

Trójwartościowa reprezentacja zbiorów przybliżonych

Teresa Biegańska

Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją równoważności na zbiorze X . Dla dowolnego $U \subseteq X$ zbiory $\underline{U}_{\mathcal{R}} = \{x \in X : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq U\}$, $\overline{U}_{\mathcal{R}} = \{x \in X : [x]_{\mathcal{R}} \cap U \neq \emptyset\}$, $Fr_{\mathcal{R}}(U) = \overline{U}_{\mathcal{R}} - \underline{U}_{\mathcal{R}}$ nazywamy odpowiednio dolną aproksymacją, górną aproksymacją i ograniczeniem zbioru U w X .

Relacja równoważności $\mathcal{R}$ na zbiorze X wyznacza relację równoważności $\mathcal{S}$ na zbiorze $P(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X , która dana jest warunkiem:

$$USW \iff \underline{U}_{\mathcal{R}} = \underline{W}_{\mathcal{R}} \text{ \& } \overline{U}_{\mathcal{R}} = \overline{W}_{\mathcal{R}},$$

lub równoważnie

$$USW \iff \underline{U}_{\mathcal{R}} = \underline{W}_{\mathcal{R}} \text{ \& } Fr_{\mathcal{R}}(U) = Fr_{\mathcal{R}}(W).$$

Zbiorem przybliżonym nazywamy klasę abstrakcji równoważności $\mathcal{S}$ w zbiorze $P(X)$ generowaną przez element U , tzn. zbiór $[U]_{\mathcal{S}} = \{W \subseteq X : USW\}$, dla $U \subseteq X$.

Niech $(L, \leq)$ będzie trzelementową kratą o zbiorze podkładowym $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, przy czym $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$.

Funkcję $f : X \times X \rightarrow L$ nazywamy bardzo słabą równoważnością, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- (a) $f(x, y) = 1 \Rightarrow f(y, x) = 1$,
- (b) $[f(x, y) = f(y, z) = 1 \text{ \& } x \neq z] \Rightarrow f(x, z) = 1$,
- (c) $[f(x, y) = 1 \text{ \& } \frac{1}{2} \leq f(x, x)] \Rightarrow f(y, y) = f(x, x)$,
- (d) $f(x, y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y$,
- (e) $f(x, x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists y \in X f(x, y) = 1$.

Prawdziwe są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Jeżeli $f : X \times X \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ jest bardzo słabą równoważnością, to istnieje taki $U \subseteq X$, że $\underline{U}_{\mathcal{R}_f} = \{x \in X : f(x, x) = 1\}$ i $\overline{U}_{\mathcal{R}_f} = \{x \in X : f(x, x) \in \{\frac{1}{2}, 1\}\}$, gdzie $\underline{U}_{\mathcal{R}_f}$ jest dolną aproksymacją, zaś $\overline{U}_{\mathcal{R}_f}$ jest górną aproksymacją zbioru U w X ze względu na równoważność $\mathcal{R}_f$ zdefiniowaną następująco:

$$x\mathcal{R}_f y \iff (x = y \text{ lub } f(x, y) = 1).$$

Twierdzenie 2.

Jeżeli $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności na zbiorze X oraz $U \subseteq X$, to funkcja $f_{\mathcal{R}U} : X \times X \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ zadana następująco:

$$f_{\mathcal{R}U}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (x = y \text{ \& } x \in \underline{U}_{\mathcal{R}}) \text{ lub } (x\mathcal{R}y \text{ \& } x \neq y), \\ \frac{1}{2} & \text{jeżeli } x = y \text{ \& } x \in \overline{U}_{\mathcal{R}} - \underline{U}_{\mathcal{R}}, \\ 0 & \text{jeżeli } \sim (x\mathcal{R}y) \text{ lub } (x = y \text{ \& } x \in X - \overline{U}_{\mathcal{R}}), \end{cases}$$

jest bardzo słabą równoważnością. Co więcej $\mathcal{R}_{f_{\mathcal{R}U}} = \mathcal{R}$, $\underline{U}_{\mathcal{R}} = \{x \in X : f_{\mathcal{R}U}(x, x) = 1\}$, $\overline{U}_{\mathcal{R}} = \{x \in X : \frac{1}{2} \leq f_{\mathcal{R}U}(x, x)\}$.

Bibliografia

- [1] Obtulowicz A., *Rough sets and Heyting algebra valued sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 35 (9-10), (1987), 667-673.
- [2] Pawlak Z., *Rough sets, Basic notions*, ICS PAS Reports, 436, (1981).
- [3] Pawlak Z., *Rough sets*, Internat. J. Inform. Comput. Sci., 11 (5), (1982), 341-356.