Czasoprzestrzenie sferycznie symetryczne: jednorodna Robertsona-Walkera i niejednorodna Lemaitre'a-Tolmana-Bondiego

Piotr Plaszczyk

Obserwatorium Astronomiczne, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński, ul. Orła 171, 30-244 Kraków

piotr.plaszczyk@uj.edu.pl

Streszczenie

W niniejszej pracy zaczynam od otrzymania za pomocą równań Killinga ogólnej postaci tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$ czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej. Następnie zadając warunek jednorodności dla ogólnej postaci metryki sferycznie symetrycznej, otrzymuję postać metryki Robertsona-Walkera opisującą Wszechświat jednorodny i izotropowy.

W kolejnym rozdziale dotyczącym modelu niejednorodnej czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej Lemaitre'a-Tolmana-Bondiego znajduje się wyprowadzenie postaci tej metryki przy założeniu najprostszego równania stanu $p = 0$. Przedstawione są również modele ewolucji wszechświata z czasoprzestrzenią LTB oraz FLRW, a także są omówione zastosowania metryki LTB w kosmologii. Na końcu zamieszczam spis literatury, z której korzystałem przy pisaniu niniejszej pracy. Do wyliczenia składowych tensora Einsteina $G^{\alpha}{}_{\beta}$ użyłem pakietu ccgrg (Copernicus Center General Relativity Package for Mathematica 8) dostępnego na stronie: www.copernicuscenter.net/ccgrg

1. Metryka Robertsona - Walkera

1.1. Sferycznie symetryczna 4-wymiarowa przestrzeń Riemanna

Metryka Robertsona-Walkera opisuje wszechświat, który jest jednorodny i izotropowy, jest więc ona sferycznie symetryczna wokół każdego punktu tej przestrzeni. Żeby korzystać z założenia o symetrii sferycznej do wyprowadzenia postaci metryki R–W można najpierw opisać symetrie w formie kowariantnej, która nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Tego opisu dostarczają równania:

$$k^{\mu} T_{\alpha\beta;\mu} + k^{\mu}{}_{;\alpha} T_{\mu\beta} + k^{\mu}{}_{;\beta} T_{\alpha\mu} = 0 \tag{1}$$

które musi spełniać każde pole wektorów stycznych do trajektorii, wzdłuż której tensor $T_{\alpha\beta}$ jest niezmienniczy względem transformacji oraz każde rozwiązanie równań (1) generuje grupę transformacji, dla której $T_{\alpha\beta}$ jest niezmienniczy [1].

Jeżeli tensor $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ jest metryką określoną na rozmaitości, wtedy własności geometryczne tej przestrzeni są własnościami metrycznymi. Symetrie tensora metrycznego, które mogą występować, mają fundamentalne znaczenie. Symetrie te nazywamy izometriami, ich generatory – wektorami Killinga, a równania (1) definiujące te wektory nazywamy równaniami Killinga [2].

Korzystając z równań Killinga można znaleźć tensor metryczny przestrzeni Riemanna, której symetrie są zapostulowane. Przestrzeń Riemanna jest przestrzenią sferycznie symetryczną, gdy istnieje grupa obrotów O(3) wokół pewnego punktu p na rozmaitości różniczkowej. Tensor metryczny musi spełniać równania Killinga dla każdego z trzech generatorów grupy rotacji O(3). Rozważmy więc sferę, której równanie można zapisać w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{2}$$

gdzie: R – promień sfery,
x, y, z – wsp. kartezjańskie.

Żeby wyznaczyć generatory obrotu trzeba rozważyć obroty sfery o kąt α w płaszczyznach:
płaszczyzna (yz): $x' = x,\ \ y' = y\,cos\alpha - z\,sin\alpha,\ \ z' = y\,sin\alpha + z\,cos\alpha$
płaszczyzna (xz): $x' = z \sin\alpha + x \cos\alpha,\ \ y' = y,\ \ z' = z \cos\alpha - x \sin\alpha$
płaszczyzna (xy): $x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha,\ \ y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha,\ \ z' = z$ [1, 2].

