

PROFESOR TADEUSZ ŚWIĄTKOWSKI – DOBRY DUCH POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

IZABELA JÓŻWIK, MAŁGORZATA TEREPEŁA

ABSTRACT

Profesor Tadeusz Świątkowski był wieloletnim pracownikiem i dyrektorem Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej. Prezentujemy jego sylwetkę jako wielkiego matematyka i wspaniałego nauczyciela oraz jego wkład w rozwój teorii funkcji rzeczywistych.

1. WSTĘP

W tym roku mija 20 lat od śmierci naszego Profesora – Tadeusza Świątkowskiego. Obie byłyśmy Jego studentkami. Niestety bardzo krótko, ze względu na Jego problemy zdrowotne. Mimo upływu lat, pamiętamy jak jasno tłumaczył nawet skomplikowane zagadnienia matematyczne. Zawsze zależało Mu na tym, by pokazywać piękno i prostotę matematyki. Nigdy swoim zachowaniem nie mówił „patrzcie, jaki ja jestem mądry”, tylko zawsze „patrzcie, jakie to jest proste”. Do tej pory Profesor kojarzy nam się właśnie z tą cechą. Widać ją wyraźnie, gdy czyta się te Jego artykuły, które były pisane po polsku. Profesor chętnie pisał w ojczystym języku i publikował w lokalnych czasopismach. Dużą część jego prac można znaleźć w Zeszytach Naukowych Politechniki Łódzkiej i Zeszytach Naukowych Uniwersytetu Łódzkiego. Niestety, ich zasięg był przez to dość ograniczony, ale Profesor uważał, że należy wspierać swoje środowisko naukowe. Mimo to, wiele z jego artykułów znalazło swój oddźwięk w matematyce światowej i do tej pory Jego artykuły pojawiają się w bibliografii prac wielu znanych matematyków. Profesor był bardzo szczodry w dzieleniu się swoją wiedzą. Chętnie podsuwał problemy do rozważania, pomysły prac, a nawet szkice rozwiązań. Wypromował ok. 40 doktorów nauk matematycznych. Niestety,

-
- Izabela Jóźwik — e-mail: ijozwik@p.lodz.pl
Politechnika Łódzka.
 - Małgorzata Terepeta — e-mail: terepeta@p.lodz.pl
Politechnika Łódzka.

ze względu na reorganizację niektórych instytucji, udało nam się dotrzeć tylko do 24 nazwisk; lista doktorantów dostępna jest na stronie:

<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=172152>

W tym artykule chcielibyśmy krótko przypomnieć Jego postać i te wyniki, które uważamy za istotne w teorii funkcji rzeczywistych, gdyż stały się podstawą do stworzenia takich pojęć, jak np. path derivatives, local systems, Świątkowski property, Świątkowski function.

2. ŻYCIORYS

Tadeusz Świątkowski urodził się 28 listopada 1933 roku w Bełchatowie. Tam rozpoczął swoją edukację. Po ukończeniu szkoły podstawowej uczęszczał do Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim.

W 1951 roku rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie Łódzkim. Rok przed ich ukończeniem w 1955 roku, rozpoczął pracę jako asystent na Politechnice Łódzkiej. W latach 1959-1962 pracował na Uniwersytecie Łódzkim, następnie ponownie na Politechnice Łódzkiej. W 1960 roku uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych, a rok później zdobył nagrodę PTM dla młodych matematyków. W 1962 roku wziął ślub z Marią Waliszewską (siostrą innego znanego łódzkiego matematyka – profesora Włodzimierza Waliszewskiego). Jego syn Stefan ukończył studia matematyczne, córka Joanna studia medyczne.

W 1966 uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego za pracę *O warunkach wystarczających monotoniczności funkcji*. Praca ta stanowiła pozytywne rozwiązanie problemu Z. Zahorskiego. Analogiczne rezultaty uzyskał (na całkowicie innej drodze) znany matematyk amerykański, autor wielu książek z teorii funkcji rzeczywistych, Andrew Bruckner ([1]).

