PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 1/1978 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

O promieniu wypukłości pewnej rodziny funkcji meromorficznych w kole jednostkowym

Zygmunt Pachulski

W pracy tej rozważa się klasę funkcji $\sum_\alpha^*(\beta)$ zdefiniowanej warunkiem (1.2). Korzystając ze związku między funkcjami klasy $\sum_\alpha^*(\beta)$ i klasy P funkcji o dodatniej części rzeczywistej wyznaczono promień wypukłości klasy $\sum_\alpha^*(\beta)$.

1. Oznaczmy przez P klasę funkcji postaci:

$$p(z) = 1+p_1z+p_2z^2+\ldots$$

holomorficznych w kole $K = \{z: |z| < 1\}$ i dla każdego $z \in K$ spełniających warunek $\operatorname{re} p(z) > 0$.

Podklasę m — symetrycznych funkcji klasy p, gdzie $m \geqslant 1$ jest ustaloną liczbą naturalną oznaczmy symbolem $P(m)$.

Niech $\sum$ oznacza klasę funkcji F meromorficznych i jednolistnych w kole K i w otoczeniu $z = 0$ mających rozwinięcie postaci:

$$w = F(z) = \frac{1}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\ldots$$

W klasie $\sum$ wyróżniamy dwie podklasy: podklasę $\sum^*$ funkcji $w = F(z)$ odwzorowujących koło K na obszarach, których dopełnienia do płaszczyzny są zbiorami gwiaździstymi względem punktu $w = 0$, oraz podklasę $\sum_\alpha^*$ funkcji F takich, że przy dowolnie ustalonym α, $0 \leqslant \alpha < 1$, spełniony jest dla każdego $z \in K$ warunek:

$$\operatorname{re}[-z F'(z)/F(z)] > \alpha \tag{1.1}$$

Okazuje się, że $F \in \sum_\alpha^*$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $p \in P$ taka, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość:

$$-zF'(z)/F(z) = (1-\alpha)p(z)+\alpha \quad \text{(por. np. [4] str. 518)}$$

Niech wreszcie $\sum_\alpha^*(\beta)$ oznacza klasę funkcji $F \in \sum$, spełniających dla każdego $z \in K$ warunek:

$$-\frac{zF'(z)}{F(z)} = [(1-\alpha)p(z)+\alpha]^\beta \tag{1.2}$$

gdzie:

$p \in P$ oraz $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$ są dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi a przez $[(1-\alpha)p(z)+\alpha]^\beta$ rozumiemy gałąź główną odpowiedniej potęgi.

2. Oznaczmy: $r(F) = \sup\left\{r : re\left[-\left(1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right] > 0,\ |z| < r\right\}$. Liczbę $r^c\left[\sum_\alpha^*(\beta)\right] = \inf\{r(F) : F \in \sum_\alpha^*(\beta)\}$ nazywać będziemy promieniem wypukłości klasy $\sum_\alpha^*(\beta)$.

Można wykazać, że rodzina $\sum_\alpha^*(\beta)$ jest zwarta, więc promień wypukłości tej rodziny jest równy największej wartości r, $0 < r \leqslant 1$ dla której

$$re\left[-\left(1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right] \geqslant 0$$

dla każdego z należącego do koła $|z| \leqslant r$ i dla każdej funkcji $F \in \sum_\alpha^*(\beta)$.

Promień wypukłości $r^c\left[\sum_\alpha^*(\beta)\right]$ jest więc równy najmniejszemu pierwiastkowi r_0, $0 < r_0 \leqslant 1$ równania $\omega(r) = 0$, gdzie

$$\omega(r) = \min\left\{\mathrm{re}\left[-\left(1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right] : |z| = r < 1, F \in \sum_\alpha^*(\beta)\right\}. \tag{2.1}$$

Z warunku (1.2) wynika, że dla każdej funkcji $F \in \sum_\alpha^*(\beta)$ istnieje funkcja $p \in P$ taka, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość:

$$-\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right] = [(1-\alpha)p(z)+\alpha]^\beta - \frac{\beta(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha}.$$

Stąd i z poprzedniej równości na podstawie [3] mamy:

$$\omega(r) = \min\left\{\mathrm{re}\left[((1-\alpha)p^*(z)+\alpha)^\beta - \frac{\beta(1-\alpha)zp'^*(z)}{(1-\alpha)p^*(z)+\alpha}\right] : |z| = r < 1,\ p^* \in P_2\right\} \tag{2.2}$$

gdzie: P_2 jest klasą funkcji postaci:

$$p^*(z) = \frac{1+\lambda}{2}\,\frac{1+\varepsilon_1 z}{1-\varepsilon_1 z} + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{1+\varepsilon_2 z}{1-\varepsilon_2 z}$$

przy czym $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$.

