

MICHAŁ J. MAŁACHOWSKI*Instytut Fizyki, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa, Polska*

Stabilność rozwiązań równania dyfuzji w aproksymacji pochodnych różnicowych

Wstęp

Zwykła linia transmisyjna jest zbudowana np. w postaci dwóch długich współosiowych wydrążonych walców o cienkich ściankach. Oznaczmy wewnętrzny i zewnętrzny promień odpowiednio przez a i b . Oba cylindry są wykonane z cienkiego przewodnika i nie zawierają między sobą dielektryka. Także wewnętrzna część jest pusta. Taką linię charakteryzuje pewna pojemność, indukcyjność, rezystancja oraz rezystancja upływności. Zamiast przedstawiać linię transmisyjną w postaci układu dwóch cylindrycznych przewodników wygodniej jest wprowadzić połączone szeregowo rezystory o wartościach rezystancji jednostki długości cylindra. Podobne przeliczenia wprowadzamy dla pojemności, indukcyjności oraz rezystancji upływności. Te zredukowane wielkości będziemy nazywali odpowiednio rozłożoną rezystancję R_d , rozłożoną pojemnością C_d , rozłożoną indukcyjnością L_d oraz rozłożoną upływnością $1/Y_d$. Przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień wygodne jest przedstawienie linii transmisyjnej w postaci jej odcinków o długości Δx , zamiast w postaci dwóch długich współosiowych cylindrów. W ten sposób tworzymy swego rodzaju siatkę, w której odcinki Δx będziemy nazywali krokiem przestrzennym, na jego początku i końcu znajdują się węzły siatki. W ogólności taka siatka może być trójwymiarowa. Wytworzy się zatem układ utworzony przez nieciągły układ pojemności, indukcyjności, rezystancji oraz rezystancji upływności. Wówczas najmniejszy segment pojemności w stosunku do ziemi ma wartość $C_d \Delta x$, indukcyjności $L_d \Delta x$ oraz rezystancji $R_d \Delta x$. Wszystkie połączone szeregowo. Dla linii współosiowej

$$C_d = 2\pi\epsilon/\ln(b/a), \quad L_d = \mu\ln(b/a)/2\pi$$

Zewnętrzny cylinder zwykle nazywany ekranem jest on zwykle uziemiony. Najczęściej nas interesuje wartość potencjału $V(x,t)$ w dowolnym punkcie x w chwili t wzdłuż linii transmisyjnej o elementach skupionych. Różnicę potencjałów ΔV między końcami krótkiego segmentu Δx linii, przez którą przepływa prąd o natężeniu I , można obliczyć biorąc pod uwagę omowy spadek potencjału wzdłuż segmentu oraz indukowaną w nim siłę elektromotoryczną,

$$\Delta V = (\partial V/\partial x)\Delta x = IR_d\Delta x + L_d\Delta x(\partial I/\partial t).$$

Zmiana natężenia prądu ΔI wzdłuż linii między końcami segmentu jest wywołana występowaniem upływności oraz ładowaniem pojemności

$$\Delta I = (\partial I/\partial x)\Delta x = Y_d\Delta xV + C_d\Delta x(\partial V/\partial t)$$

Różniczkując te wyrażenia otrzymujemy ogólne równanie falowe na $V(x,t)$

$$(\partial^2 V/\partial x^2) = R_d Y_d V + (R_d C_d + L_d Y_d)(\partial V/\partial t) + L_d C_d(\partial^2 V/\partial t^2) \quad (1)$$

To równanie można uprościć, gdy niektóre parametry są do pominięcia. Na przykład, gdy linia jest bezstratna ($R_d = 0$ i $Y_d = 0$), otrzymujemy bezstratne równanie falowe

$$(\partial^2 V/\partial x^2) = L_d C_d(\partial^2 V/\partial t^2). \quad (2)$$

Gdy jedynie upływność jest nieznaczną, to równanie (1) redukuje się do postaci

$$(\partial^2 V/\partial x^2) = R_d C_d(\partial V/\partial t) + L_d C_d(\partial^2 V/\partial t^2). \quad (3)$$

Równanie to zwie się równaniem Telegrafistów. Jest szeroko stosowane do analizy propagacji impulsów elektrycznych. Jeżeli zarówno indukcyjność, jak i efekty upływności są małe, wtedy elementy równania (1) zawierające L_d i Y_d można pominąć i otrzymujemy równanie w postaci

$$(\partial^2 V/\partial x^2) = R_d C_d(\partial V/\partial t). \quad (4)$$

Równanie to przedstawia przypadek stratnej linii transmisyjnej. Można je łatwo rozwiązać w przypadku niektórych prostych sygnałów penetrujących linię transmisyjną.

