PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 5/82 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Stefan CHAŁADUS

Funktor K_2 dla wybranych pierścieni.

CZĘŚĆ I

STRESZCZENIE

Niech F_p będzie ciałem p-elementowym i nie F_pC_pn oznacza pierścień grupowy z grupą cykliczną rzędu p^n. Praca zawiera kompletny dowód następującego twierdzenia: Jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to $K_2(F_pC_pn)=1$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponadto, omawiamy symbole Hilberta i symbole swojskie i dowodzimy, że są one w szczególności symbolami Steinberga.

1. Wstęp

Praca należy do pogranicza dwóch dziedzin matematyki — algebraicznej teorii liczb i algebranicznej K-teorii, której powstanie łączy się z pracą A. Grothendiecka z 1957 roku. W. algebraicznej K-teorii badane są m. in. funktory K_0 (Grothendiecka), K_1 (Whiteheada), K_2 (Milnora) z kategorii pierścieni w kategorię grup abelowych. Szczególnie znaczący wkład w jej rozwój wnoszą: monografia H. Bassa, Algebraic K-theory, 1968, następnie książka J. Milnora, Introduction to algebraic K-theory, 1971 oraz trzy tomy Lecture Notes in. Math. 341, 342, 243. W pierwszym tomie znajduje się praca D. Quillena stwierdzająca, że różne określenia funktorów Grothendiecka, Whiteheada, Milnora podpadają pod wspólną dla wszystkich n naturalnych, homotopijną konstrukcję funktora K_n. Jako przełomowe należy uznać również wyniki J. Tate'a, ustalające ścisły związek pomiędzy algebraiczną K-teorią i algebraiczną teorią liczb. Na uwagę zasługuje tutaj hipoteza Bircha-Tate'a dotycząca ζ-funkcji Dedekinda (Kongres w Nicei (1970, oraz [3]).

Powyższe informacje o początkach rozwoju algebraicznej K-teorii są wspólne dla tego i następnego artykułu, który ukaże się w numerze 6.

Panu doc. dr hab. J. Browkinowi składam serdeczne podziękowania za wiele pomysłów wykorzystanych w obu artykułach.

2. Definicje funktorów K_1 i K_2.

Przyjmijmy, że słowo pieścień oznacza zawsze w tej pracy pierścień przemienny z jedynką.

Definicja 1 (Funktora K_1). Niech α oznacza ideał pierścienia A.

$GL_n(A)$ to grupa multyplikatywna odwracalnych macierzy kwadratowych stopnia n, o elementach z pierścienia A.

$E_n(A)$ — podgrupa grupy $GL_n(A)$, generowana przez macierze elementarne e_{ij}^b, tzn. macierze różniące się od macierzy jednostkowej I_n elementem $b \in A$, znajdującym się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, przy czym $i \neq j$.

$GL_n(A,\alpha) = \mathrm{Ker}(GL_n(A) \to GL_n(A/\alpha))$, gdzie strzałka oznacza homomorfizm grup, indukowany przez homomorfizm naturalny pierścieni $A \to A/\alpha$.

$E_n(A,\alpha)$ — podgrupa w $GL_n(A,\alpha)$, generowana przez elementy postaci STS^{-1}, gdzie T jest macierzą elementarną należącą do $GL_n(A,\alpha)$ a S — macierzą należącą do $E_n(A)$.

$U(A) = A^* = GL_1(A)$ — grupa jedności pierścienia A.

$U(A,\alpha) = GL_1(A,\alpha)$ — grupa jedności pierścienia A, przystających do jedynki modulo α.

$SL_n(A) = \mathrm{Ker}(GL_n(A) \xrightarrow{\det.} U(A))$.

$SL_n(A,\alpha) = SL_n(A) \cap GL_n(A,\alpha)$.

Granice proste powyższych grup, ze względu na hamomorfizmy $M \to \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, zapisujemy opuszczając indeks n; a więc GL(A), E(A), SL(A), GL(A,α), E(A,α), SL(A,α). Przyjmujemy

$K_1(A) = GL(A)/E(A)$, $K_1(A,\alpha) = GL(A,\alpha)/E(A,\alpha)$

oraz

$SK_1(A) = SL(A)/E(A)$, $SK_1(A,\alpha) = SL(A,\alpha)/E(A,\alpha)$.

