

Zygmunt PACHULSKI

O pewnej podklasie funkcji wypukłych w kole jednostkowym

STRESZCZENIE

W pracy tej określono klasę funkcji β -kątoowo wypukłych w kole $|Z| < 1$, którą oznaczono przez $S^c(\beta)$ i dla funkcji tej klasy otrzymano oszacowanie pewnych funkcjonalów (tw. 1 i 2) a także określono zależności pomiędzy funkcjami $S^c(\beta), S^c_\alpha$, S^c (tw. 3—5).

1. Oznaczmy przez P klasę funkcji p holomorficznych w kole $K = \{z: |z| < 1\}$ i spełniających warunki $p(0) = 1$, $\operatorname{re} p(z) > 0$ dla każdego $z \in K$.

Niech S oznacza klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole K , postaci

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (1)$$

Przez S^c , S^c_α , $0 \leq \alpha < 1$, oznaczać będziemy znane podklasy rodziny S funkcji wypukłych i wypukłych rzędu α w kole K .

Jak wiadomo funkcja $f \in S^c$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest postaci (1) i dla każdego $z \in K$ spełniony jest warunek

$$\operatorname{re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \quad (2)$$

Ostatni warunek równoważny jest warunkowi

$$\left| \arg \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

W pracach [1] i [2] określono i badano klasę funkcji postaci (1) holomorficznych i jednolistnych w kole K oraz dla każdego $z \in K$ spełniających warunek

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \cdot \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

gdzie $0 < \alpha \leq 1$. Klasę tę oznaczono przez S_α i nazwano klasą funkcji α -kątoowo gwiaździstych w kole $|z| < 1$.

Definicja. Niech $0 < \beta \leq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Symbolem $S^c(\beta)$ oznaczać będziemy klasę tych funkcji $f \in S$ dla których spełniony jest, dla każdego $z \in K$, warunek

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \beta \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Klasę $S^c(\beta)$ nazywać będziemy klasą funkcji β -kątowno wypukłych w kole K . Jest oczywiste, że $S^c(1) \equiv S^c$.

Zachodzą następujące lematy

Lemat 1. Funkcja $f \in S^c(\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $F \in S_\beta$ taka, że

$$f(z) = \int_0^z \frac{F(\varphi)}{\varphi} d\varphi \quad (6)$$

dla każdego $z \in K$, gdzie S_β jest klasą funkcji β -kątowno gwiazdzistych w kole K (por. np. [1]).

Dowód. Położmy: $F(z) = z f'(z)$ dla $z \in K$.

Otrzymamy wówczas

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}$$

Z ostatniej równości oraz z (4) i (5) wynika, że $F \in S_\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f \in S^c(\beta)$ i $F(z) = z f'(z)$ dla każdego $z \in K$. Całkując równość $f'(z) = \frac{F(z)}{z}$ otrzymujemy (6).

Lemat 2. Funkcja f postaci (1) należy do klasy $S^c(\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $p \in P$ taka, że dla każdego $z \in K$ spełniona jest równość

$$f'(z) = \exp \int_0^z [(p(\varphi))^\beta - 1] \frac{d\varphi}{\varphi} \quad (7)$$

Dowód: Z definicji klasy S_β wynika, że dla każdej funkcji $F \in S_\beta$ istnieje funkcja $p \in P$ taka, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = [p(z)]^\beta$$

Stąd otrzymujemy

$$F(z) = z \exp \int_0^z [(p(\varphi))^\beta - 1] \frac{d\varphi}{\varphi}$$

Korzystając ze związku: $F(z) = z f'(z)$, $F \in S_p$, $f \in S^c(\beta)$ otrzymujemy (7).

2. Zachodzą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1. Jeżeli $f \in S^c(\beta)$, wówczas dla każdego ustalonego $z \in K$, $|z| = r$, $0 < r < 1$ zachodzą dokładne oszacowania

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\beta \leq \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\beta \quad (8)$$

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\beta \leq \left| 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\beta \quad (9)$$

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| \leq 2\beta \arctan r \quad (10)$$

Funkcją ekstremalną jest funkcja $f_0 \in S^c(\beta)$ dla której zachodzi równość

$$f_0(z) = \exp \int_0^z \left[\left(\frac{1+\varepsilon\varphi}{1-\varepsilon\varphi} \right)^\beta - 1 \right] \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad |\varepsilon| = 1 \quad (11)$$