Zachowanie się sygnałów elektrycznych w stratnej linii transmisyjnej w pewnym przybliżeniu może być śledzone zatem za pomocą równania dyfuzji o postaci (4), które zapiszemy następująco:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K \nabla^2 V \quad (5)$$

gdzie $K \equiv 1/(R_d C_d)$.

Wykazano jednak [1], że równanie (5) nie jest w tej formie poprawne, gdyż będąc parabolicznym, daje w rozwiązaniu nieskończoną prędkość propagacji sygnałów w linii transmisyjnej. Paradoks ten może zostać wyeliminowany przez zastosowanie równania Telegrafistów (3) do analizy tego problemu, które zawiera dodatkowy, bardzo istotny człon:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tau \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] = K \nabla^2 V \quad (6)$$

W tym przypadku K posiada poprzednie znaczenie, podczas gdy $\tau = L_d/R_d$ może być interpretowane jako czas relaksacji oraz L_d jest rozłożoną indukcyjnością. Równanie (6), będąc równaniem hiperbolicznym przewiduje skończoną prędkość propagacji sygnału. To równanie może także służyć do badania przepływu ciepła oraz dyfuzji cząstek. W przypadku przepływu ciepła dodatkowy człon równania (6) był badany przez Simonsa [1] biorąc pod uwagę równanie transportu Boltzmanna.

W tym artykule poddajemy dyskusji równania (5) oraz (6) aproksymując zwykłe pochodne pochodnymi różnicowymi. Ponieważ istnieją różne wersje ich prezentacji, zaszła konieczność porównania rozwiązań uzyskanych za pomocą każdej z tych wersji. Należy podkreślić, że w przypadku impulsów o prostych przebiegach oraz jednorodnych ośrodków, w których impulsy propagują się, istnieją zadowalające rozwiązania analityczne równań w wersji zwykłych pochodnych. Wówczas nie występuje konieczność sięgania do aproksymacji pochodnymi różnicowymi. Jednak w bardziej złożonych przypadkach ta aproksymacja jest przydatna i szeroko stosowana.

Parametry występujące w równaniach w postaci pochodnych różnicowych są powiązane z prawdopodobieństwami odpowiednich przeskoków impulsu

między elementami, na które została podzielona linia transmisyjna. Praca będzie dotyczyła przestrzenno-czasowej interpretacji parametrów pod względem ich powiązania z prawdopodobieństwami. Tego rodzaju interpretacja równań (5 i 6) w przypadku przepływu ciepła została przedyskutowana przez Kaplana [2]. Nie została jednak tam dokonana analiza rozwiązań równań różnicowych w różnych wersjach. W zależności od wybranej formy przedstawienia tych równań w postaci pochodnych różnicowych oraz zastosowanej dyskretyzacji, można otrzymać bezwarunkową lub warunkową stabilność a także bezwarunkową niestabilność rozwiązań. W pracy analizuje się zasięg tych warunkowych rozwiązań. Podstawową jednostką przestrzennej sieci jest jej element zapewniający ciągłość połączeń wzdłuż linii transmisyjnej. Zachowanie się impulsów napięcia i natężenia prądu w takim obwodzie jest analogiczne do zachowania się tych impulsów w konwencjonalnych liniach transmisyjnych; one podlegają tym samym równaniom różniczkowym.

Analiza

Rozważania rozpoczniemy od przypadku zapisu obu stron równania (5) w formie pochodnych różnicowych (4) o postaci centralnej dyskretyzacji pochodnych. Jeżeli czas przedstawimy jako $t = n\Delta t$ oraz dystans wzdłuż linii jako, $x = i\Delta x$, gdzie Δx oraz Δt są odpowiednio krokiem przestrzennym i krokiem czasowym, n oraz i są liczbami całkowitymi, to otrzymamy:

$$V(n+1,i) = V(n-1,i) + p_{x+}V(n,i+1) + p_{x-}V(n,i-1) + p_t V(n,i) \quad (7)$$

$$\text{gdzie } p_{x-} = p_{x+} = \frac{2K\Delta t}{\Delta x^2} \text{ oraz } p_t = -\frac{4K\Delta t}{\Delta x^2}$$

Współczynniki $p_{x-} + p_{x+}$ można interpretować jako prawdopodobieństwo, że sygnał przesunie się w przestrzeni o jeden krok w jedną czy drugą stronę punktu $x = n\Delta x$ w czasie pojedynczego kroku czasowego Δt . Współczynnik p_t należałoby interpretować jako prawdopodobieństwo, że sygnał pozostanie w pozycji x po czasie Δt . Jednak wartość p_t określona równaniem (7) jest zawsze ujemna, co przeczy definicji prawdopodobieństwa. Jest to przyczyną znanej niestabilności rozwiązania równania (7). Przeprowadzając w ramach tej pracy obliczenia $V(n,i)$ za pomocą równania (7) dla różnych Δt i Δx stwierdzona została niestabilność rozwiązań tego równania. Należy to przypisać ujemnej wartości p_t .

