta. Były one w centrum zainteresowania polskich matematyków (Janiszewski, Mazurkiewicz, Sierpiński, Knaster, Kuratowski, Saks) jako współtwórców topologii geometrycznej. Istotny był sposób badań przy pomocy narzędzi teoriomnogościowych, logicznych oraz analitycznych. Powstało wiele znaczących wyników związanych z topologiczną teorią continuów, pojawiały się ważne charakterystyki łuku, krzywej, sfery i innych obiektów geometrycznych. Badano również podstawy teorii mnogości, a szczególnie konsekwencje przyjęcia (lub odrzucenia) pewnika wyboru czy hipotezy continuum (W. Sierpiński, A. Tarski, S. Banach, H. Steinhaus). Wyjątkowe znaczenie należy przypisać koncepcji uniwersalności matematyki H. Steinhausa i przykładom jej realizacji (zastosowania matematyki, ukazywanie obecności matematyki w rzeczywistości, budowanie matematyki „obrazkowej", program Archimedesa w edukacji, poszukiwanie pojęć, struktur i twierdzeń mających odpowiedniki w różnych teoriach matematycznych i poza matematyką). Kluczowe jest przekonanie Steinhausa, że matematyka jest częścią rzeczywistości, nie tylko w odniesieniu do przyrody, ale również do świata kultury i każdego człowieka (zajmowanie się nią zwiększa sprawność intelektualną i podnosi jakość życia).

Bibliografia

D'Alembert J.R., *Wstęp do encyklopedii*, tłum. J. Hartwig, PWN, Warszawa 1954.

Aaboe A., *Matematyka w starożytności*, tłum. R. Ramer, PWN, Warszawa 1968.

Allman G.J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin – London 1889.

Archimedes, *Poslanie k Ehratocfenu*, [w:] *Sochinienia,* Państwowe Wydawnictwo Literatury Fizyczno-Matematycznej, Moskwa 1962.

Arystoteles, *Analityki wtóre,* tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, PWN, Warszawa 1990.

Arystoteles, *Fizyka*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990.

Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990.

Arystoteles, *Topiki*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, PWN, Warszawa 1990.

Asmus W.F., *Demokryt,* tłum. B. Kupis, Książka i Wiedza, Warszawa 1961.

Asmus W.F., *Descartes,* Książka i Wiedza, Warszawa 1960.

Aull C.E. i Lowen R. (wyd.), *Handbook of the History of General Topology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London 1997.

Awrejcewicz J., Krysko V.A., Chebotyrevskiy Y.V., *Od piramid do gwiazd. Rola matematyki i mechaniki w rozwoju cywilizacji,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.

Bacon R., *Dzieło większe*, tłum. T. Włodarczyk, Wydawnictwo Marek Derewiecki, Kęty 2006.

Banach S., Knaster B., Steinhaus H, *The problem of fair division*, „Econometrica" 1948, 16.

Banach S., Tarski A., *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes,* „Fundamenta Mathematicae" 1924, t. 6.

Barański K., *Benoit Mandelbrot i jego fraktale,* „Matematyka" 2011, nr 1.

Batóg T., *Dwa paradygmaty matematyki,* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.

Bell E.T., *Men of Mathematics,* Penguin Books, Melbourne – London – Baltimore 1937.

Bell E.T., *The development of Mathematics,* McGraw-Hill Book Co., New York – London 1940.

Bell J.L., *From absolute to local mathematics*, „Synthese" 1986, nr 69.

Bielicki M.L., *Zapomniany świat Sumerów*, wyd. 4, PIW, Warszawa 1996.

Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen"*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2007.

Bolzano B., *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementrargeometrie*, Commission bey Karl Barth, Praga 1804.

Bolzano B., *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Caspar Widtmann, Praga 1810.

Bolzano B., *Paradoxien des Unendlichen*, C.H. Reclam sen., Leipzig 1851.

Borel B., *Algébre et calcul des probalilités*, „Compte Rendus Académie des Science" 1927, t. 184.

Borel B., *Sur les jeu ou intervient l'hasard et l'habileté des joueurs*, [w:] *Theorie des Probabilités*, Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris 1924.