Dowód: Oszacowania te wynikają z definicji klasy $S^c(\beta)$ oraz znanych oszacowań dla funkcjonałów w klasie P . Funkcję postaci (11) otrzymujemy ze wzoru (7) podstawiając za $p(z)$ funkcję ekstremalną względem cięgiełego funkcjonału rzeczywistego $H[p(z)]$ określonego w klasie P , a więc funkcję postaci

$$p_0(z) = \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1$$

Łatwo można sprawdzić, że znaki równości po lewych i prawych stronach w oszacowaniach (8) i (9) realizuje funkcja postaci (11) dla $z=r$ odpowiednio przy $\varepsilon = -1$ i $\varepsilon = 1$, natomiast w oszacowaniu (10) przy $\varepsilon = 1$.

Twierdzenie 2. Jeżeli $f \in S^c(\beta)$, to dla każdego ustalonego $z \in K$, $|z| = r$, $0 < r < 1$, zachodzi dokładne oszacowanie

$$\exp \int_0^r \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\beta - 1 \right] \frac{dx}{x} \leq |f'(z)| \leq \exp \int_0^r \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\beta - 1 \right] \frac{dx}{x} \quad (12)$$

Funkcją ekstremalną jest funkcja $f_0 \in S^c(\beta)$ postaci (11).

Dowód: Z równości: $\log f'(z) = \operatorname{Log} |f'(z)| + i \arg f'(z)$, gdzie $\operatorname{Log} 1 = 0$, otrzymujemy dla $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Log} |f'(z)| + i r \frac{\partial}{\partial r} \arg f'(z)$$

Stąd z kolei mamy

$$\operatorname{re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Log} |f'(z)|$$

Korzystając z (8) otrzymujemy

$$\frac{1}{r} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\beta - 1 \right] \leq \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Log} |f'(z)| \leq \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\beta - 1 \right]$$

Całkując stronami ostatnią nierówność względem r , w granicach od 0 do r , otrzymujemy oszacowanie (12).

Wniosek 1. W przypadku $\beta=1$ otrzymujemy z ostatniego twierdzenia znane oszacowanie dla funkcji klasy S^c

$$(1+r)^{-2} \leq |f'(z)| \leq (1-r)^{-2} \quad (13)$$

Funkcją ekstremalną jest funkcja postaci

$$f_1(z) = \frac{z}{1 - \varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1 \quad (14)$$

Twierdzenie 3. Każda funkcja f klasy S_α^c jest β -kątoowo wypukła w kole $|z| < r_\beta^c(S_\alpha^c)$

gdzie

$$r_\beta^c(S_\alpha^c) = \begin{cases} \sin \frac{\beta\pi}{2} & \text{dla } \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{1 - \alpha - \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (2\alpha - 1) \sin^2 \frac{\beta\pi}{2}}}{(1 - 2\alpha) \sin \frac{\beta\pi}{2}} & \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (15)$$

Funkcjami ekstremalnymi klasy S_α^c , tzn. takimi funkcjami, że dla każdego z , $|z| < r_\beta^c(S_\alpha^c)$, funkcje te są β -kątoowo wypukłe, natomiast na okręgu $|z| = r_\beta^c(S_\alpha^c)$ istnieje punkt w którym warunek β -kątoowej wypukłości (5) nie jest spełniony są odpowiednio funkcje postaci

$$\begin{aligned} f_2(z) &= -\frac{1}{\varepsilon} \log(1 - \varepsilon z), \quad |\varepsilon| = 1 \\ f_3(z) &= \frac{(1 - \varepsilon z)^{2\alpha-1} - 1}{\varepsilon(1 - 2\alpha)}, \quad |\varepsilon| = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Dowód: Jeżeli $f \in S_\alpha^c$ to jak wiadomo istnieje funkcja $p \in P$ taka, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = (1 - \alpha)p(z) + \alpha$$

Dla argumentów głównych mamy więc:

$$\arg \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = \arg \left[p(z) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right]$$

Stąd i z odpowiedniego oszacowania w klasie P otrzymujemy

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| \leq \arcsin \frac{2(1-\alpha)r}{1+(1-2\alpha)r^2}$$

i z równania

$$\arcsin \frac{2(1-\alpha)r}{1+(1-2\alpha)r^2} = \beta \cdot \frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy wartości r_β^c (S_α^c) określone wzorem (15).