Poprawność definicji funktorów K_1 i SK_1 wynika z poniższego twierdzenia oraz uwagi, że komutant grupy jest jej dzielnikiem normalnym.

Twierdzenie 1 (Whitehead, Bass [6], tw. 3.1 oraz tw. 4.3). Niech $[G_1,G_2]$ oznacza grupę generowaną przez komutatory $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$, gdzie g_i należy do grupy G_i, i=1,2. Podgrupa $E(A) \subset GL(A)$ jest równa komutantowi grupy GL(A). Podgrupa $E(A,\alpha) \subset GL(A,\alpha)$ jest równa $[GL(A), GL(A,\alpha)]$.

Uwaga. Homomorfizmy grup $GL_n(A) \xrightarrow{\det.} U(A)$ oraz $U(A) \hookrightarrow GL_n(A)$ dają rozkłady na sumy proste

$K_1(A) = U(A) \oplus SK_1(A)$ oraz $K_1(A,\alpha) = U(A,\alpha) \oplus SK_1(A,\alpha)$.

Twierdzenie 2 (Bass) [1], tw. 9.1). Jeżeli $\alpha \in \mathrm{rad}\, A$ lub A jest półlokalny, to dla każdego $n \geqslant 1$, homomorfizm zanurzenia

$GL_n(A,\alpha)/E_n(A,\alpha) \hookrightarrow K_1(A,\alpha)$ jest izomorfizmem.

Wniosek. Przy założeniach twierdzenia 2 mamy

(i) $K_1(A,\alpha)=U(A,\alpha)$,

(ii) $SK_1(A,\alpha)=1$,

(iii) $E_n(A,\alpha)=SL_n(A,\alpha)$, dla każdego $n \geqslant 1$.

Dowód. Równość pierwsza wynika wprost z def. 1, druga — z uwagi do twierdzenia 1 oraz z (i), trzecia — z (ii) oraz z def. 1.

Definicja 2 (Funktora K_2). Niech A będzie pierścieniem, n — liczbą naturalną, większą od 2. Grupę o generatorach x_{ij}^b ($b \in A$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$ i relacjach

1) $x_{ij}^b\, x_{ij}^c = x_{ij}^{b+c}$,

2) $[x_{ij}^b, x_{jl}^c] = x_{il}^{bc}$, $i \neq l$,

3) $[x_{ij}^b, x_{kl}^c] = 1$, $j \neq k$, $i \neq l$,

nazywamy grupą Steinberga $St_n(A)$. Innymi słowy, $St_n(A)$ jest grupą ilorazową H/K, gdzie H jest grupą wolną o generatorach x_{ij}^b a K — najmniejszym dzielnikiem normalnym takim, że w H/K spełnione są relacje 1) — 3). Ponieważ macierze elementarne $e_{ij}^b \in GL_n(A)$ również spełniają relacje 1) — 3), istnieją homomorfizmy g_n: $St_n(A) \to GL_n(A)$ określone następująco: $g_n(x_{ij}^b)=e$, dla każdego $n \geqslant 3$. Przechodząc do granicy prostej otrzymujemy homomorfizm g: $St(A) \to GL(A)$, gdzie St(A) jest granicą prostą ze względu na homomorfizmy $St(A) \to St_{n+1}(A)$. Przyjmujemy

Przyjmujemy

$$K_2(A)=\mathrm{Ker}\ g.$$

Uwaga. $St_1(A)=1$. Natomiast $St_2(A)$ oznacza grupę o generatorach x_{12}^b, x_{21}^c (b, c $\in$ A), spełniających relacje

1) $x_{ij}^b\, x_{ij}^c = x_{ij}^{b+c}$,

2) $w_{ij}(u)x_{ji}^b\, w_{ij}(-u)=x_{ij}^{-u^2b}$, gdzie u jest jednością pierścienia A oraz $w_{ij}(u)=x_{ij}^u\, x_{ji}^{-u^{-1}}\, x_{ij}^u$.

Dla $n \geqslant 3$ relacja 2) staje się twierdzeniem.

Wreszcie niech $h_{ij}(u)=w_{ij}(u)w_{ij}(-1)$, gdzie $u \in A$.

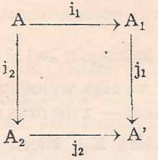
Definicję tą wykorzystamy w twierdzeniu 5.

3. Grupa $K_2(F_pC_pn)$.

Niech F_pC_pn oznacza pierścień grupowy, gdzie F_p to ciało p-elementowe a C_pn — grupa cykliczna o p^n elementach.