Borel B., *Un théorem sur les systémes de formes linéaires á detérminants symétrique gauche*, „Compte Rendus Académie des Science" 1926, t. 183.

Borel E., *La théorie du jeu et les équations intégrales á noyau symétrique gauche*, „Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences" 1921, t. 173.

Borel. B., *Sur les jeu ou intervient l'hasard et l'habileté des joueurs*, „Association Francaise pour l'Advancement des Sciences" 1923.

Bottazini U., *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass,* tłum. W. Van Egmond, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg – London – Paris – Tokyo 1986.

Bourbaki N., *Elementy historii matematyki*, tłum. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1980.

Boyer C.B., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, tłum. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1964.

Boyer C.B., Merzbach Uta C. , *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, New York 1989.

Brouwer L.E.J., *Zur Analysis Situs*, „Mathematische Annalen" 1910, nr 68.

Brun J., *Arystoteles i Liceum*, tłum. H. Igalson-Tygielska, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Buzon F., *Mathesis Universalis,* [w:] *The Cambridge Descartes Lexicon,* Cambridge University Press, red. L. Nolan, Cambridge 2015.

Cantor G., *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen,* Teubner, Leipzig 1883.

Cantor G., *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen,* „Mathematische Annalen” 1872, t. 5.

Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, „*Mathematische Annalen“ 1881, nr 17.

Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, „Mathematischen Annalen” 1883, nr 21.

Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, cz. 1, „Mathematischen Annalen” 1879, nr 15.

Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Teubner, Leipzig 1880–1908 (4 tomy).

Ceram C.W., *Bogowie, groby i uczeni*, wyd. 5, PIW, Warszawa 1975.

Clagett M., *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Quantities and Motions*, Madison 1968.

Courant R., Robinson H., *Co to jest matematyka?,* tłum. E. Vielrose, R. Kołodziej, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.

Crily T., *The Emergence of Topological Dimension Theory*, [w:] *History of Topology,* I.M. James, Oxford Uniwersity, Amsterdam – Lausanne – New York – Oxford – Shannon – Singapore – Tokyo 1999, s. 1–24.

Crombie A.C., *Style myśli naukowej w początkach nowożytnej Europy,* tłum. P. Salwa, seria: „Studia z Historii Filozofii Idei”, Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 1994.

Dauben J.W., *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of Infinite,* Harvard University Press, Cambridge – Massachuset – London 1979.

Dedekind R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872.

Dembiński B., *Późna nauka Platona,* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003.

Descartes R., *Medytacje o pierwszej filozofii,* tłum. I. Dąmbska, seria: „BKF”, PWN, Warszawa 1958.

Descartes R., *Reguły kierowania umysłem. Poszukiwanie prawdy poprzez światło naturalne,* tłum. L. Chmaj, Wydawnictwo Antyk, Kęty 2002.

Descartes R., *Rozprawa o metodzie*, tłum. W. Wojciechowska, PWN, Warszawa 1988.

Descartes R., *Zasady filozofii*, tłum. I. Dąmbska, seria: „BKF”, PWN, Warszawa 1960.

Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, t. 1–16, New York 1970–1990.

Dieudonné J., *Mathematics – The Music of Reason*, Springer, Berlin – Heoldelberg – New York 1998.

Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, PWN, Warszawa 1984.

Dziekan M., *Działalność przekładowa w „Domu Mądrości"* (*Bajt al-Hikma*) *w Bagdadzie,* źródło: http://katedra.uksw.edu.pl/awicenna/bajt_al_hikma.pdf [stan z 24.04.2021].

Dzielska M., *Hypatia z Aleksandrii*, Universitas, Kraków 2010.

Eilenberg S., *On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups*, „Fundamenta Mathematicae" 1939, t. 32.

Engelking R., *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1976.

Fowler D.H., *The mathematics of Plato's Academy: A new reconstruction*, Clarendon Press, Oxford 1990.

Gajda-Krynicka J., *Koncepcje symetrii w filozofii starożytnej*, [w:] *Symetrie w sztuce i naukach humanistycznych*, Wydawnictwo Leopoldinum, Wrocław 1993.