Rozważmy z kolei przypadek zapisu obu stron równania (5) w formie aproksymacji przez pochodne różnicowe o postaci wstecznej. Wówczas pochodna czasowa przybiera formę $[V(n,i) - V(n-1,i)]/\Delta t$, natomiast $V(n+1,i)$ przybierze nieco inną postać:

$$V(n+1, i) = p_x [V(n, i+1) + V(n, i-1)] + p_l V(n, i) \quad (8)$$

W tym przypadku $p_x = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2}$ (czyli połowa wartości p_{x-} i p_{x+} w równaniu (7)) oraz $p_l = \left[1 - \frac{2K\Delta t}{\Delta x^2}\right]$

Prawdopodobieństwo pozostania sygnału w punkcie (i) w czasie Δt jest tak długo dodatnie jak długo jest spełniony warunek $\frac{K\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ (jest to granica stabilności w przypadku wstecznej dyskretyzacji pochodnych). Na rysunku 1 są pokazane zależności współczynników prawdopodobieństw od wielkości kroku przestrzennego linii transmisyjnej. Tak więc, przytoczone uproszczone rozumowanie prowadzi do znanego kryterium stabilności von Neumana [3, 4] w przypadku równania dyfuzji. Zauważmy, że suma prawdopodobieństw równa jest jedności: $(p_{x+} + p_{x-} + p_l) = 1$.

Ponadto można uzyskać aproksymację różnicową równania (5) w wersji wyprzedzającej, w której pochodna czasowa ma postać $[V(n+1, i) - V(n, i)]/\Delta t$. Jednak, żeby to różniło się od poprzednich sformułowań oraz było sensowne, to druga pochodna czasowa musi być oparta na nowym czasie, tzn. $(n+1)\Delta t$. Wówczas otrzymane wyrażenie w postaci pochodnych różnicowych posiada rozwiązania bezwarunkowo stabilne [5]. Dla przykładu druga pochodna aproksymuje się następująco:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{[V(n+1, i+1) + V(n+1, i-1) - 2V(n+1, i)]}{\Delta x^2}$$

Odpowiednie przekształcenia prowadzą do następującego wyrażenia mającego postać funkcji uwikłanej:

$$V(n+1, i) = p_x [V(n+1, i+1) + V(n+1, i-1)] + p_l V(n, i) \quad (9)$$

gdzie $p_x = \frac{\left[\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right]}{\left[1 + \frac{2K\Delta t}{\Delta x^2}\right]}$ jest dodatnie i zawsze mniejsze niż jeden.

oraz $p_t = \frac{1}{\left[1 + \frac{2K\Delta t}{\Delta x^2}\right]}$ jest także dodatnie oraz mniejsze niż jeden.

Z powodu postaci uwikłanej tego sformułowania, prawdopodobieństwa powinny być interpretowane w nieco inny sposób niż poprzednio. Teraz spoglądamy wstecz od momentu $(n+1)\Delta t$ szukając odpowiedzi na pytanie co się wydarzyło. Zatem, oznaczmy przez p_{x-} prawdopodobieństwo tego, że sygnał przybył do punktu x z lewa w ciągu czasu Δt . Podobnie, p_{x+} jest prawdopodobieństwem tego, że sygnał przybył do punktu x z prawa w ciągu czasu Δt , przy czym $p_{x+} = p_{x-} = p_x$. Taką interpretację potwierdza suma $(p_{x+} + p_{x-} + p_t) = 1$. Jako że p_x oraz p_t są dodatnie to równanie (9) daje rozwiązania stabilne dla dowolnych Δt oraz Δx . Jednak wartości otrzymanych sygnałów są teraz znacznie mniejsze (Rys. 2) niż te, które otrzymuje się na podstawie równania Telegrafistów lub równania (8).