Udowodnimy, że $K_2(F_pC_pn)=1$ dla dowolnej liczby pierwszej $p>2$. W tym celu wykorzystamy znaczne ilości nietrywialnych faktów z algebry i algebraicznej K-teorii.

Definicja 3. Diagram przemienny homomorfizmów pierścieni



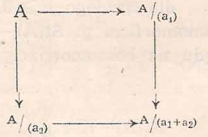
jest kwadratem kartezjańskim, jeżeli

a) dla dowolnych elementów $a_1 \varepsilon A_1$, $a_2 \varepsilon A_2$ o wspólnym obrazie w A' istnieje dokładnie jeden element $a \varepsilon A$ taki, że $i_1(a)=a_1$ oraz $i_2(a)=a_2$; tzn. A jest produktem włóknistym pierścieni A_1 i A_2 nad pierścieniem A', $A=A_1 \times_{A'} A_2$;

b) przynajmniej jeden z homomorfizmów j_1, j_2 jest surjekcją.

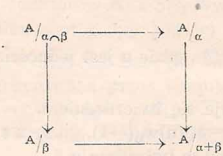
Twierdzenie 3. Jeżeli $A=ZC_{p^r}$, (a_1) i (a_2) są ideałami głównymi pierścienia A, generowanymi przez $a_1=t^{p^{r-1}(p-1)}+t^{p^{r-1}(p-2)}+\ldots+t^{p^{r-1}}+1$ oraz $A_2=t^{p^{r-1}}-1$, gdzie t oznacza generator grupy C_{p^r} i p jest liczbą pierwszą, to diagram homomorfizmów naturalnych

(1)



jest kwadratem kartezjańskim.

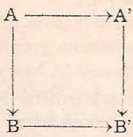
Dowód. Łatwo można udowodnić, że dla ideałów α, β dowolnego pierścienia A, diagram



jest kwadratem kartezjańskim. Wystarczy więc sprawdzić, że $(a_1) \cap (a_2)=0$.

Niech $x \varepsilon (a_1) \cap (a_2)$. Wtedy $x=a_1x_1=a_2x_2$, gdzie $x_1, x_2 \varepsilon A$. Pierścień ilorazowy $A/_{(a_i)}$ jest izomorficzny z $Z[\zeta_{p^r}]$, gdzie ζ_{p^r} jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia p^r. Wobec tego $\overline{a_1}=\overline{0}$ a zatem $\overline{a_2x_2}=\overline{0}$. Ponieważ $\overline{a_2} \neq \overline{0}$ i $Z[\zeta_{p^r}]$ jest pierścieniem bez dzielników zera mamy $\overline{x_2}=\overline{0}$. Stąd $x_2=a_1x_3$, gdzie $x_3 \varepsilon A$. Teza wynika z równości $a_1a_2=0$.

T w i e r d z e n i e 4 ([6], tw. 6.4). Niech $A' = {}^{A}/\alpha$, $B' = {}^{B}/\beta$, gdzie α, β są ideałami pierścieni A, B odpowiednio. Jeżeli diagram



w którym homomorfizmy poziome są naturalne i $A \to B$ jest surjekcją, jest kwadratem kartezjańskim, to istnieje ciąg dokładny postaci

(2) $K_2 \to K_2B \oplus K_2A' \to K_2B' \to K_1A \to K_1B \oplus K_1A' \to K_1B' \to \ldots$.

Występujący w twierdzeniu ciąg (2) nazywa się ciągiem dokładnym Mayera-Vietorisa.

T w i e r d z e n i e 5 [7]. Jeżeli A jest pierścieniem półlokalnym, mającym co najwyżej jedno ciało reszt izomorficzne z F_2, to grupa K_2A jest generowana przez elementy $\{u, v\} = h_{ij}(uv)h_{ij}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1}$, gdzie u, v są jednościami w A.