Galilei G., *Dialogues concerning two new sciences,* tłum. H. Crew, A. De Salvio, William Andrew Publishing, Norwich – New York 1914.

Ghyka M.C., *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2001.

Gleick J., *Chaos: Making a New Science*, Viking Books, New York 1987.

Goddu A., *Connotative concepts and mathematics in Ockham's natural philosophy*, „Vivarium" 1993, t. 31 (1).

Gording L., *Spotkanie z matematyką*, tłum. T. Szapiro, PWN, Warszawa 1993.

Grant E., *Nicole Oresme and the Commensurability or Incommensurability of Celestial Motions*, „Archive for History of Exact Science" 1961, t. 1.

Gray J., *Platos Ghost's. The modernist transformation of mathematics*, Princeton University Press, Princeton – Oxford 2008.

Gribaudo L., *Was Oresme a precursor of Descartes?* (Italian), „Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur." 1979, t. 113 (1–2).

Grosseteste R., *O świetle, czyli o pochodzeniu form*, tłum. M. Boczar, [w:] M. Boczar, *Grosseteste*, Wydawnictwo Akapit, Warszawa 1994.

Grua G., *Textex inédits de G. W. Leibiz d'après les Manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre*, Paryż 1948.

Günther S., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. 1–4, Leipzig 1908.

Hadamard J., *Psychologia odkryć matematycznych*, tłum. R. Molski, PWN, Warszawa 1964.

Heath T.L., *A History of Greek Mathematics*, t. 1–2, Dover Publication, New York 1981.

Heath T.L., *Mathematics in Aristotle,* Clarendon Press, Oxford 1980.

Heinrich W., *Filozofia grecka do Platona* (*rozwój zagadnień*), Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Kraków 1914.

Historia matematyki, red. A.P. Juszkiewicz, tłum. S. Dobrzycki, t. 1–3, Warszawa 1975–1977.

Historia nauki arabskiej, t. 2: *Nauki matematyczne i fizyka,* red. R. Rashed, R. Morelon, Wydawnictwo Akademickie DIALOG, Warszawa 2001.

Hoene-Wroński J.M., *A Course of Mathematics*, Samuel Bagster, Londyn 1821.

Hoene-Wroński J.M., *Wstęp do filozofii matematyki oraz technii algorytmii*, tłum. P. Chomicz, Biblioteka Polska, Warszawa 1937.

Hoene-Wroński J.M., *Wstęp do wykładu matematyki*, tłum. L. Niedźwiecki, Biblioteka Polska, Paryż 1880.

Ifrah G., *Dzieje liczby, czyli historia wielkiego wynalazku*, tłum. S. Hartman, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1989.

Ifrah G., *Historia powszechna cyfr*, t. 1–2, tłum. K. Marczewska, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa 2006.

Jackowski S., *Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy,* „Wiadomości Matematyczne" 2005, nr 50.

James I., *Remarkable Mathematicians. From Euler to von Neumann,* Cambridge University Press, Cambridge 2002.

Jensen C., *Pierre Fermat's method of determining tangents of curves and its application to the conchoid and the quadratrix*, „Centaurus" 1969, nr 14.

Jordan Z., *O matematycznych podstawach systemu Platona. Z historii racjonalizmu,* Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk – Prace Komisji Filozoficznej, t. 6, Poznań 1937.

Jordan Z., *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej*, [w:] *Historia logiki dawniejszej*, „Dialogikon", Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1995, s. 151–162.

Juszkiewicz A.P., *Historia matematyki w wiekach średnich*, tłum. Cz. Kulig, PWN, Kraków 1969.

Kac M., *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, vol. 12, The Mathematical Association of America, New Jersey 1959.

Kahn Ch.K., *Pythagoras and Pythagoreans. A brief History*, Hacket Publishing Company, Inc., Indianapolis 2001.

Kaufmann H., *Dzieje komputerów,* PWN, Warszawa 1980.

Kepler J., *Mysterium Cosmographicum,* Tybinga 1596.

Kirk G.S., Raven J.E., Schofield M., *The Presocratic Philosophers,* Cambridge University Press, Cambridge 1983.

Kline M., *Mathematics in Western Culture*, Penguin Books, New York 1953.