Przyjrzyjmy się z kolei podobnym reprezentacjom równania Telegrafistów. Równanie (6) może być analizowane w postaci pochodnych różnicowych dla wszystkich trzech pochodnych w wersji centralnej aproksymacji,

$$\begin{aligned} & \frac{V(n+1,i) - V(n-1,i)}{2\Delta t} \\ & + \tau \left[\frac{V(n+1,i) - 2V(n,i) + V(n-1,i)}{\Delta t^2} \right] \\ & = K \left[\frac{V(n,i+1) - 2V(n,i) + V(n,i-1)}{\Delta x^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Przedstawienie w formie probabilistycznej ma postać:

$$V(n+1,i) = p_{2t} V(n-1,i) + p_t V(n,i) + p_x [V(n,i+1) + V(n,i-1)] \quad (11)$$

gdzie p_x jest prawdopodobieństwem, że w odstępie czasu Δt sygnał przesunie się z położenia $(i-1)$ oraz $(i+1)$ do położenia i .

$$p_x = \frac{2K \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{\Delta t + 2\tau} \quad (12)$$

oraz

$$p_t = \frac{4}{\Delta t + 2\tau} \left(\tau - K \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \quad (13)$$

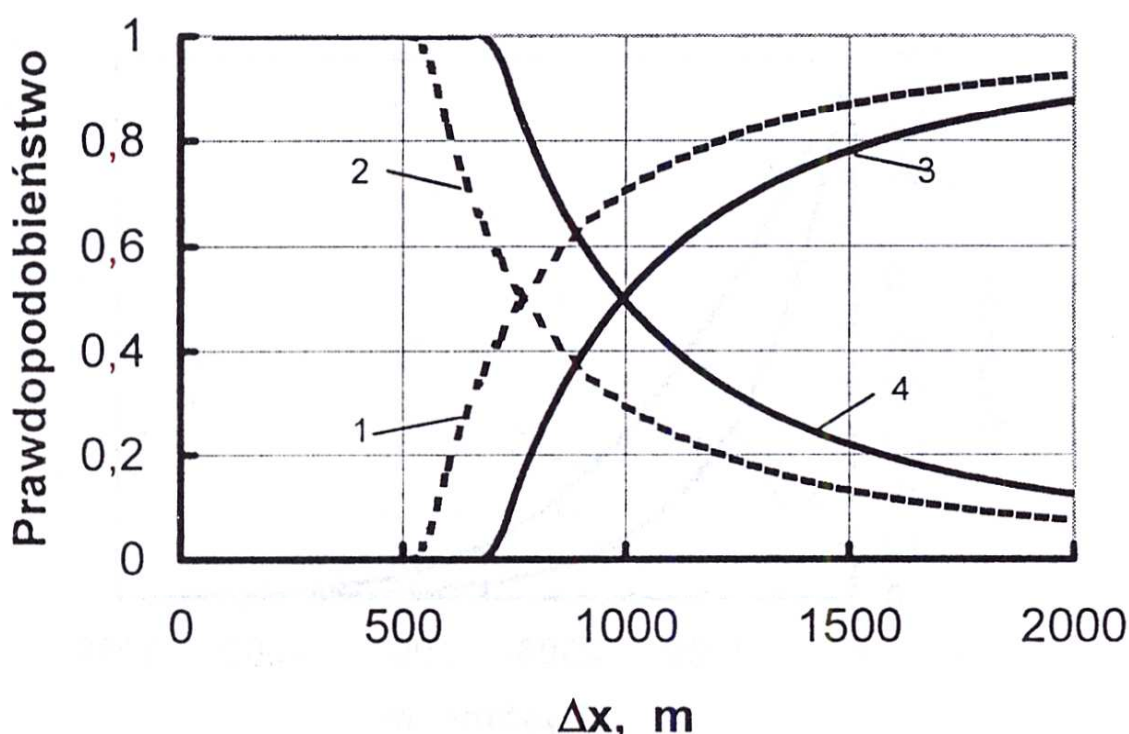
Co nie jest podobne do odpowiedniego prawdopodobieństwa równania (7): $-4K\Delta t/\Delta x^2$.

Pozostały współczynnik ma postać:

$$p_{2t} = \frac{\Delta t - 2\tau}{\Delta t + 2\tau} \quad (14)$$

W tym równaniu suma $p_t + p_{2t}$ jest prawdopodobieństwem, że sygnał znajdujący się w pozycji (i) będzie nadal znajdować się w tej pozycji po upływie czasu $2\Delta t$ (Rys. 1).