Niech G będzie grupą abelową, AG — pierścieniem grupowym nad pierścieniem A. Oznaczmy przez h odwzorowanie $AG \to A$, przeprowadzające dowolny element $a = a_1g_1 + \ldots + a_sg_s$ ($a_i \in A$, $g_i \in G$, $i = 1,\ldots,s$) należący do AG na $h(a) = a_1 + \ldots + a_s$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że h jest surjekcją pierścieni. Pokażemy, że element a należący do $F_pC_{p^n}$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy $h(a) = 0$. Załóżmy najpierw, że a jest odwracalny. Wtedy istnieje $a' \in F_pC_{p^n}$ taki, że $aa' = 1$. Stąd $1 = h(1) = h(aa') = h(a)h(a')$, co pociąga $h(a) = 0$. Niech teraz $h(a) = 0$. Ponieważ dla $a = a_1t^{e_1} + \ldots + a_st^{e_s}$ ($a_i \in F_p$, t jest generatorem C_{p^n}), $a^{p^n} = a_1{}^{p^n} + \ldots + a_s{}^{p^n} = a_1 + \ldots + a_s = h(a) \in F_p \setminus \{0\}$, więc istnieje $x \in F_p$ taki, że $xa^{p^n} = 1$. Równość ta oznacza, że elementem odwrotnym do a jest xa^{p^n-1}.

Powyższą równoważność sformułujemy inaczej: element $a \in F_pC_{p^n}$ jest nieodwracalny wtedy i tylko wtedy gdy $h(a) \neq 0$. Wynika stąd, że zbiór elementów nieodwracalnych jest ideałem pierścienia grupowego $F_pC_{p^n}$. Tym samym **$F_pC_{p^n}$ jest pierścieniem lokalnym.**

Uwaga. Analogicznie wykazuje się, że $F_{p^m}G$ jest pierścieniem lokalnym jeżeli G jest skończoną abelową p-grupą. Również dla dowolnej skończonej p-grupy G, pierścień grupowy F_pG jest lokalny 8.
Z twierdzenia 5 otrzymujemy następujący

Wniosek. Grupa $K_2(F_pC_{p^n})$ jest generowana przez symbole $\{u, v\}$, gdzie u, v są jednościami pierścienia grupowego $F_pC_{p^n}$.

W książce J. Milnora, z której zaczerpnięte jest następne twierdzenie, definicja grupy $K_1(A, \alpha)$ różni się od def. 1. Obie definicje są jednak równoważne na mocy lematu 4.2 w [6].

Twierdzenie 6. Niech α będzie ideałem pierścienia A i niech $A' = A/\alpha$. Istnieje ciąg homomorfizmów grup

$K_2A \to K_2A' \to K_1(A, \alpha) \to K_1A \to K_1A'$, który jest dokładny.

Wniosek. Niech R będzie pierścieniem. Niech dla ustalonego $i \geqslant 2$, f_i będzie homomorfizmem grup abelowych

$f_i: K_2(R[x]/(x^i)) \to K_2(R[x]/(x^i - 1))$, indukowanym przez homomorfizm naturalny pierścieni ilorazowych $R[x]/(x^i) \to R[x]/(x^i - 1)$. Wówczas ciąg

(3) $1 \to \operatorname{Ker} f_i \to K_2(R[x]/(x^i)) \xrightarrow{f_i} K_2(R[x]/(x^i - 1)) \to 1$ jest dokładny.

Dowód. Dowolny ideał maksymalny pierścienia $A = R[x]/(x^i - 1)$ zawiera warstwę $x^{i-1} + (x^i)$ a zatem ideał $\alpha = (x^{i-1}/(x^i))$ pierścienia A jest zawarty w rad A. Tym samym spełnione są założenia twierdzenia 2. Wniosek (i) do tego twierdzenia daje $K_1(A, \alpha) = U(A, \alpha)$. Ponadto, mamy $K_1(A) = U(A) \oplus SK_1(A)$ (uwaga do twierdzenia 1). Wynika stąd, że homomorfizm $K_1(A, \alpha) \to K_1(A)$ jest monomorfizmem, co razem z twierdzeniem 6 daje $\operatorname{Im}(K_2A') = 1$ a następnie, że $f_i: K_2A \to K_2A'$ jest epimorfizmem, gdzie $A' = A/\alpha = R[x]/(x^i - 1)$.

Definicja 4. Modułem Kählera różniczek algebry B z jedynką nad pierścieniem A nazywamy B-moduł $Q_{B/A}$ razem z A-różniczkowaniem $D: B \to Q_{B/A}$ spełniający własność uniwersalności.