Kokowski M., *Uniwersytet nowego humanizmu*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2015, t. 203, nr 1.

Kordos M., *Wykłady z historii matematyki,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996.

Kuzańczyk M., *O oświeconej niewiedzy*, Znak, Kraków 1997.

Lakatos I., *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics,* [w:] *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967.

Lakatos I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge 1976.

Leibniz G.W., *Early Mathematical Manuscripts,* tłum. J.M. Child, C.I. Gerhardt, Open Court Pub. Co., Chicago 1920.

Leibniz G.W., *Korespondencja z Antoine'em Arnauldem*, PWN, Warszawa 1998.

Lemańska A., *Matematyka – metamatematyka – filozofia matematyki,* „Studia Philosophiae Christianae" 1992, nr 28, z. 2.

Lieu S.N.C., *Scholars and Students in the Roman East*, [w:] *The Library of Alexandria. Centre of Learning in the Ancient World*, red. R. MacLeod, I.B. Tauris, London, New York 2010.

Llull R., Bonner A., Bonner E., *Doctor Illuminatus: A Ramon Llull Reader*, Princeton University Press, Princeton 1993.

Mahoney M.S., *Fermat's mathematics: Proofs and conjectures*, „Science" 1972, t. 178.

Mandelbrot B., Aharony A., Feder J., *Fractals in physics. Essays in honour of Benoit B. Mandelbrot. Proceedings of the international conference honouring Benoit B. Mandelbrot on his 65th birthday*, North-Holland, Amsterdam – New York 1990.

Marrou H.I., *Historia wychowania w starożytności,* tłum. S. Łoś, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1969.

Maryniarczyk A., *Z dziejów słowa „substancja",* „Peitho. Examina Antiqua" 2017, nr 1 (8).

Mathesis Universalis, Computability and Proof, red. S. Centrone, S. Negri, D. Sarikaya, P.M. Schuster, „Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science", t. 142, Springer Nature Switzerland AG 2019.

McLuhan M., Fiore Q., *The Medium is the Message*, Random Hause, New York 1967.

Merzbach U.C., Boyer C.B., *A History of Mathematics,* 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., New Jersey 2011.

Mierzejewski A., *Tajemnice glinianych tabliczek*, Wydawnictwo Iskry, Warszawa 1981.

Mikołaja Kopernika „O obrotach. Księga Pierwsza", tłum. M. Brożek, Wrocław – Warszawa – Kraków – Gdańsk – Łódź 1987.

Molland A.G., *An Examination of Bradwardine's Geometry*, „Archive for History of Exact Sciences” 1978, nr 19.

Molland G., *Roger Bacon's knowledge of mathematics*, [w:] *Roger Bacon and the sciences,* red. J. Hackett, Leiden 1997.

Montucla J.E., *Histoire des mathematiques*, Ch. Ant. Jombert, Paris 1758–1760.

Mozrzymas J., *Symetrie, chaos i fraktale,* wykład inauguracyjny na Uniwersytecie Wrocławskim, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2005.

Müller L., Wilk A., *Teoria podobieństwa w badaniach modeli fizycznych i matematycznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.

Murdoch J.E., *Thomas Bradwardine: mathematics and continuity in the fourteenth century,* [w:] *Mathematics and its applications to science and natural philosophy in the Middle Ages,* Cambridge – New York 1987.

Nash J., *Equilibrium Points in N-Person Games,* „Proceedings of the National Academy of Sciences” 1950, t. 36.

Netz R., Noel W., *The Archimedes Codex. Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest*, Weidenfeld & Nicolson, London 2007.

Netz R., *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

Neumann J. von, *Jeux oú la psychologie joue un role fondamental,* [w:] *Applications des jeux de hasard*, t. 4, z. 2, Paryż 1938.

Neumann J. von, Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1944.

Neumann J. von, *Traité du calcul des probalilités st ses applications*, [w:] *Applications des jeux de hasard,* t. 4, z. 2, Paryż 1938.

Neumann J. von, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, „Mathematische Annalen” 1928, nr 100.

Newton I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, wyd. A. Koyré, I. Bernard Cohen (na podstawie trzeciego wydania z 1726), Harvard University Press, Cambridge, Mass., Cambridge 1972.