Widać, że w tym sformułowaniu $(p_{x+} + p_{x-} + p_t + p_{2t}) = 1$. Wracając do równania (7), można zaobserwować, iż współczynnik przy $V(n-l, i)$, $p_{2t} = 1$, podczas gdy $(p_{x+} + p_{x-} + p_t) = 0$. To samo można zastosować do równania (10) jeśli $\tau = 0$, tzn. nieskończona prędkość propagacji sygnałów.

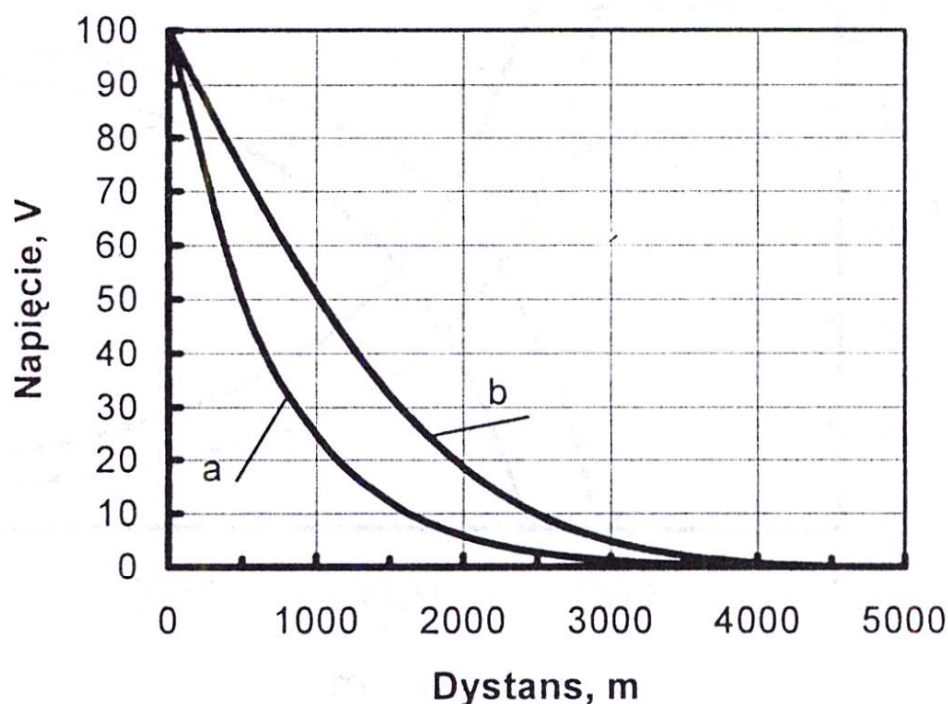


Rys. 1. Zależność współczynników prawdopodobieństw od wielkości kroku przestrzennego linii transmisyjnej Δx przy $\Delta t = 10\tau$. Krzywe 1 i 2 dotyczą odpowiednio p_t i $2p_x$ równania (8). Natomiast krzywe 3 i 4 dotyczą odpowiednio $p_t + p_{2t}$ i $2p_x$ równania (11). Obliczenia wykonano dla linii o parametrach $L_d = 1.284 \times 10^{-7}$ H/m, $C_d = 8.66 \times 10^{-12}$ F/m i $R_d = 1$ Ω /m

Należy zwrócić uwagę, iż w pewnych zakresach dyskretyzacji oraz wartości czasu relaksacji wymienione wyżej prawdopodobieństwa mogą przybierać wartości ujemne. Będzie to rozważane w dalszej części pracy. Liczne eksperymenty numeryczne wykonane w ramach tej pracy wykazały, że równanie (11) posiada rozwiązania stabilne o ile $p_l > 0$. Równocześnie zostało stwierdzone zachodzenie warunku stabilności bez względu na znak p_{2l} . Stwierdzono także występowanie stabilności pod warunkiem, że suma dwóch ostatnich współczynników jest większa od zera, tzn. $p_l + p_{2l} > 0$.

Interpretację współczynników p_l i p_x występujących w równaniach (8) i (11) można zweryfikować numerycznie. Rysunek 1 przedstawia ich zmiany w zależności od wielkości kroku linii transmisyjnej Δx . Krzywe 1 i 2 dotyczą odpowiednio p_l i $2p_x$ równania (8). Natomiast krzywe 3 i 4 dotyczą odpowiednio $p_l + p_{2l}$ i $2p_x$ równania (11). Ze wzrostem Δx prawdopodobieństwo p_l , tego, że sygnał pozostanie w położeniu x w czasie Δt stopniowo zbliża się do jedności. Przeciwnie, prawdopodobieństwo p_x przybycia nowego sygnału do punktu x w czasie Δt spada do zera w miarę zwiększania się Δx .