W latach 1968-1972 współprowadził wykłady telewizyjne dla studentów studiów dla pracujących wyższych uczelni technicznych (program nosił tytuł „Politechnika TV”). Kierownikiem kursu był prof. W. Krysicki. Zespół wykładowców: prof. I. Dziubiński, prof. D. Sadowska, prof. T. Świątkowski, prof. L. Włodarski, był ściśle związany z Politechniką Łódzką. Tadeusz Świątkowski był współautorem popularyzatorskiej książki z geometrii (*Geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni*, Włodzimierz Krysicki, Tadeusz Świątkowski, Jan Zydler), zbioru zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne oraz poradnika matematycznego (*Poradnik matematyczny*: praca zbiorowa pod red. I. Dziubińskiego i T. Świątkowskiego).

W 1978 roku uzyskał tytuł profesora nadzwyczajnego. Był wieloletnim dyrektorem Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej. Posiadał wiele odznaczeń między innymi Medal Komisji Edukacji Narodowej, Krzyż Kawalerski Orderu Odrodzenia Polski.

Zmarł 30 października 1994 roku.

3. ZAINTERESOWANIA NAUKOWE

Dorobek naukowy Profesora zawiera około 30 prac. Najwcześniejsze prace prof. Tadeusza Świątkowskiego dotyczą funkcji analitycznych, następnie jego zainteresowania skierowały się ku teorii funkcji rzeczywistych i jej związkom z topologią. Badał uogólnienia pojęcia granicy i pochodnej oraz klasy funkcji ciągłych.

W 1960 roku Tadeusz Świątkowski napisał pracę doktorską, składającą się z dwóch części:

- (1) O funkcjach holomorficznym w kole jednostkowym, przyjmujących każdą swoją wartość nieskończenie wiele razy.
- (2) O przekształcaniu funkcji mierzalnej na całkowalną.

Promotorem był profesor Witold Janowski.

Wyniki zostały przedstawione w pracach: *Sur les fonctions holomorphes qui prennent dans le cercle unité une infinité de fois chacune de leurs valeurs* ([9]) oraz *Sur une transformation d'une fonction mesurable en une fonction sommable* ([10]).

W pierwszej części pracy doktorskiej Świątkowski przedstawił wynik dotyczący funkcji holomorficznym w kole jednostkowym: wykazał, że zbiór funkcji holomorficznym przyjmujących każdą swoją wartość nieskończenie wiele razy jest rezydualny w przestrzeni wszystkich funkcji holomorficznym.

W drugiej części pracy Tadeusz Świątkowski rozwiązał problem Czesława Ryll-Nardzewskiego sformułowany następująco:

Czy dla każdej funkcji f prawie wszędzie skończonej i mierzalnej w $\langle a, b \rangle$ istnieje homeomorfizm ϕ przedziału $\langle a, b \rangle$ na siebie, spełniający warunek

$$\int_a^b f(\phi(t)) dt < \infty?$$

Czy istnieje homeomorfizm taki, który przekształca funkcje mierzalne wielu zmiennych na funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a?

Odpowiedź na powyższe pytania jest pozytywna. Tadeusz Świątkowski udowodnił twierdzenie:

Twierdzenie. *Niech dana będzie funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prawie wszędzie skończona i mierzalna na kostce*

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wówczas istnieją funkcje $\phi_1(x_1)$, $\phi_2(x_1, x_2)$, $\dots$, $\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takie, że

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

oraz

- (1) $\phi_1(x_1)$ jest ściśle rosnąca oraz $\phi_1(a_1) = a_1$, $\phi_1(b_1) = b_1$,
- (2) dla ustalonych $x_1, \dots, x_{k-1}$ funkcja $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ jest rosnącą funkcją zmiennej x_k taką, że $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_k) = a_k$, $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, b_k) = b_k$, $k = 2, \dots, n$,
- (3) dla dowolnej dodatniej liczby α

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} |f(\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots, \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n))|^\alpha dx_1 dx_2 \dots dx_n < \infty.$$

Kilka lat później (1973, [13]) profesor Świątkowski wrócił do przedstawionego w pracy doktorskiej problemu i wraz z profesorem Władysławem Wilczyńskim udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli $f \geq 0$ jest funkcją półciągłą z dołu na $[0, 1]$ taką, że

$$\int_0^1 f(x) dx = +\infty,$$

to zbiór tych $h \in H$ (H oznacza zbiór homeomorfizmów $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ spełniających warunki $h(0) = 0$, $h(1) = 1$), dla których

$$\int_0^1 f(h(x)) dx < +\infty,$$

jest pierwszej kategorii w H .