Orłowski B., Płochocki Z., Przyrowski Z., *Encyklopedia odkryć i wynalazków*, Wydawnictwo Wiedza Powszechna, Warszawa 1979.

Oxtoby J.C., *Measure and Category,* Springer-Verlag, New York – Heidelberg, Berlin 1980.

Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection, seria: „Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences”, red. H. Fefrin-Weis, Springer, London 2010.

Pascal B., *The Provincial Letters. Pensees. Scientific Treaties,* tłum. T. M'Crie, W.F. Trotter, [w:] *Great Books of the Western World,* t. 33, University of Chicago, Chicago 1952.

Peckhaus V., *19th-century logic between philosophy and mathematics*. „Bulletin of Symbolic Logic" 1999, nr 5.

Peckhaus V., *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft*, Akademie Verlag, Berlin 1997.

Pedersen O., *Konflikt czy symbioza,* tłum. W. Skoczny na podstawie wykładów O. Pedersena wygłoszonych w Cambridge w 1988, Biblos, Tarnów 1997.

Peitgen H.O., P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, New York 1986.

Philodemus, *On Poems*, Book 1, Oxford University Press, Oxford 2001.

Plato's Academy. Its Workings and Its History, red. P. Kalligas, Ch. Balla, E. Baziotopoulou-Valavani, V. Karasmanis, Cambridge University Press, Cambridge 2020.

Platon, *Dialogi*, t. 1 i 2, tłum. W. Witwicki, Antyk, Kęty 1999.

Platon, *Kratylos*, tłum. W. Stefański, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1990.

Platon, *Listy* (*List siódmy*), tłum. M. Maykowska, PWN, Warszawa 1987.

Platon, *Państwo, Prawa*, tłum. W. Witwicki, Antyk, Kęty 1997.

Platon, *Timajos*, tłum. P. Siwek, PWN, Warszawa 1986.

Plutarch, *Moralia.* (*Wybór*), t. 2, tłum. Z. Abramowiczówna, seria „BKF", PWN, Warszawa 1988.

Poincare H., *La science et l'hypothese*, Paris 1925; tłum. M.H. Horwitz, *Nauka i hipoteza*, G. Centnerszwer i S-ka, Warszawa 1908.

Poincaré H., *La valeur de la science*, Paris 1961; tłum. I. Bukowski, [w:] K. Szlachcic, *Filozofia nauki francuskiego konwencjonalizmu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1994.

Polya G., *Jak to rozwiązać?*, tłum. L. Kubik, PWN, Warszawa 1993.

Popper K., *Epistemologia bez poznającego podmiotu*, [w:] *Wiedza obiektywna*, PWN, Warszawa 1992.

Porfiriusz, Jamblich, Anonim, *Żywoty Pitagorasa*, tłum. J. Gajda-Krynicka, Wydawnictwo Epsilon, Wrocław 1993.

Reale G., *Historia filozofii starożytnej. Szkoły epoki cesarstwa*, tłum. E.I. Zieliński, t. 4, Wydawnictwo KUL, Lublin 1999.

Resnikoff H.L., Wells R.O., Jr., *Mathematics and Civilization*, Dover Publications, New York 1973.

Ricoeur P., *Symbolika zła*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1986.

Riemann B., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*,. wyd. przez H. Webera i R. Dedekinda , B.G. Teubner, Leipzig 1876.

Robinson A., *Non-standard Analysis*, North–Holland, Amsterdam 1966.

