

O pewnej klasie funkcji meromorficznych w kole jednostkowym

Zygmunt Pachulski

W pracy tej rozważa się klasę funkcji $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ zdefiniowanej warunkiem (1.1). Korzystając ze związku między funkcjami klasy $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$, a klasy P funkcji o dodatniej części rzeczywistej otrzymano oszacowanie pewnych funkcjonałów w klasie $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$.

1. Oznaczmy przez P klasę funkcji postaci

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

holomorficznych w kole $K = \{z: |z| < 1\}$ i dla każdego $z \in K$ spełniających warunek $\operatorname{re} p(z) > 0$.

Niech $\sum$ oznacza klasę funkcji F meromorficznych i jednolistnych w kole K i w otoczeniu $z = 0$ mających rozwinięcie postaci:

$$w = F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Przez $\sum^*$ oraz $\sum_{\alpha}^*$ oznaczać będziemy odpowiednio podklasę rodziny $\sum$ funkcji gwiazdzystych i gwiazdzystych rzędu α , gdzie α jest dowolnie ustaloną liczbą przedziału $[0, 1)$.

Symbolami $P(m)$, $\sum(m)$, $\sum^*(m)$, $\sum_{\alpha}^*(m)$ oznaczać będziemy podklasy m — symetrycznych funkcji odpowiednio klas P , $\sum$, $\sum^*$ i $\sum_{\alpha}^*$.

Niech $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ oznacza klasę funkcji $F \in \sum$ spełniających dla każdego $z \in K$ warunek

$$(1.1) \quad -\frac{zF'(z)}{F(z)} = [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\beta},$$

gdzie:

$p \in P(m)$ oraz $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1$ są dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi, m — dowolnie ustaloną liczbą naturalną a przez $[(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\beta}$ rozumiemy gałąź główną odpowiedniej potęgi.

Klasa $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ jest uogólnieniem takich klas jak $\sum^*(\beta, m)$ i $\sum_{\alpha}^*(\beta)$ omawianych odpowiednio w pracach [3] i [4].

W pracy tej korzystając ze związku między funkcjami klasy $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ a klasy $P(m)$ otrzymano oszacowania pewnych funkcjonałów w klasie $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$.

2. Zachodzi następujący lemat.

Lemat 2.1. Funkcja F należy do klasy $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $p \in P(m)$ taka, że dla każdego $z \in K$ i $z \neq 0$ zachodzi równość:

$$(2.1) \quad F(z) = \frac{1}{z} \exp \int_0^z \frac{1 - [(1-\alpha)p(\zeta) + \alpha]^{\beta}}{\zeta} d\zeta.$$

Dowód. Z warunku (1.1) otrzymujemy

$$\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{1}{z} = \frac{1 - [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\beta}}{z}.$$

Całkując obie strony ostatniej równości względem z , w granicy od 0 do z , mamy

$$(2.2) \quad \log [zF(z)] = \int_0^z \frac{1 - [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\beta}}{z} dz$$

gdzie:

$\log [zF(z)]$ oznacza jednoznaczną gałąź $l(z)$ funkcji wieloznacznej $L(z) = \log [zF(z)]$, dla której zachodzi równość $l(0) = 0$. Z równości (2.2) wynika wzór (2.1).

Udowodnimy następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.1. Obszarem wartości funkcjonału

$$H(F) = \left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

określonego w klasie funkcji $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$, przy ustalonym $z \in K$, $|z| = r$, oraz przy ustalonych α, β, m , jest koło

$$(2.3) \quad \left| \left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}} - \frac{1 + (1-2\alpha)r^{2m}}{1-r^{2m}} \right| \leq \frac{2(1-\alpha)r^m}{1-r^{2m}}.$$

Obieramy tu tę gałąź $l(z)$ funkcji wieloznacznej

$$L(z) = \left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

dla której zachodzi równość $l(0) = 1$. Oszacowanie (2.3) jest dokładne. Znak równości w tym oszacowaniu realizuje funkcja postaci

$$(2.4) \quad F(z) = \frac{1}{z} \exp \int_0^z \left[1 - \left(\frac{1 + (1-2\alpha)\varepsilon\zeta^m}{1-\varepsilon\zeta^m} \right)^{\beta} \right] \frac{d\zeta}{\zeta}$$

dla $|\varepsilon| = 1$.

Dowód. Z zależności (1.1) wynika, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość

$$\left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}} = (1-\alpha)p(z) + \alpha,$$

gdzie: p jest pewną funkcją rodziny $P(m)$.

Stąd, korzystając ze wzoru Riesza-Herglotza, (por. np [2] str. 583), otrzymujemy

$$(2.5) \quad \left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \int_0^{2\pi} \frac{1+(1-2\alpha)e^{-it}z^m}{1-e^{-it}z^m} d\mu(t),$$

gdzie: $\mu(t)$ jest funkcją niemalejącą na przedziale $[0, 2\pi]$ i taką, że

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1.$$

Z (2.5) oraz z twierdzeń 1 i 2, ([1] str. 32), wynika, że zbiorem wartości funkcyjonału

$$H(F) = \left[-\frac{zF'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

określonego w klasie $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$, przy ustalonym $z \in K$, jest wypukłą otoczką krzywej

$$w = \frac{1+(1-2\alpha)e^{-it}z^m}{1-e^{-it}z^m},$$

gdzie: $0 \leq t \leq 2\pi$.