Korzystając z lematu 1 i 2 (por. [1] str. 70) i przyjmując $h = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ z (2.2) otrzymujemy:

$$\omega(r) = \min\left\{\mathrm{re}\left[\left(\frac{p^*(z)+h}{1+h}\right)^\beta - \beta\frac{(p^*(z)^2-1)}{2(p^*(z)+h)} + \beta\frac{(\varrho^2-|p^*(z)-c|^2)\eta}{2(p^*(z)+h}\right] : \right. \tag{2.3}$$
$$\left. |z| = r < 1,\ p^* \in P_2\right\},$$

gdzie: $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$c = \frac{1+r^2}{1-r^2},\quad \varrho = \frac{2r}{1-r^2}, \tag{2.4}$$

oraz $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ przy czym

$$\eta_k = \varepsilon_k e^{i\varphi}\frac{1-\bar{\varepsilon}_k e^{-i\varphi} r}{1-\varepsilon_k e^{i\varphi} r};\quad k = 1,2;\ |\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1.$$

Przyjmując $p^*(re^{i\varphi})+h = s^{it}$ i korzystając z nierówności $re(e^{-it}\cdot\eta) \geqslant -1$ oraz z równości

$$\varrho^2-|se^{it}-h-c|^2 = 2hs\cos t+2cs\cos t-s^2-h^2-2hc-1$$

z (2.3) otrzymamy

$$\omega(r) \geqslant \min_{s,t} L(s,t)$$

gdzie funkcja:

$$L(s,t) = \frac{s^\beta\cos\beta t}{(1+h)^\beta}+\beta\frac{1-h^2-s^2}{2s}\cos t+\beta h-\beta(h+c)\cos t+\beta\frac{s^2+h^2+2hc+1}{2s} \tag{2.5}$$

jest określona w kole D_r, przy czym

$$D_r = \Big\{(s,t): s^2-2s(c+h)\cos t+h^2+2hc+1 \leqslant 0;\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$c+h-\varrho \leqslant s \leqslant c+h+\varrho\Big\}$$

Bezpośrednie wyliczenia (por. np. [4] str. 524) pozwalają stwierdzić, że funkcja $L(s,t)$ może osiągnąć minimum w kole D_r tylko na średnicy $t = 0$.

Problem wyznaczenia minimum funkcji $\omega(r)$ sprowadza się więc do wyznaczenia minimum funkji $L_1(s) = L(s,0)$ na przedziale $[c+h-\varrho, c+h+\varrho]$

Zachodzą następujące lematy:

Lemat 1. Funkcja

$$L_1(s) = \frac{s^\beta}{(1+h)^\beta}+\beta\frac{1+hc}{s}-\beta c$$

osiąga w punkcie

$$s_1 = c+h+\varrho \tag{2.6}$$

minimum absolutne na przedziale $[c+h-\varrho, c+h+\varrho]$ jeśli spełniona jest nierówność $s_1 \leqslant s_2$, gdzie

$$s_2 = (1+h)^{\frac{\beta}{1+\beta}}(1+hc)^{\frac{1}{1+\beta}}. \tag{2.7}$$

Jeżeli natomiast $s_1 > s_2$, to funkcja $L_1(s)$ osiąga to minimum w punkcie s_2. Minimum to wynosi odpowiednio:

$$M_1(r) = M_1(r;\beta,h) = \frac{(c+h+\varrho)^{1+\beta}+\beta(1+h)^\beta(1+hc)}{(1+h)^\beta(c+h+\varrho)}-\beta c \tag{2.8}$$

$$M_2(r) = M_2(r;\beta,h) = (1+\beta)\left(\frac{1+hc}{1+h}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}-\beta c. \tag{2.9}$$

Lemat 2. Dla każdej funkcji $F \in \sum_\alpha^*(\beta)$ i dla każdego ustalonego z, $|z| = r$, $0 < r < 1$ oraz przy ustalonych α i β zachodzi dokładne oszacowanie

$$re\left\{-\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right]\right\} \geqslant \begin{cases} M_1(r), \text{ gdy } s_1 \leqslant s_2 \\ M_2(r), \text{ gdy } s_1 > s_2, \end{cases} \tag{2.10}$$

gdzie: s_1, s_2, $M_1(r)$, $M_2(r)$ określone są odpowiednio wzorami (2.6)—(2.9). Równości w oszacowaniu (2.10) realizują odpowiednio funkcje postaci:

$$F_1(z) = \frac{1}{z} exp \int_0^z \left[1 - \left(\frac{1+(1-2\alpha)e^{-i\varphi}\mathfrak{z}}{1-e^{-i\varphi}\mathfrak{z}}\right)^{\beta}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}. \tag{2.11}$$

$$F_2(z) = \frac{1}{z} exp \int_0^z \left[1 - \left(\frac{1+2K(1-\alpha)e^{-i\varphi}\mathfrak{z}+(1-2\alpha)e^{-2i\varphi}\mathfrak{z}^2}{1-e^{-2i\varphi}\mathfrak{z}^2}\right)^{\beta}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \tag{2.12}$$

gdzie: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

natomiast:

$$K = \frac{(s_2-h)(1-r^2)-(1+r^2)}{2r}.$$

3. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Oznaczmy przez r_0 jedyny w przedziale (0,1) pierwiastek równania

$$\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \beta(1+r)(1-r^2)^{\frac{1}{\beta}} + (1+r^2)[r^2-(1+\beta)r-\beta] = 0 \tag{3.1}$$

a przez α_0 oznaczmy wyrażenie

$$\alpha_0 = \frac{(1+r_0)[r_0^2-(2\beta+2)r_0+1]}{2r_0[r_0^2-(1+\beta)r_0-\beta]} \tag{3.2}$$

gdzie: $\beta \in (0, 1]$ jest dowolnie ustaloną liczbą.