Taki B-moduł konstruujemy następująco:

a) tworzymy B-moduł F wolny, generowany przez Db: $b \in B$,

b) dzielimy F przez jego podmoduł generowany przez wszystkie elementy postaci

1 $D(b + b') - Db - Db'$, dla $b, b' \in B$;

2) $D(bb') - bDb' - b'Db$, —"—;

3) Da, dla $a \in A$.

A-różniczkowanie określamy teraz wzorem $b \to Db$. Widać, że tak zbudowany B-moduł $Q_{B/A}$ posiada wymaganą własność uniwersalności.

Twierdzenie 7 [2]. Niech R będzie lokalną F_p-algebrą (p — liczba pierwsza, nieparzysta) i niech $W = Q_{R/F_p}$. Wówczas dla $i \geqslant 2$ mamy

(i) $\operatorname{Ker} f_i = W$, jeżeli $i \not\equiv 0, 1 \pmod p$,

(ii) $\operatorname{Ker} f_i = W \oplus R/R^{ps}$, jeżeli $i = mp^s$, $(p, m) = 1$,

(iii) $\operatorname{Ker} f_i = W/D_s$, jeżeli $i = mp^s + 1$, $(p, m) = 1$ oraz D_s jest podgrupą generowaną przez elementy postaci a^{pl-1} Da, $a \in R$, $0 \leqslant l \leqslant s - 1$.

Dla $i = 2$ twierdzenie 7 nie wymaga założeń o pierścieniu R. Wtedy $\operatorname{Ker} f_2 = TD(R)$ [5], gdzie grupa abelowa TD(R) jest R-modułem określonym za pomocą generatorów a, $b \in R$, Da, Fa i relacji

1 $D(ab) = aDb + bDa$,

2) $D(a+b)=Da+Db+F(ab)$,
3) $F(a+b)=Fa+Fb$,
4) $Fa=D(1+a)-Da$.

Istnieje naturalny epimorfizm R-modułów $(TD(R)\to Q_{R_Z}$, którego jądro jest podmodułem $TD(R)$ generowanym przez Fa, $a\varepsilon R$, Relacje 1) — 4) implikują, że $F(c^2a)=cFa$, dla wszystkich a, $c\varepsilon R$. Rzeczywiście, mamy ciąg równości $F(c^2a)=F(cca)=D(c+ca)-Dc-D(ca)=D(c(1++a))-Dc-cDa-aDc=cD(1+a)-cDa=cFa$, w którym druga równość jest konsekwencją relacji 2). Stąd $2Fa=0$ i $TD(R)=Q_{R_Z}$, jeżeli 2 jest jednością w R.

Wniosek. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Grupa $K_2(F_pC_pn)$ jest trywialna, dla każdej liczby naturalnej n.
Dowód. Zauważmy, że $F_pC_pn={}^Fp^{[x]}/_{(x^pn_{-1})}={}^Fp^{[x]}/_{(x-1)^pn}={}^Fp^{[y+1]}/_{(y^pn)}=$ $={}^Fp^{[y]}/_{(y^pn)}$. Ponieważ, dla $R=F_p$, $W=1$ oraz ${}^R/_K p^s=1$, twierdzenie 7 razem z ciągiem dokładnym (3) dają izomorfizmy
$K_2(F_pC_pn)=K_2({}^Fp^{[y]}/_{(y^pn)})=K_2({}^Fp^{[y]}/_{(y^pn^{-1})})=\ldots=K_2(F_p)$. Ale $K_2(F_p)=1$ na mocy wn. 9.13 w [6].

Uwaga. Można pokazać, wykorzystując tylko własności symbolu $\{u, v\}$, że również $K_2(F_2C_2)=1$ oraz, że $K_2(F_2C_4)$ jest albo grupą trywialną albo grupą dwuelementową.

4. Symbole Steinberga.

Wcześniej podaliśmy definicję grupy K_2A, gdzie A jest pierścieniem. Dla ciał prawdziwe jest następujące

T w i e r d z e n i e 8 (Matsumoto, [6], tw. 11.1). Jeżeli F jest ciałem, to $K_2F=(F^\cdot\oplus_zF^\cdot)/_P$, gdzie $F^\cdot$ oznacza grupę multyplikatywną ciała F oraz P — podgrupę $F^\cdot\oplus_zF^\cdot$ generowaną przez elementy postaci $a\oplus_z(1-a)$ $a\varepsilon F^\cdot-\{1\}$.