Równanie tej krzywej można zapisać w postaci

$$\left| \frac{w-1}{w+(1-2\alpha)} \right| = r^m,$$

gdzie: $r = |z|$.

Wynika stąd, że rozważana krzywa jest okręgiem o środku w punkcie

$$w_0 = \frac{1+(1-2\alpha)r^{2m}}{1-r^{2m}}$$

i promieniu

$$R_0 = \frac{2(1-\alpha)r^m}{1-r^{2m}}.$$

Stąd z kolei wnosimy, że zbiorem wartości badanego funkcyjonału jest koło domknięte określone nierównościami (2.3).

W klasie $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ istnieje funkcja dla której, w pewnym punkcie okręgu $|z| = r$, zachodzi znak równości w oszacowaniu (2.3). Funkcję tę otrzymujemy

podstawiając w (2.1) w miejsce $p(z)$ funkcję

$$p_0(z) = \frac{1 + \varepsilon z^m}{1 - \varepsilon z^m}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

która jest funkcją ekstremalną względem ciągłego rzeczywistego funkcjonału $F[p(z)]$ określonego w klasie $P(m)$. W wyniku tego otrzymamy funkcję postaci (2.4), która realizuje znak równości w oszacowaniu (2.3) dla $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, przy $\varepsilon = e^{-im\varphi}$.

Wniosek 2.1. Jeżeli $F \in \sum_{\alpha}^*(\beta, m)$, wówczas dla każdego ustalonego $z \in K$, $|z| = r$, oraz przy ustalonych α , β i m , zachodzą dokładne oszacowania

$$(2.6) \quad \left(\frac{1 - (1 - 2\alpha)r^m}{1 + r^m} \right)^{\beta} \leq \operatorname{re} \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] \leq \left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)r^m}{1 - r^m} \right)^{\beta}.$$

$$(2.7) \quad \left(\frac{1 - (1 - 2\alpha)r^m}{1 + r^m} \right)^{\beta} \leq \left| \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] \right| \leq \left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)r^m}{1 - r^m} \right)^{\beta}.$$

$$(2.8) \quad \left| \arg \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] \right| \leq \beta \arcsin \frac{2(1 - \alpha)r^m}{1 + (1 - 2\alpha)r^{2m}}.$$

Znaki równości po lewych i prawach stronach w oszacowaniach (2.6) i (2.7) realizuje funkcja postaci (2.4) dla $z = r$, odpowiednio przy $\varepsilon = -1$ oraz $\varepsilon = 1$, natomiast znak równości w oszacowaniu (2.8) realizuje funkcja postaci (2.4) dla $z = r$, $\varepsilon = e^{it}$, przy odpowiednio dobranej wartości parametru t .

Oszacowania te są bezpośrednią konsekwencją interpretacji geometrycznej zbioru wartości funkcjonału $\left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right]^{\frac{1}{\beta}}$ określonego w klasie $\sum_{\alpha}^*(\beta, m)$.

Wniosek 2.2. Jeżeli $F \in \sum_{\alpha}^*(m)$, wówczas dla każdego ustalonego $z \in K$, $|z| = r$ oraz przy ustalonych α i m zachodzą dokładne oszacowania

$$\frac{1 - (1 - 2\alpha)r^m}{1 + r^m} \leq \operatorname{re} \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] \leq \frac{1 + (1 - 2\alpha)r^m}{1 - r^m}$$

$$\frac{1 - (1 - 2\alpha)r^m}{1 + r^m} \leq \left| -\frac{z F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1 + (1 - 2\alpha)r^m}{1 - r^m}$$

$$\left| \arg \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] \right| \leq \arcsin \frac{2(1 - \alpha)r^m}{1 + (1 - 2\alpha)r^{2m}}.$$

Znaki równości w tych oszacowaniach realizuje funkcja postaci

$$F_1(z) = \frac{(1 - e^{it} z^m)^{\frac{2}{m}(1 - \alpha)}}{z}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

dla $z = r$ przy odpowiednio dobranych wartościach parametru t .

3. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. Dla każdej funkcji $F \in \sum_{\alpha}^*(\beta, m)$ i dla dowolnie ustalonego z $|z| = r$ $0 < r < 1$ przy ustalonych α , β i m , zachodzi dokładne oszacowanie

$$(3.1) \quad \frac{1}{r} \exp \int_0^r \left[1 - \left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)x^m}{1 - x^m} \right)^{\beta} \right] \frac{dx}{x} \leq |F(z)| \leq \\ \leq \frac{1}{r} \exp \int_0^r \left[1 - \left(\frac{1 - (1 - 2\alpha)x^m}{1 + x^m} \right)^{\beta} \right] \frac{dx}{x}.$$

Znaki równości po lewej i prawej stronie w powyższym oszacowaniu realizuje funkcja postaci (2.4) dla $z = r$ odpowiednio przy $\varepsilon = 1$ i $\varepsilon = -1$.