Równanie Telegrafistów (6) może także być aproksymowane w postaci różnicowej w wersji centralnej dla dwóch drugich pochodnych oraz w postaci



Rys. 2. Rozkład wysokości impulsów po upływie $10 \mu s$ wzdłuż linii transmisyjnej o długości 5000 metrów, podzielonej na 20 elementów. Parametry linii jak na rys. 1

różnicowej w wersji wstecznej dla pierwszej pochodnej czasowej. Prowadzi to do wyrażenia identycznego do równania (11), jednak o różniących się

współczynnikach, które teraz mają następującą postać:

$$p_x = \frac{K \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{\Delta t + \tau} \quad p_t = \frac{\Delta t + 2\tau - 2K \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{\Delta t + \tau} \quad \text{oraz} \quad p_{2t} = \frac{-\tau}{\Delta t + \tau} \quad (15)$$

- (a) wynik na podstawie równania (9): równanie dyfuzji (5) w postaci różnicowej w wersji wyprzedzającej.
- (b) przedstawia trzy pokrywające się krzywe:
 - równanie (8) wersja wsteczna równania dyfuzji (5) w postaci pochodnych różnicowych,
 - równanie (11) wersja centralna równania Telegrafistów w postaci różnicowej (przestrzenna i czasowa),
 - równanie (15) kombinacja wersji centralnej i wstecznej równania Telegrafistów w postaci różnicowej.

Znowu $(p_{x+} + p_{x-} + p_t + p_{2t}) = 1$, jednak widać, że teraz p_{2t} jest bezwarunkowo ujemne. Znowu należy zaznaczyć, iż dla $p_t + p_{2t} > 0$ równanie (11) daje rozwiązania stabilne oraz interpretacja powinna obejmować nierozłącznie sumę $p_t + p_{2t}$.

Na rysunkach 2 i 3 są pokazane rezultaty obliczeń rozkładu wysokości impulsów wzdłuż linii transmisyjnej. W celu porównania omówionych wyżej wersji różnicowych, linię transmisyjną podzielono na 20 odcinków. Impulsy napięciowe zostały obliczone w każdym z węzłów po upływie 10 μ s od chwili wystartowania 100-woltowego impulsu z pierwszego węzła. Obliczenia przeprowadzono oddzielnie korzystając z równań (8) i (9) oraz równania (11) ze współczynnikami (12)-(14). Rysunek 2 przedstawia wyliczony rozkład wysokości impulsów wzdłuż 5000-metrowej linii. Parametry linii są podane w objaśnieniach rysunku. Są pokazane wyniki na podstawie równania (5) dotyczącego równania dyfuzji w postaci pochodnych różnicowych w wersji wyprzedzającej, równania (8) w wersji wstecznej równania dyfuzji (5), wersja centralna równania Telegrafistów (7) w postaci różnicowej (przestrzenna i czasowa) oraz równania (15) kombinacja wersji centralnej i wstecznej równania Telegrafistów w postaci różnicowej. W ten sposób otrzymano 4 krzywe, z których 3 pokrywają się. Krzywa otrzymana na podstawie równania (9) wyraźnie różni się od pozostałych. Wyraźnie widać, że wyniki uzyskane na podstawie równania (8) pokrywają się z tymi otrzymanymi na podstawie równania Telegrafistów oraz w wersji centralnej przy warunkach, gdy p_t jest dodatnie. Jeśli jest ujemne, to równanie (8) daje rozwiązania niestabilne.

Z powodu koincydencji trzech krzywych na rysunku 2, zaszła konieczność pokazania przebiegu nieznacznej różnicy między tymi krzywymi. Na

rysunku 3 pokazana jest bezwzględna różnica między krzywymi wyrażona w woltach w każdym węźle linii. Różnica wysokości impulsów została obliczona po upływie 10 μs oddzielnie na podstawie równania (8) oraz równania (11) ze współczynnikami (12)-(14) i równania (11) ze współczynnikami (15).

Dobór wielkości Δx i Δt

Przypomnijmy, iż Δx jest wielkością najmniejszego elementu, na jakie linia transmisyjna została podzielona, jest to także odległość między najbliższymi węzłami, w których dokonujemy w odstępach czasowych Δt inspekcji ich zawartości pod względem występowania impulsu i jego wysokości. Zatem $\Delta x/\Delta t$ jest właściwością naszego modelu mierzona w jednostkach prędkości.