Innymi słowy K_2F jest grupą abelową o generatorach $\{a, b\}$, $a, b\varepsilon F^\cdot$ oraz relacjach

$\{a_1a_2, b\}=\{a_1, b\}\quad\{a_2, b\}$, $a_1, a_2, b\varepsilon F^\cdot$
$\{a, b_1b_2\}=\{a, b_1\}\quad\{a, b_2\}$, $a, b_1, b_2\varepsilon F^\cdot$
$\{a, 1-a\}=1$, $a\varepsilon F^\cdot-\{1\}$.

Wykażemy, że powyższe relacje implikują równości
(i) $\{a, -a\}=1$,
(ii) $\{a, b\}\{b, a\}=1$,
(iii) $\{a, b\}=\{a, a+b\}\quad\{a+b, b\}\{-1, a+b\}$, przy dodatkowym założeniu, że $a+b\neq 0$.

Dowód (i). $\{a, -a\}=\left\{a, \frac{1-a}{1-a^{-1}}\right\}=\{a, 1-a\}\left\{a, \frac{1}{1-a^{-1}}\right\}=\{a, 1-a^{-1}\}^{-1}=$ $=\{a^{-1}, 1-a^{-1}\}=1$, jeżeli $a\neq 1$. Oczywiście, $\{1, -1\}=1$.

Dowód (ii). $\{a, b\}\{b, a\} = \{a, b\}\{-b, b\}\ \{-a, a\}\{b, a\} = \{-ab, b\}$ $\{-ab, a\} = \{-ab, ab\} = 1$.

Dowód (iii). Mamy

$$1 = \left\{\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right\} = \{a, b\}\{a, a+b\}^{-1}\{a+b, b\}^{-1}\{a+b, a+b\},$$ co daje tezę, ponieważ $\{a+b, a+b\} = \{-1, a+b\}$ na mocy (i) oraz (ii).

Definicja 5. Niech F^* będzie grupą multyplikatywną ciała F, C — grupą abelową. **Symbolem Steinberga** nazywamy odwzorowanie $f: F^* \times F^* \to C$, bimultyplikatywne i spełniające warunek $f(a, 1-a) = 1$, dla każdego $a \in F^* - \{1\}$. Z twierdzenia 8 wynika, że odwzorowanie $\{,\}: F^* \times F^* \to K_2F$ jest uniwersalnym symbolem Steinberga, tzn. jeśli $f: F^* \times F^* \to C$ jest symbolem Steinberga, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h: K_2F \to C$ taki, że $h: \{a, b\} \to f(a, b)$, dla wszystkich $a, b \in F^*$.

Spośród symboli Steinberga wyróżnimy symbole Hilberta i tzw. symbole swojskie.

Jeżeli L jest rozszerzeniem ciała K, v — waluacją ciała K, w — waluacją ciała L będącą przedłużeniem waluacji v, to ciało zupełne względem waluacji v(w) oznaczać będziemy przez $K_v(L_w)$. Oczywiście, $K_v(L_w)$ jest rozszerzeniem K(L) odpowiednio oraz L_w jest rozszerzeniem K_v.

Definicja 6. Niech $u(K_v)$ oznacza grupę wszystkich (m_v) pierwiastków z jedynki należących do ciała K_v i niech $\operatorname{char} K_v / m_v$.

Symbolem Hilberta nazywamy odwzorowanie $[,]_v: K^*_v \times K^*_v \to u(K^*_v)$, określone na dowolnym elemencie $(a,b) \in K^*_v \times K^*_v$ wzorem $[a,b]_v = d^{-1}s(d)$, gdzie $d = b^{\frac{1}{m_v}}$ i s jest K_v — automorfizmem ciała $L_w = K_v(d)$, przyporządkowanym elementowi $a + NL^*_w \in K^*_v / NL^*_w$ poprzez izomorfizm kanoniczny Θ określony w lokalnej teorii ciał klas [4].