Dowód. Z równości $\text{Log}[z F(z)] = \log|z F(z)| + i \arg[z F(z)]$ gdzie gałąź funkcji $\log[z F(z)]$ określamy analogicznie jak poprzednio otrzymujemy dla $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = -1 + r \frac{\delta}{\delta r} \text{Log}|z F(z)| + i r \frac{\delta}{\delta r} \arg[z F(z)].$$

Stąd z kolei mamy

$$\text{re} \left[-\frac{z F'(z)}{F(z)} \right] = 1 - r \frac{\delta}{\delta r} \text{Log}|z F(z)|.$$

Korzystając z (2.6) otrzymujemy:

$$\frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)r^m}{1 - r^m} \right)^{\beta} \right] \leq \frac{\delta}{\delta r} \text{Log}|z F(z)| \leq \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{1 - (1 - 2\alpha)r^m}{1 + r^m} \right)^{\beta} \right].$$

Całkując stronami ostatnią nierówność względem r , w granicach od 0 do r , otrzymujemy oszacowanie (3.1). Z postaci funkcji (2.4) wynika bezpośrednio, że realizuje ona równości po lewej i po prawej stronie oszacowania (3.1) odpowiednio przy $\varepsilon = 1$ i $\varepsilon = -1$ dla $z = r$, co kończy dowód twierdzenia.

Wniosek 3.1. Jeżeli $F \in \sum_{\alpha}^*(m)$, wówczas dla dowolnie ustalonego z $|z| = r$ $0 < r < 1$, przy ustalonych α i m , zachodzi dokładne oszacowanie

$$(3.2) \quad \frac{1}{r} (1 - r^m)^{\frac{2}{m}(1-\alpha)} \leq |F(z)| \leq \frac{1}{r} (1 + r^m)^{\frac{2}{m}(1-\alpha)}.$$

Znaki równości po lewej i prawej stronie w powyższym oszacowaniu realizuje funkcja postaci

$$(3.3) \quad F_2(z) = \frac{(1 - \varepsilon z^m)^{\frac{2}{m}(1-\alpha)}}{z}$$

odpowiednio przy $\varepsilon = 1$ oraz $\varepsilon = -1$ dla $z = r$.

Oszacowanie (3.2) wydaje się być również nowym wynikiem.

Wniosek 3.2. W przypadku $\beta = 1$ i $m = 1$ otrzymujemy z (3.1) dokładne oszacowanie

$$(3.4) \quad \frac{1}{r}(1-r)^{2(1-\alpha)} \leq |F(z)| \leq \frac{1}{r}(1+r)^{2(1-\alpha)}$$

w klasie funkcji $\sum_{\alpha}^*$ (por. np. [5] str. 223).

W przypadku $\beta = 1$ i $\alpha = 0$ otrzymujemy z (3.1) dokładne oszacowanie

$$(3.5) \quad \frac{1}{r}(1-r^m)^{\frac{2}{m}} \leq |F(z)| \leq \frac{1}{r}(1+r^m)^{\frac{2}{m}}$$

w klasie $\sum^*(m)$ (por. np. [6] str. 170).

Natomiast w przypadku $\alpha = 0$ otrzymujemy dokładne oszacowanie modułu funkcji w klasie $\sum^*(\beta, m)$ (por. tw. 3. [3] str. 66).

Literatura

1. J. Ja. Ašnevič i G. V. Ulina — Ob oblastjach značenij analitičeskich funkcij, predstavimych integralom Stiltjesa, Ves. Len. Univ., № 11, 31–42 (1955).
2. G. M. Goluzin — *Geometričeskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd. „Nauka”, Moskva, 1966.
3. Z. Pachulski — *On extremal problems of some family of meromorphic functions*, Ac. Univ. Lod., Seria II, № 17, 63–84 (1977).
4. Z. Pachulski — *On the radius of convexity for certain family of functions meromorphic in unit disc*, Demonstratio Mathematica, w druku.
5. Ch. Pommerenke — *On meromorphic starlike functions*, Pac. Jour. of Math. **13**, 221–235 (1963).
6. Wu Zwao-Jen — *Some classes of starlike functions*, Acta Math. Sinica, **7**, 167–182 (1957).

3. Пахульский

Об одном классе мероморфных функций в единичном круге

Содержание

В работе обсуждается класс функций $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$ выполняющих условие (1.1). Пользуясь связями между классом $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$ и классом P функций с положительной вещественной частью получено оценки некоторых функционалов в классе $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$.

Z. Pachulski

On some class of meromorphic functions in the unit disc

Summary

A class of functions $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$ defined by condition (1.1) was discussed. Utilizing the relation between the class $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$ and the class p of functions with positive real part the estimate of certain functionals in the $\Sigma_{\alpha}^*(\beta, m)$ class was given.