Możemy także wprowadzić wielkość v , która jest prędkością sygnału naładowanej lub nienaładowanej cząstki. Wyraża się ona wzorem $v = \lambda/\tau$, gdzie λ jest drogą przebytą w czasie relaksacji τ . Przedyskutujemy obecnie warunki, w czasie których współczynnik p_i jest warunkowo lub bezwarunkowo dodatni w zależności od doboru dyskretyzacji oraz parametrów K i τ . Stosując relację $K = v^2\tau$ prawdopodobieństwo p_i może być wyrażone w następującej, bardziej dogodnej do analizy postaci:

$$\text{Równanie (13) (wersja centralna)} \quad p_i = \frac{4\tau}{\Delta t + 2\tau} \left(1 - \frac{v^2}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2} \right) \quad (16)$$

$$\text{Równanie (15) (wersja wsteczna)} \quad p_i = \frac{\Delta t + 2\tau \left(1 - \frac{v^2}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2} \right)}{\Delta t + \tau} \quad (17)$$

Przedyskutujmy warunki na p_i nieujemne dla obu wersji.

$$\text{Przypadek 1. } \Delta x/\Delta t < v \text{ lub } \lambda > \Delta x \left[\frac{\tau}{\Delta t} \right]$$

W tych warunkach p_i dla wersji centralnej jest zawsze ujemne. Występuje warunkowo obszar dodatni dla wersji wstecznej, co można wyrazić w formie:

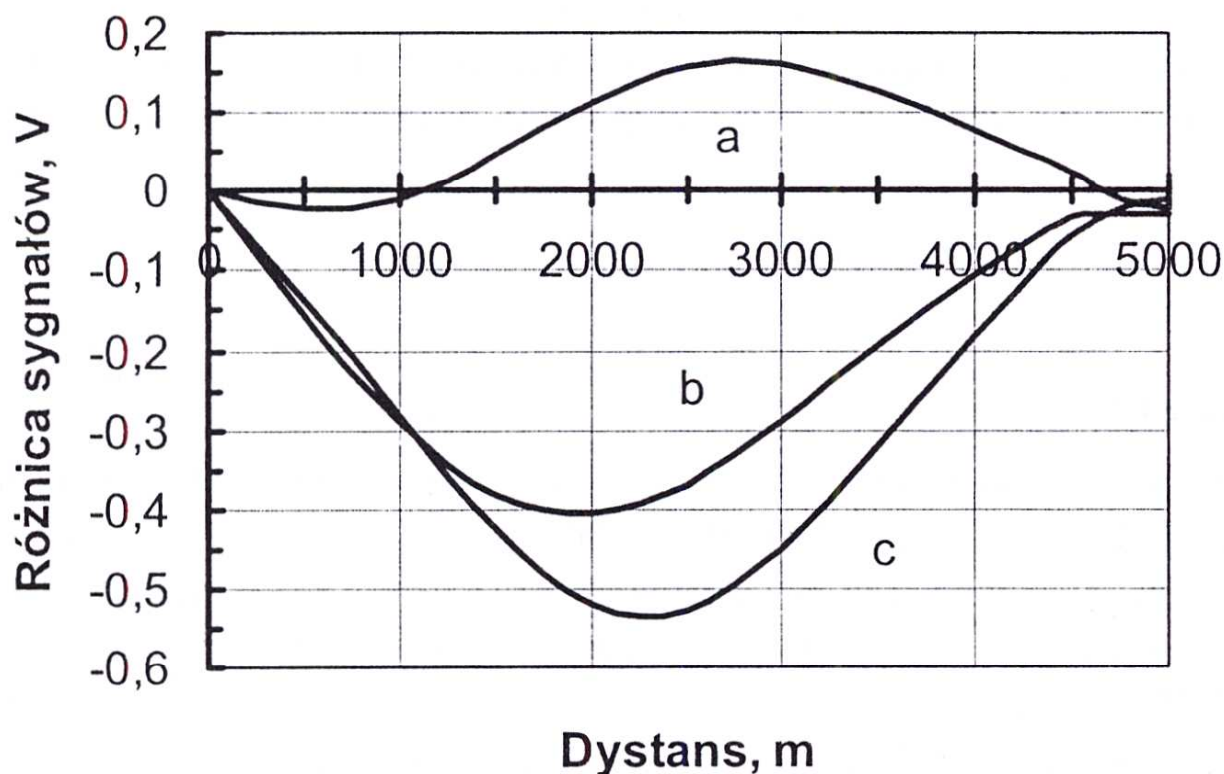
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \frac{v}{\sqrt{\frac{\Delta t}{2\tau} + 1}} \quad (18)$$

Przypadek 2. $\Delta x/\Delta t = v$ lub $\lambda = \Delta x \left[\frac{\tau}{\Delta t} \right]$

Tu p_i jest dodatnie dla równania (17) oraz zero dla równania (16). Wersja centralna będzie miała nieujemne p_{2i} dopóki $\Delta t \geq 2\tau$.