Twierdzenie. Dla dowolnego ciągu $\{f_n\}$ funkcji mierzalnych, określonych i prawie wszędzie skończonych na $[0, 1]$ istnieje homeomorfizm h tego przekształtu na siebie taki, że

$$\int_0^1 |f_n(h(x))| dx < +\infty$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Następnym bardzo istotnym wynikiem uzyskanym przez profesora Świątkowskiego było sformułowanie twierdzenia o warunkach wystarczających monotoniczności funkcji. Jednym z bardziej znanych twierdzeń tego typu,

jest to, które studenci pierwszego roku studiów poznają podczas kursu analizy matematycznej: *Jeżeli f jest różniczkowalna w (a, b) oraz jej pochodna jest dodatnia w (a, b) , to f jest funkcją rosnącą w tym przedziale*. Twierdzenie to było w różny sposób uogólniane: np. założenie o różniczkowalności funkcji było zastępowane przez pojęcie różniczkowalności funkcji w innym sensie, zbiór, w którym pochodna miała istnieć lub w którym była nieujemna, był mniejszy niż (a, b) . Jedno z takich twierdzeń zostało sformułowane w 1928 roku przez G. Gołdowskiego oraz niezależnie, w 1930 roku, przez L. Tonellego:

Twierdzenie ([3], [16]). *Niech f będzie funkcją spełniającą w przedziale (a, b) warunki:*

- (a1) *f jest ciągła,*
- (b1) *f' (skończona lub nieskończona) istnieje wszędzie poza przeliczalną liczbą punktów,*
- (c1) *$f'(x) \geq 0$ prawie wszędzie.*

Wówczas f jest funkcją niemalejącą na (a, b) .

W 1939 roku twierdzenie to zostało uogólnione przez G. Tołstowa ([15]), a w 1950 roku przez Z. Zahorskiego ([17]).

Twierdzenie (Tołstow). *Niech f będzie funkcją spełniającą w przedziale (a, b) warunki:*

- (a2) *f jest aproksymatywnie ciągła,*
- (b2) *f'_{ap} (skończona lub nieskończona) istnieje wszędzie poza przeliczalną liczbą punktów,*
- (c2) *$f'_{ap}(x) \geq 0$ prawie wszędzie.*

Wówczas f jest funkcją ciągłą i niemalejącą na (a, b) .

Twierdzenie (Zahorski). *Niech f będzie funkcją spełniającą w przedziale (a, b) warunki:*

- (a3) *f jest funkcją Darboux,*
- (b3) *f' (skończona lub nieskończona) istnieje wszędzie poza przeliczalną liczbą punktów,*
- (c3) *$f'(x) \geq 0$ prawie wszędzie na (a, b) .*

Wówczas f jest funkcją ciągłą i niemalejącą na (a, b) .

Rodziny funkcji, które spełniają założenia obu ostatnich twierdzeń nie są rozłączne, ani nie zawierają się w sobie nawzajem. Twierdzenie Zahorskiego jest równocześnie silniejsze niż twierdzenie Tołstowa (Zahorski zakładał własność Darboux zamiast aproksymatywnej ciągłości) i słabsze od niego (zakładał istnienie zwykłej pochodnej zamiast pochodnej aproksymatywnej). Poszukiwania uogólnień tych twierdzeń szły w różnych kierunkach, np. próbowano wykorzystać ich słabsze założenia: (a3) oraz (b2)

i (c2). Niestety z tych założeń nie wynika fakt monotoniczności funkcji (przykład takiej funkcji można znaleźć w [1]). Ponieważ każda funkcja aproksymatywnie ciągła jest funkcją Darboux pierwszej klasy Baire'a, Zahorski sformułował następujące pytanie:

Czy każda funkcja Darboux pierwszej klasy Baire'a spełniająca założenia (b2) i (c2) jest ciągła i monotoniczna?

Pozytywną odpowiedź na to pytanie uzyskał Tadeusz Świątkowski i przedstawił w 1966 roku w swojej pracy habilitacyjnej *O warunkach wystarczających monotoniczności funkcji* ([11]).