Niech $v = \infty$ będzie waluacją rzeczywistą, w — waluacją zespoloną. Załóżmy, że L jest rozszerzeniem algebraicznym ciała liczbowego K. Wtedy $K_v = R$, $L_w = C$, $m_v = 2$, $G(L_w/K_v) = G(C/R) = \langle 1, s \rangle$, gdzie R(C) jest ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych), G — grupą Galois oraz s jest R — automorfizmem takim, że $s(i) = -i$. Ponieważ $N_{C/R}(a+bi) = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqslant 0$, grupa NC^* jest równa grupie multyplikatywnej liczb rzeczywistych dodatnich. Zatem izomorfizm $\Theta: R^*/NC^* \to G(C/R)$ ma postać $\Theta(a/NC^*) = s^j$, gdzie $j = 0,1$ w zależności od tego czy a jest dodatnie $(j=0)$ czy ujemne $(j=1)$. Dalej, dla $b \in R^*$, $s(b^{\frac{1}{2}}) = \pm b^{\frac{1}{2}}$ w zależności od tego czy b jest dodatnie (+) czy ujemne (—). Wobec tego

$[a, b]_\infty = -1$, jeżeli $a < 0$ i $b < 0$, oraz

$[a, b]_\infty = 1$ w przeciwnym przypadku.

Aby stwierdzić, że symbol Hilberta $[\ ,\ ]_v$ jest symbolem Steinberga wykorzystamy poniższy, czysto-algebraiczny fakt.

Lemat. Niech F będzie ciałem charakterystyki $l \geqslant 0$, zawierającym m-ty pierwiastek z jedynki, l|m. Niech a, b ε F. Jeżeli $a+b \varepsilon F^m$, to a jest normą pewnego elementu należącego do ciała $F(b^{\frac{1}{m}})$,

Dowód. Niech $a+b=c^m$, $c \varepsilon F$. Stąd $a=c^m-b$. Rozróżniamy dwa przypadki.

a) $(F(b^{\frac{1}{m}}):F)=m$. Wtedy wielomian x^m-b jest nieprzywiedlny w F[x] i jego pierwiastki generują $F(b^{\frac{1}{m}})$. Mamy więc $x^m-b=\prod_{i=1}^{m}(x-\zeta_m^i b^{\frac{1}{m}})$, gdzie ζ_m oznacza pierwiastek pierwotny stopnia m z jedynki.
Kładąc x=c otrzymamy, że $c^m-b=a$ jest normą.

b) $(F(b^{\frac{1}{m}}):F)=j<m$. Wtedy podstawiając $\frac{m}{j}=k$ otrzymamy $x^m-b=\prod_{i=1}^{m}(x-\zeta_m^i b^{\frac{1}{m}})=N_{L_F}\left[\prod_{i=1}^{k}(x-\zeta_k^i b^{\frac{1}{m}})\right]$, gdzie $L=F(b^{\frac{1}{m}})$.
Podstawienie x=c kończy dowód.

Własności symbolu Hilberta.

1. $[a, b]_v=1$ wtedy i tylko wtedy gdy a jest normą elementu z $K_v(b^{\frac{1}{m_v}})$.
2. $[a,b]_v=1$, jeżeli $a \varepsilon (K_v^*)^{m_v}$.
3. $[a_1a_2, b]_v=[a_1, b]_v[a_2, b]_v$;
   $[a, b_1b_2]_v=[a, b_1]_v[a, b_2]_v$;
   $[a, 1-a]_v=1$.
4. $[-a, a]_v=1$.
5. $[a, b]_v[b, a]_v=1$.
6. $[a, b]_v=[a, a+b]_v[a+b, b]_v[-1, a+b]_v$.

Dowód. Dwie pierwsze własności i bimultyplikatywność otrzymuje się bezpośrednio z definicji symbolu Hilberta. Równość $[a, 1-a]_v=1$ wynika z lematu oraz własności 1. Tak więc symbol Hilberta jest szczególnym przypadkiem symbolu Steinberga. A zatem prawdziwe są również kolejne własności 4., 5., 6..
Inne określenia symbolu Hilberta znajdują się w [9] i [10].

D e f i n i c j a 7. Nie v będzie waluacją dyskretną ciała F, β — ideałem maksymalnym odpowiadającym waluacji v. **Symbolem swojskim** nazywamy odwzorowanie $(,)_v: F^* \times F^* \to \bar{F}_v^*$ określone wzorem
$(a, b)_v=(-1)^{v(a)v(b)}a^{v(b)}b^{-v(a)}$ (mod. β).

Własności symbolu swojskiego.

1. $(a_1a_2, b)_v=(a_1, b)_v(a_2, b)_v$
   $(a, b_1b_2)_v=(a, b_1)_v(a, b_2)_v$;
   $(a, 1-a)_v=1$.
2. $(a, -a)_v=1$.
3. $(a, b)_v(b, a)_v=1$.
4. $(a, b)_v=(a, a+b)_v(a+b, b)_v(-1, a+b)_v$.