Przypadek 3. $\Delta x/\Delta t > v$ lub $\lambda < \Delta x \left[\frac{\tau}{\Delta t} \right]$

W tym przypadku p_i w równaniach (16) i (17) jest zawsze dodatnie. Natomiast współczynnik p_{2i} zachowuje się tak jak w przypadku 2.



Rys. 3. Bezwzględna różnica między wysokością impulsów otrzymanych z równań (8) i (11) w każdym węźle wzdłuż linii transmisyjnej. Linie podzielono na 20 węzłów oraz w każdym z nich różnice wartości impulsów obliczono po upływie $10 \mu s$, a — różnica między równaniem (11) o współczynnikach (12)–(14) oraz równaniem (11) o współczynnikach (15), b — różnica między równaniem (11) o współczynnikach (15) oraz równaniem (8), c — różnica między równaniem (11) o współczynnikach (12)–(14) oraz równaniem (8). Parametry linii jak na Rys. 1

Podsumowanie

W pracy pokazano możliwość zastosowania prawdopodobieństw przebiegu procesów impulsowych wzdłuż linii transmisyjnej do analizy stabilności rozwiązań niektórych równań różniczkowych przedstawionych w różnych wersjach równań z pochodnymi różnicowymi. Analizowano równania dyfuzji oraz równanie Telegrafistów. Nie jest to pomysł nowy, prawdopodobieństwa przebiegów stanowią podstawę pakietu LISA opracowanej przez Delsano [6]. Przebadano zależność współczynników prawdopodobieństwa od dyskretyzacji przestrzennej przy ustalonej dyskretyzacji czasowej. Wykazano, że współczynnik p_{2t} występujący w równaniu Telegrafistów powinien być interpretowany łącznie ze współczynnikiem p_t określającym prawdopodobieństwo pozostania impulsu w danym węźle po upływie czasu Δt . Jest to związane z wpływem przejść dotyczących sąsiednich węzłów. Dlatego p_{2t} może przybierać wartości ujemne bez powodowania niestabilności rozwiązania. Rezultaty analizy numerycznej pokazują, iż następujące sformułowania równania dyfuzji czy równania Telegrafistów mogą dać zadowalające rozwiązania w postaci różnicowej: wsteczna i centralna wersja równania dyfuzji oraz kombinacja centralnej i wstecznej wersji w przypadku równania Telegrafistów. Równanie o pochodnych różnicowych w wersji wyprzedzającej, mimo stabilnego rozwiązania, daje wyniki różniące się od wyżej wymienionych.

Literatura

- [1] S. Simons, *On the relation between heat flux and temperature gradient*, „Am. J. Phys.” 54, (1986) 1048–1049.
- [2] B. Kaplan, *Probabilistic derivation of the stability condition of Richardson's explicit finite difference equation for the diffusion equation*, „Am. J. Phys.” 52, (1984) 267.
- [3] R.D. Richmayer, K.W. Morton, *Difference method for initiation problems*, Interscience, New York/London 1967.
- [4] D. Potter, *Metody Obliczeniowe Fizyki, Fizyka Komputerowa*, Warszawa PWN, 1982.
- [5] G. Liebmann, *The solution of transient heat-flow and heat transfer problems by relaxation*, „J. Appl. Phys.” 6 (1955) 129–135.
- [6] G. Kaniadakis and P.P. Delsanto, *A local interaction simulation approach to the solution of diffusion problems Mathematical Computer Modelling*, 17 (1993) 31–42.

MICHAŁ J. MAŁACHOWSKI

**Stability of Solutions of Diffusion Equations
in Approximation of Differential Derivatives**

Summary

The calculation results obtained by using the various finite difference formulations for propagation of signals on a lossy transmission line have been compared. Application of the probabilistic approach to analyze the stability of the formulations showed that if the sign of certain transition probability is negative then the algorithm is found to be unstable. Interpretations of each of probability coefficients occurring in the equations in the difference formulation are given. We extend the concept to consider the effects of space and time discretisations on the signs of the coefficients in a probabilistic finite difference implementation of the Telegraphers' equation.