Niech $\mathcal{J}$ oznacza klasę funkcji f spełniających warunki:

- (1) każdy zbiór postaci $\{x: f(x) > M\}$ oraz $\{x: f(x) < m\}$ jest zbiorem typu F_σ i składa się tylko z obustronnych punktów kondensacji funkcji f
- (2) jeżeli $f \in \mathcal{J}$, g jest ciągła, to $f + g \in \mathcal{J}$.

Oczywiście funkcje Darboux pierwszej klasy Baire'a należą do klasy $\mathcal{J}$.

Twierdzenie ([11]). *Niech f będzie funkcją spełniającą w przedziale (a, b) warunki:*

- (A) $f \in \mathcal{J}$,
- (B) f'_{ap} (skończona lub nieskończona) istnieje wszędzie poza przeliczalną liczbą punktów,
- (C) $f'_{ap}(x) \geq 0$ prawie wszędzie.

Wówczas f jest funkcją niemalejącą i ciągłą w (a, b) .

Równolegle, podobne rezultaty niezależnie od Świątkowskiego uzyskał matematyk amerykański A. M. Bruckner ([1]). Droga uzyskania tego wyniku była jednak całkowicie inna.

Następny okres pracy naukowej Profesora poświęcony był uogólnieniu pojęcia granicy i pochodnej. W niektórych zagadnieniach pochodna zwyczajna może być zastąpiona przez pewne uogólnienia pochodnej. Z reguły odbywa się to poprzez zastąpienie zwykłej granicy ilorazu różnicowego przez inne przejście graniczne, np. przez wprowadzenie mocniejszej topologii lub ograniczenie się do punktów pewnego zbioru. W pracy [12] profesor Świątkowski wprowadził następujące pojęcie T -granicy i T -pochodnej.

Niech z każdym punktem x pewnego przedziału (a, b) będzie związana pewna rodzina $T(x)$ podzbiorów tego przedziału taka, że:

- (a) jeżeli $E_1, E_2 \in T(x)$, to $E_1 \cap E_2 \in T(x)$,
- (b) jeżeli $\delta > 0$ to $(x - \delta, x + \delta) \cap (a, b) \in T(x)$,
- (c) x jest jedynym punktem wspólnym rodziny $T(x)$,
- (d) jeżeli $\delta > 0$ i $E \in T(x)$, to $(x - \delta, x) \cap E$ oraz $(x, x + \delta) \cap E$ są zbiorami niepustymi.

Zbiory z rodziny $T(x)$ będziemy nazywać T -otoczeniami punktu x .

Definicja. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy T -granica funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $E \in T(x_0)$ taki, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $x \in E$. Piszemy wówczas $T - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$.

Oczywiście, funkcja nazywa się T -ciągła w x_0 jeżeli jest określona na pewnym T -otoczeniu x_0 oraz $T - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Analogicznie: T -pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę $f'_T(x_0) = T - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Zauważmy, że jeżeli $T(x)$ jest rodziną przedziałów otwartych zawierających x , to T -granica oznacza zwykłą granicę. Jeżeli $T(x)$ jest rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$ zawierających x i takich, że ich gęstość w punkcie x jest równa 1, to pojęcie T -granicy pokrywa się z pojęciem granicy aproksymatywnej.

Obecnie podobne uogólnienia pochodnej istnieją pod nazwą „path derivatives” (zajmują się tym m.in. A. M. Bruckner, R. J. O'Malley, B. S. Thomson np. w [2]), zaś uogólnienia rodzin $T(x)$ jako systemy lokalne (local systems) ([14]).

Przy warunkach wystarczających monotoniczności funkcji rozważa się różne klasy funkcji, np. funkcje Darboux, funkcje aproksymatywnie ciągłe, itp. W jednej z prac Tadeusza Świątkowskiego opublikowanych w Zeszytach Naukowych Politechniki Łódzkiej ([6]) rozważane były funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posiadające własności:

- ($\alpha 1$) f ma własność Darboux,
- ($\beta 1$) f jest pierwszej klasy Baire'a,
- ($\gamma 1$) dla dowolnych różnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $f(x_1) \neq f(x_2)$ istnieje punkt $x_3 \in I(x_1, x_2)$ taki, że $f(x_3) \in I(f(x_1), f(x_2))$ i f jest ciągła w x_3 ,

($I(a, b)$ oznacza przedział o końcach a i b).