Można bezpośrednio sprawdzić, że dla funkcji postaci (16), które otrzymujemy analogicznie jak w twierdzeniu 1, na okręgu $|z|=r_\beta^c$ (S_α^c) istnieje punkt w którym zachodzi równość

$$\arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) = \beta \cdot \frac{\pi}{2}$$

Wniosek 2. Każda funkcja f klasy S^c jest β -kątowno wypukła w kole $|z| < r_\beta^c$ (S^c), gdzie

$$r_\beta^c(S^c) = \frac{\beta\pi}{4} \quad (17)$$

Funkcją ekstremalną (w znaczeniu takim jak w twierdzeniu 3) jest funkcja postaci (14).

Twierdzenie 4. Każda funkcja f klasy $S^c(\beta)$ jest funkcją wypukłą rzędu α w kole $|z| < r_\alpha^c(S^c(\beta))$ gdzie

$$r_\alpha^c(S^c(\beta)) = \frac{1 - \alpha^{\frac{1}{\beta}}}{1 + \alpha^{\frac{1}{\beta}}} \quad (18)$$

Funkcją ekstremalną (w znaczeniu takim jak w twierdzeniu 3) jest funkcja $f_0 \in S^c(\beta)$ postaci (11).

Dowód: Jeżeli $f \in S^c(\beta)$, to z (8) mamy

$$\operatorname{re} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\beta$$

Z definicji wypukłości rzędu α funkcji f wynika, że liczba $r_\alpha^c(S^c(\beta))$ jest jedynym pierwiastkiem zawartym w przedziale $(0, 1)$ równania

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\beta = \alpha$$

Stąd otrzymujemy (18).

Wniosek 3. Każda funkcja f klasy S^c jest wypukła rzędu α w kole $|z| < r_\alpha^c(S^c)$, gdzie

$$r_\alpha^c(S^c) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (19)$$

Funkcję ekstremalną (w znaczeniu takim jak w twierdzeniu 3) jest funkcja postaci (14).

Twierdzenie 5. Każda funkcja f klasy $S^c(\gamma)$, ($0 < \gamma \leq 1$), jest β -kątoowo wypukła w kole $|z| < r_\beta^c(S^c(\gamma))$, gdzie

$$r_\beta^c(S^c(\gamma)) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\beta\pi}{4\gamma} & \text{dla } \gamma > \beta \\ & \text{dla } \gamma \leq \beta \end{cases} \quad (20)$$

(Symbolem $S^c(\gamma)$ oznaczamy klasę funkcji γ -kątoowo wypukłych; det. na str. 2) Funkcją ekstremalną (w znaczeniu takim jak w twierdzeniu 3) jest funkcja f klasy $S^c(\gamma)$ taka, że:

$$f'_\varepsilon(z) = \exp \int_0^z \left[\left(\frac{1+\varepsilon\varphi}{1-\varepsilon\varphi} \right)^\gamma - 1 \right] \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad |\varepsilon|=1 \quad (21)$$

Dowód: Jeżeli $f \in S^c(\gamma)$, to z (10) wynika, że dla każdego $z \in K$

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| \leq 2\gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} r$$

Rozwiązując równanie

$$2\gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg} r = \beta \cdot \frac{2}{\pi}$$

otrzymujemy $r_\beta^c(S^c(\gamma)) = \operatorname{tg} \frac{\beta\pi}{4\gamma}$. Gdy $\gamma \leq \beta$, to $\operatorname{tg} \frac{\beta\pi}{4\gamma} \geq 1$; więc w tym przypadku $r_\beta^c(S^c(\gamma)) = 1$.

LITERATURA

- [1] D.A. Brannan, W.E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, J. London Math. Soc., 1 (1969), 413—443.
- [2] J. Stankiewicz, Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α -angulairement étoilées, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 20 (1966), 59—75.
- [3] V.A. Zmorowič, Ob odnom klasie ekstremalnych zadač, zvjazannyh s reguljarnymi funkcijami s položitelnoj veščestvennoj častju w kručie $|z| < 1$, Ukr. Mat. Žur., T. 17, No 4 (1965), 12—21.

Z. Pachulski

ON SOME SUCCLASS OF CONVEX FUNCTIONS IN THE UNIT DISC Summary

Class of β -angularly convex functions in the disc $|z| < 1$ which is denoted by $S^c(\beta)$ is defined in this paper. Estimations of certain functionals (th. 1 and 2) is obtained and relations among the functions of the class $S^c(\beta)$, S_α^c , S_α^c (th. 3—5) are determined.