Promień wypukłości funkcji klasy $\sum_{\alpha}^{*}(\beta)$ określony jest wówczas wzorem:

$$r^c\left[\sum\nolimits_{\alpha}^{*}(\beta)\right] = \begin{cases} r_1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \\ r_2 & \text{dla} \quad \alpha_0 \leqslant \alpha < 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

gdzie: r_2 jest jedynym w przedziale (0, 1) pierwiastkiem równania

$$\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1+\beta}(1-r^2+h+hr^2)(1-r^2)-(1+r^2)^{1+\beta}(1+h)^{\beta} = 0, \tag{3.4}$$

r_1 jest jedynym w przedziale (0,1) pierwiastkiem równania

$$(1+r+h-hr)^{1+\beta}(1-r)^{1-\beta}-2\beta(1+h)^{\beta}r = 0 \tag{3.5}$$

Ekstremalne funkcje mają odpowiednio postać (2.12) i (2.11)

Dowód. Z lematu 2 i wzoru (2.1) wynika, że promień wypukłości funkcji klasy $\sum_{\alpha}^{*}(\beta)$ należy wyznaczyć z równania $M_1(r) = 0$ w przypadku, gdy spełniona jest nierówność $s_1 \leqslant s_2$ lub z równania $M_2(r) = 0$ w przypadku, gdy spełniona jest nierówność $s_1 > s_2$.

Można wykazać, że wartość α_0 określona wzorami (3.1) i (3.2) spełnia dla każdego $\beta \in (0,1]$ nierówność $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ oraz, że dla dowolnie ustalonych $\beta \in (0, 1]$, $\alpha \in [0, \alpha_0)$ zachodzi nierówność $s_1 > s_2$, dla dowolnie ustalonych $\beta \in (0,1]$ i $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ zachodzi nierówność $s_1 < s_2$, natomiast dla $\alpha = \alpha_0$ zachodzi równość $s_1 = s_2$. Rozwiązując odpowiednie równania $M_2(r) = 0$ i $M_1(r) = 0$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Wniosek. Przyjmując $\beta = 1$ otrzymujemy z ostatniego twierdzenia promień wypukłości funkcji klasy $\sum_\alpha^*$ wyznaczony przez W. A. Zmorowicza (por. [4] str. 524), przyjmując $\alpha = 0$ otrzymujemy promień wypukłości funkcji klasy $\sum^*(\beta)$ dla $m = 1$:

$$r^c\left[\sum^*(\beta)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+2\beta}} \text{ (por. [1] str. 81),}$$

natomiast w przypadku $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ otrzymujemy wynik M. Robertsona dla $\sum^*$, $r^c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (por. [3] str. 239).

Literatura

1. Z. Pachulski — *On Exstremal Problems of Some Family of Meromorphic Functions*, Acta Univ. Lod., Folia Math., Seria II, Nr 17, 63—84 (1977).
2. Ch. Pommerenke — *On meromorphic starlike functions*. Pac. Jour. of Math., 13, 221—235 (1963).
3. M. S. Robertson — *Exstremal problems for analytic functions with positive real part and aplications*, Trans. Amer. Math. Soc., 106, (2), 236—253 (1963).
4. V. A. Zmorovič — *O granicach wypuklosti zvezdnych funkcji porjadka α vkruge $|z| < 1$ i krugovoj obłasti $0 < |z| < 1$*, Mat. Sb. 68 (110), (4), 518—526, (1965).

З. Пахульски

О границах выпуклости одного класса мероморфных функций в единичном круге

Содержание

В работе обсуждается класс функций $\Sigma_\alpha^*(\beta)$ выполняющих условие (1.2). Пользуясь связями между классом $\Sigma_\alpha^*(\beta)$ и классом P функций о положительной вещественной части получено радиус выпуклости класса $\Sigma_\alpha^*(\beta)$.

Z. Pachulski

On the radius of convexity for certain family of funcctions meromorphic in the unit disc

Summary

A class of funcions $\Sigma_\alpha^*(\beta)$ defined by condition (1.2) was discussed. Utilizing the relation between the class $\Sigma_\alpha^*(\beta)$ and the class P of functions with positive real part the radius of convexity of the class $\Sigma_\alpha^*(\beta)$ was determined.