Wiadomo, że suma dwóch funkcji mających własność Darboux nie musi tej własności posiadać. Podobnie granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji mających własność Darboux nie musi mieć własności Darboux. Zygmunt Zahorski pokazał ([17]), że jeżeli funkcja f należy do klasy J , gdzie $J = (\alpha 1) \cap (\beta 1)$, a funkcja g jest ciągła, to $f + g \in J$. Edward Kocela udowodnił ([4]), że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji klasy J również należy do J . Zatem przyjęcie dodatkowego założenia było niezbędne, by podane działania dawały w rezultacie funkcję tej samej klasy.

W pracy ([6]) rozważana jest klasa funkcji J^* spełniających wszystkie warunki ($\alpha 1$), ($\beta 1$), ($\gamma 1$). Okazuje się, że warunki te są niezależne (tzn.

$(\alpha 1)$ nie zależy od $(\beta 1)$ i $(\gamma 1)$, itd), w szczególności $J \neq J^*$. Autorzy udowodnili następujące twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki $(\alpha 1)$ i $(\gamma 1)$, g jest ciągła, to $f + g$ spełnia warunek $(\gamma 1)$.*

Jeżeli funkcje f_n spełniają warunki $(\alpha 1)$ i $(\gamma 1)$, $(n \in \mathbb{N})$ i $f_n \rightarrow f$, to f spełnia warunek $(\gamma 1)$.

Twierdzenie. *Jeżeli $f \in J^*$, g jest ciągła, to $f + g \in J^*$. Jeżeli $f_n \in J^*$, $n \in \mathbb{N}$ i $f_n \rightarrow f$, to $f \in J^*$.*

W 1982 roku w pracy [7] rozważano podobne klasy funkcji dla funkcji dwóch zmiennych $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- $(\alpha 2)$ f ma własność Darboux,
- $(\beta 2)$ f jest pierwszej klasy Baire'a,
- $(\gamma 2)$ dla dowolnych różnych punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ płaszczyzny takich, że $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$, istnieje punkt $(x_3, y_3) \in I((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ taki, że $f(x_3, y_3) \in I(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2))$ i f jest ciągła w (x_3, y_3) .

i okazało się, że funkcje dwóch zmiennych zachowują się odmiennie niż funkcje jednej zmiennej:

Twierdzenie. *Jeżeli $f_n \in (\alpha 2) \cap (\beta 2)$, $n \in \mathbb{N}$ i $f_n \rightrightarrows f$, to $f \in (\alpha 2) \cap (\beta 2)$. Istnieje ciąg $f_n \in (\alpha 2) \cap (\gamma 2)$, $n \in \mathbb{N}$ zbieżny jednostajnie do funkcji f taki, że $f \notin (\gamma 2)$.*

W podanej pracy po raz pierwszy funkcje z klasy $(\gamma 1)$ i $(\gamma 2)$ nazwano funkcjami Świątkowskiego. Nazwa ta została wprowadzona przez profesora Władysława Wilczyńskiego oraz dr Helenę Nonas (obecnie Pawlak). W 1995 roku Aleksander Maliszewski zdefiniował silną funkcję Świątkowskiego¹:

Definicja ([5]). *Mówimy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest silną funkcją Świątkowskiego ($f \in \dot{S}_s$), jeżeli dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $f(x_1) \neq f(x_2)$ i każdego $\lambda \in I(f(x_1), f(x_2))$ istnieje punkt $x_3 \in I(x_1, x_2) \cap C_f$ taki, że $f(x_3) = \lambda$ (gdzie C_f oznacza zbiór wszystkich punktów ciągłości funkcji f).*

Zaś w 2002 Paulina Szczuka wprowadziła pojęcie ekstra silnej funkcji Świątkowskiego²:

¹W angielskiej terminologii, A. Maliszewski zastosował termin *Świątkowski function*, a potem dla funkcji spełniającej silniejszy warunek: *strong Świątkowski function*. Dla uporządkowania terminologii zgodnej z duchem języka angielskiego należałoby napisać *function fulfilling strong condition of Świątkowski*

²Taka sama uwaga dotyczy ekstra silnej własności Świątkowskiego. Powinno się napisać: *function fulfilling extra strong condition of Świątkowski*.