Dowód. Wystarczy udowodnić pierwszą własność, która oznacza, że symbol swojski jest symbolem Steinberga. Bimultyplikatywność jest natychmiastową konsekwencją własności waluacji $v(ab)=v(a)+v(b)$. Dowód równości $(a, 1-a)_v=1$ wymaga rozpatrzenia kilku przypadków:

Jeśli $v(a)>0$, to $a \varepsilon \beta$ czyli $1-a=1 \pmod{\beta}$ i $v(1-a)=0$.

Stąd $(-1, v(a)v(1-a)a^{v(1-a)}(1-a)^{-v(a)}=(1-a)^{-v(a)}=1 \pmod{\beta}$.

W przypadku $v(1-a)>0$ dowód przebiega analogicznie.

Załóżmy teraz, że $v(a)<0$. Wtedy $a^{-1} \varepsilon \beta$ czyli ułamek $\frac{1-a}{a}=-1+a^{-1}=$ $=-1 \pmod{\beta}$. Dlatego $v(1-a)=v(a)$ i $a^{v(1-a)}(1-a)^{-v(a)}=\frac{1-a}{a}^{-v(a)}=$ $=(-1)^{-v(a)} \pmod{\beta}$. Mnożąc obustronnie przez $(-1)^{v(a)v(1-a)}=(-1)^{v(a)}$ otrzymujemy, że $(a, 1-a)_v=1 \pmod{\beta}$. Przypadek $v(1-a)<0$ bada się analogicznie. Ostatni przypadek $v(a)=v(1-a)=0$ jest trywialny.

Ustalmy waluację dyskretną v z odpowiadającym jej ideałem maksymalnym. Obierzmy liczbę całkowitą $b \varepsilon F$ taką, aby $b \varepsilon \beta-\beta^2$. Oczywiście, $v(b)=1$. Niech a przebiega niezerowe reszty modulo ideał β. Oczywiście, $v(a)=0$. Mamy $(a, b)_v=a \pmod{\beta}$ a zatem symbol swojski przebiega wszystkie reszty niezerowe modulo β.

Wróćmy do oznaczeń definicji 6 i obierzmy $b \varepsilon K_v$ takie, aby $(L_w:K_v)=m_v$. Wtedy grupa Galois $G(L_w/K_v)$ jest cykliczna, rzędu m_v. Niech s będzie generatorem grupy G. Mamy $s(b^{\frac{1}{m_v}})=\zeta b^{\frac{1}{m_v}}$, gdzie ζ jest pierwiastkiem pierwotnym zjedynki stopnia m_v. Znajdujemy $a \varepsilon K_v$ takie, że $\Theta: (a+NL_w) \to s$. Wobec tego $[a, b]_v=\zeta$.

Stwierdziliśmy więc, że oba symbole Hilberta i swojski są „na".

LITERATURA

[1] H. Bass, Algebraic K-theory, New York 1968.

[2] S. Bloch, Algebraic K-theory and crystaline cohomology, Publications Mathematiques, nr 47, 1977 (rozdz. II, tw. 4.1).

[3] J. Browkin, Funktor K_2 w algebraicznej teorii liczb, Prace matematyczne t. 10, Katowice 1980. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 332.

[4] J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Algebraic number theory, London 1967 (rozdz. VII, § 9).
[5] W. van der Kallen, Le K_2 des nombres duaux, C. R. Ac. Sc. Paris 1971, t. 273 (str. 1204—1207).
[6] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Princeton 1971.
[7] M. R. Stein, Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors, Trans. Amer. Math. Soc. 1973, nr 178 (tw. 2.13).
[8] D. S. Rim, Ann. of Math. 1959, nr 69, (str. 700—712).
[9] J. Tate, Inventiones Math., 1976, nr 36 (str. 257—274).
[10] J. P. Serre, Corps locaux, Paris 1962.

S. CHAŁADUS

THE FUNCTOR K_2 FOR SELECTED RINGS
PART I

Summary

Let F_p be the field of p elements and let F_pC_pn denotes the group ring with the cyclic group of the order p^n. The paper contains the complete proof of the following theorem: If p is an odd prime number, then $K_2(F_pC_pn)=1$ for any natural number n. Moreover, we investigate Hilbert symbols and tame symbols and prove that they are Steinberg symbols in particular.