Wektory Killinga odpowiadające powyższej transformacji to:

$$k^{\mu}_{(yz)} = y\delta^{\mu}_{z} - z\delta^{\mu}_{y}\ ,\ \ k^{\mu}_{(xz)} = z\delta^{\mu}_{x} - x\delta^{\mu}_{z}\ ,\ \ k^{\mu}_{(xy)} = -y\delta^{\mu}_{x} - x\delta^{\mu}_{y}$$

Dowolna transformacja sfery na siebie może być opisana złożeniem trzech kolejnych obrotów wokół trzech różnych osi. Wygodnie jest przedstawić wektory Killinga przez odpowiadające im operatory różniczkowe nazywane generatorami obrotów:

$$J_{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} k^{\mu}_{(i)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

$$J_{(yz)} = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ \ J_{(xz)} = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ \ J_{(xy)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

I po przetransformowaniu generatorów obrotu do współrzędnych sferycznych:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta$$

$$J_{(yz)} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ,J_{(xz)} = cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad , \; J_{(xy)} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

można teraz rozwiązać równania Killinga dla tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}(t,r,\theta,\varphi)$ z danymi wektorami Killinga:

$$k^{\mu}_{(1)} = -sin\varphi\delta^{\mu}_{2} - cos\varphi\; ctg\vartheta\; \delta^{\mu}_{3}\;, k^{\mu}_{(2)} = cos\varphi\delta^{\mu}_{2} - sin\varphi\; ctg\vartheta\; \delta^{\mu}_{3}\;, k^{\mu}_{(3)} = \delta^{\mu}_{3}$$

Równanie Killinga dla wektora Killinga odpowiadającego transformacji wokół osi „z”:

$$\delta^{\mu}_{3} g_{\alpha\beta,\mu} + \delta^{\mu}_{3,\alpha} g_{\mu\beta} + \delta^{\mu}_{3,\beta} g_{\alpha\mu} = \delta^{\mu}_{3} g_{\alpha\beta,\mu} = g_{\alpha\beta,3} = 0$$

To oznacza, że tensor metryczny $g_{\alpha\beta}$ jest niezależny od $x^3 = \varphi$.
Równania Killinga dla pozostałych wektorów Killinga:

$$\begin{aligned} sin\varphi\; g_{\alpha\beta,2} + (sin\varphi)_{,\alpha}\, g_{2\beta} + (sin\varphi)_{,\beta}\, g_{\alpha 2} + (cos\varphi\; ctg\vartheta)_{,\alpha}\, g_{3\beta} \\ + (cos\varphi\; ctg\vartheta)_{,\beta}\, g_{\alpha 3} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} cos\varphi\; g_{\alpha\beta,2} + (cos\varphi)_{,\alpha}\, g_{2\beta} + (cos\varphi)_{,\beta}\, g_{\alpha 2} - (sin\varphi\; ctg\vartheta)_{,\alpha}\, g_{3\beta} \\ - (sin\varphi\; ctg\vartheta)_{,\beta}\, g_{\alpha 3} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Mnożąc równanie (3) przez cosφ, a równanie (4) przez sinφ i odejmując stronami, oraz korzystając z tożsamości:

$$sin\varphi(sin\varphi)_{,\alpha} + cos\varphi(cos\varphi)_{,\alpha} \equiv 0$$
$$cos\varphi(sin\varphi)_{,\alpha} - sin\varphi(cos\varphi)_{,\alpha} \equiv \varphi_{,\alpha}$$

otrzymuje się równanie:

$$\varphi_{,\alpha}\, g_{2\beta} + \varphi_{,\beta}\, g_{\alpha 2} + (ctg\theta)_{,\alpha}\, g_{3\beta} + (ctg\theta)_{,\beta}\, g_{\alpha 3} = 0 \tag{5}$$

Mnożąc równie (3) przez sinφ, a równanie (4) przez cosφ, otrzymuje sie po uproszczeniu:

$$g_{\alpha\beta,2} - \varphi_{,\alpha}\, ctg\theta\; g_{3\beta} - \varphi_{,\beta}\, ctg\theta\; g_{3\alpha} = 0 \tag{6}$$

Z równań (5) otrzymujemy:

$$g_{02} = g_{03} = 0$$
$$g_{12} = g_{13} = 0$$
$$g_{20} = g_{21} = g_{23} = 0, \;\; g_{22} = \frac{1}{sin^2\theta} g_{33}$$

$$g_{30} = g_{31} = g_{32} = 0,\ \ g_{33} = sin^2\theta g_{22}$$

Z równań (6) otrzymujemy: $g_{\alpha\beta,2} \ = \ 0\, dla\, \alpha \ \neq \ 3 \ \neq \ \beta$