Definicja ([8]). Mówimy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia ekstra silny warunek Świątkowskiego (jest ekstra silną funkcją Świątkowskiego), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $x_1 < x_2$, spełniona jest równość oraz

$$f([x_1, x_2]) = f([x_1, x_2] \cap C_f).$$

Obecnie funkcje Świątkowskiego stały się podstawą wielu badań, publikacji, prac doktorskich.

Podziękowania: Pragniemy podziękować prof. dr hab. Władysławowi Wilczyńskiemu oraz doc. Bogdanowi Koszeli za wsparcie przy pisaniu tego artykułu.

REFERENCES

- [1] A. M. Bruckner, *Derivatives*, The American Math. Monthly, Vol. 73, No 4 (1966) 24-56.
- [2] A. M. Bruckner, R. J. O'Malley, B. S. Thomson, *Path derivatives: a unified view of certain generalized derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 97-125.
- [3] G. Goldowsky, *Note sur les dérivées exactes*, Rec. Math. Soc. Math. Moscou, (Mat. Sbornik), 35 (1928) 35-36.
- [4] E. Kocela, T. Świątkowski, *On some characterization of uniform convergence*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódź. Mat. No. 7 (1976), 11-15.
- [5] A. Maliszewski, *On the limits of strong Świątkowski function*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódź. Mat. No. 27 (1995), 87-93.
- [6] T. Mańk, T. Świątkowski, *On some class of functions with Darboux's characteristic*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódź. Mat. No. 11 (1978), 5-10.
- [7] H. Pawlak, W. Wilczyński, *On the condition of Darboux and Świątkowski for functions of two variables* Zeszyty Nauk. Politech. Łódź. Mat. No. 15 (1982), 31-35.
- [8] P. Szczuka, *Maximal classes for the family of strong Świątkowski functions*, Real Anal. Exchange 28 (2002/03), no. 2, 429-437.
- [9] T. Świątkowski, *Sur les fonctions holomorphes qui prennent dans le cercle unité une infinité de fois chacune de leurs valeurs*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 10 1959 no. 13, 6 pp.
- [10] T. Świątkowski, *Sur une transformation d'une fonction mesurable en une fonction sommable*, Fund. Math. 52 1963 1-12.
- [11] T. Świątkowski, *On the conditions of monotonicity of functions*, Fund. Math. 59 1966 189-201.
- [12] T. Świątkowski, *O pewnym uogólnieniu pojęcia pochodnej*, Zeszyty Nauk. Politech. Łódź. Mat. No. 1 (1972), 89-103.
- [13] T. Świątkowski, W. Wilczyński, *Uwagi o homeomorficznej równoważności funkcji mierzalnych i funkcji całkowalnych*, Zeszyty Nauk. Uniw. Łódź. Nauki Mat. Przyrod. Ser. II No. 52 Mat. (1973), 45-51.
- [14] B. S. Thomson, *Derivation bases on the real line II*, Real Anal. Exchange 8 (1982-83), 278-442.
- [15] G. Tolstoff, *Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues*, Rec. Math. Soc. Math. Moscou, (Mat. Sbornik), 5 (1939) 637-645.
- [16] L. Tonelli, *Sulle derivate esatte*, Memorie della Academia delle Science dell'Instituto Bologna, (8) 8 (1030-31), 13-15.

- [17] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950) 1-54.

Otrzymano: Październik 2014

Izabela Jóźwik
POLITECHNIKA ŁÓDZKA,
CENTRUM NAUCZANIA MATEMATYKI I FIZYKI,
AL. POLITECHNIKI 11, 90-924 ŁÓDŹ
E-mail address: `ijozwik@p.lodz.pl`

Małgorzata Terepeta
POLITECHNIKA ŁÓDZKA,
CENTRUM NAUCZANIA MATEMATYKI I FIZYKI,
AL. POLITECHNIKI 11, 90-924 ŁÓDŹ
E-mail address: `terepeta@p.lodz.pl`