Russo L., *Zapomniana rewolucja,* tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2005.
Saggs, H.W.F., *Wielkość i upadek Babilonii*, tłum. J. Nowacki, PIW, Warszawa 1973.
Sekstus Empiryk, *Against the Physicists. Against the Ethicists,* trans. R.G, Bury, Cambridge, Massachussets, London 1936.
Sierpiński W., *Pojęcie odpowiedniości w matematyce,* „Przegląd Filozoficzny" 1909, R. 12, z. 1.
Simplicius, *On Aristotle Physics*, tłum. P. Huby, C.C.W. Taylor, „Ancient Commentators on Aristotle", Richard Sorabji, Bristol Classical Press, London 2011.
Stanford Encyclopedia of Philosophy, źródło: https://plato.stanford.edu [stan z 6.08.2021].
Stasiewicz-Jasiukowa I., *Zawiesić w czasie. O polskich historykach nauki i kultury*, Warszawa 2002.
Steinhaus H., *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*, „Myśl Akademicka" 1925, nr 1.
Steinhaus H., *Definitions for a Theory of Games and Pursuits,* „Naval Research Logistics Quartely" 1960, nr 7.
Steinhaus H., Mycielski J., *A matematical axiom contradiction the axiom of choice,* „Bulletin of the Polish Academy of Sciences" 1962, t. 10.
Steinhaus H., *Sur la division pragmatique,* „Econometrica" 1949, nr 17 (supplement).
Stopa M., *Teoria kategorii i niektóre jej logiczne aspekty,* „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2018, nr 64.
Suchodolski B., *O pojmowaniu historii nauki. Z prof. drem Bogdanem Suchodolskim rozmawia Marek Arpad Kowalski,* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 1985, z. 3–4.
Swift P., *Becoming Nietzsche*, *Early Reflections on Democritus, Schopenhauer., and Kant*, Lexington Books, Lanham, Boulder, New York – Toronto – Oxford 2005.
Szabo A., *The Beginnings of Greek Mathematics*, „Synhese Historical Library", vol. 17, Dordrecht 1878.
Szydłowski M., Tambor M., *Kosmologia współczesna jako efektywna teoria Wszechświata – studium metodologiczne,* źródło: https://www.kul.pl/files/57/working_papers/szydlowski_tambor_2008f.pdf [stan z 10.06. 2021].
Śleszyński J., *Teoria dowodu,* t. 1, nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1925.

The Library of Alexandria. Centre of Learning in the Ancient World, red. R. MacLeod, I.B. Tauris, London – New York 2010.

Trepczyński M., *Światło jako arche świata. Metafizyka światła Roberta Grosseteste*, „Ethos" 2017, t. 30, nr 3(119).

Urbanik K., *Idee Hugona Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa*, „Wiadomości Matematyczne" 1973, t. XVII.

Weyl H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton 1949.

Weyl H., *Symetry,* Princeton University Press, Princeton 1952, tłum. S. Kulczycki, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Weyl H., *The Continuum*: *a Critical Examination of the Foundation of Analysis,* tłum. S. Pollard i T. Bole, Princeton University Press, Princeton 1987.

Whewell W., *History of Scientific Ideas*, t. 1–2, London 1858.

Widomski J., *Ontologia liczby*, seria „Dialogikon", Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1996.

Wójcik W., *Idea naukowości Henri Poincarégo*, „Ruch Filozoficzny" 2016, t. 72, nr 3.

Wójcik W., *Józef Maria Hoene-Wroński jako wizjoner i reformator matematyki*, [w:] *Hoene-Wroński: Życie, Matematyka i Filozofia*, red. P. Pragacz, IM PAN, Warszawa 2008.

Wójcik W., *Józefa Hoene-Wrońskiego projekt reformy matematyki*, „Antiquitates Mathematicae", vol. 1, Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Warszawa 2007.

Wójcik W., *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów,* seria: „Studia Copernicana", Wydawnictwa IHN PAN, Warszawa 2000.

Wójcik W., *Obecność pojęć »optymalnych« w matematyce jako argument za matematycznością przyrody*, [w:] *Ponad demarkacją*, red. W. Kowalski, S. Wszołek, Tarnów 2008.

Wójcik W., *Przełom czy rewolucja – znaczenie matematyki dla wystąpienia rewolucji kulturowej*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2007.

Wójcik W., *The problem of intuition in mathematics in the thoughts and creativity of selected Polish mathematicians in the context of the nineteenth-century breakthrough in mathematics*, „Ruch Filozoficzny" 2019, t. 75, nr 4.

Zermelo E., *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, „Proceedings of the Fifth Congress Mathematicians. Cambridge 1912", Cambridge University Press, Cambridge 1913.

Źródło: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies [stan z 20.03.2021].

Źródło: https://plato.stanford.edu/entries [stan z 21.04.2021].