Z powyższego wynika ogólna postać metryki sferycznie symetrycznej:

$$ds^2 = g_{00}(t,r)dt^2 + 2g_{01}(t,r)dt\, dr + g_{11}(t,r)dr^2 + g_{22}(t,r)\ (d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)$$

Zapostulowane symetrie dotyczą podprzestrzeni $\{\mathrm{t = const},\ \mathrm{r = const}\}$, dla której metryka ma postać:

$$dl^2 = \ g_{22}(t,r)\ (d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)$$

W tej podprzestrzeni $\mathrm{g}_{22} = \mathrm{const}$, a centrum symetrii jest w miejscu gdzie $g_{22} = 0$. Można tak zdefiniować współrzędną radialną, żeby $g_{22} = r^2$. W ogólności nie ma jednak bezpośredniej relacji pomiędzy r, a odległością od centrum sfery do jej powierzchni. Punkt będący centrum sfery nie musi nawet należeć do rozmaitości, może zawierać osobliwość.

Po skorzystaniu ze swobody wyboru układu współrzędnych otrzymamy najprostszą formę metryki sferycznie symetrycznej czasoprzestrzeni:

$$ds^{\ 2} = \ g_{00}(t,r)dt^2 + 2g_{01}(t,r)dt\, dr + g_{11}(t,r)\ dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2) \quad (8)$$

1.2. Czasoprzestrzeń jednorodna i izotropowa, metryka Robertsona-Walkera

Tensor metryczny reprezentujący model wszechświata jednorodnego i izotropowego musi odzwierciedlać własności tych symetrii. Obserwatorzy fundamentalni we wszechświecie spadają swobodnie w kosmicznym (globalnym) polu grawitacyjnym, czyli poruszają się po geodetykach czasowych. Za obserwatorów fundamentalnych można uznawać takie galaktyki, które nie oddziaływują z sąsiednimi galaktykami. W układzie współrzędnych związanym z tymi galaktykami, współrzędna czasowa jest czasem własnym dla każdej takiej galaktyki, a współrzędne przestrzenne tych galaktyk się nie zmieniają. Taki układ współrzędnych jest układem współporuszającym. Ekspansja Wszechświata, czyli wzrost odległości własnych między galaktykami, jest reprezentowana przez zależny od czasu współczynnik występujący w metryce. Żeby rozważana ekspansja była zgodna z Zasadą Kosmologiczną, potrzeba aby te współczynniki nie zależały od zmiennych przestrzennych, czyli rozszerzanie wszechświata było niezależne od miejsca w przestrzeni. Taki wszechświat jest jednorodny i tensor metryczny musi spełniać równania Killinga dla translacyjnych wektorów Killinga. Wektory Killinga, które reprezentują translacje w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej w układzie kartezjańskim to:

$$k^{\mu}_{(x)} = \delta^{\mu}_{x}\ ,\ \ k^{\mu}_{(y)} = \delta^{\mu}_{y}\ ,\ \ k^{\mu}_{(z)} = \delta^{\mu}_{z}$$

Komutatory dla tych pól Killinga wynoszą:

$$\left[k^{\mu}_{(x)}\partial_{\mu}\,, k^{\mu}_{(y)}\partial_{\mu}\right] = 0,\ \ \left[k^{\mu}_{(y)}\partial_{\mu}\,, k^{\mu}_{(z)}\partial_{\mu}\right],\ \ \left[k^{\mu}_{(z)}\partial_{\mu}\,, k^{\mu}_{(x)}\partial_{\mu}\right]$$

Rozwiązując równania Killinga dla tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}(t, r, \theta, \varphi)$ otrzymuje się:

$$\begin{gathered}\delta^{\mu}_{x} g_{\alpha\beta,\mu} + \delta^{\mu}_{x\,,\alpha} g_{\mu\beta} + \delta^{\mu}_{x\,,\beta} g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\beta,x} = 0\\ \delta^{\mu}_{y} g_{\alpha\beta,\mu} + \delta^{\mu}_{y\,,\alpha} g_{\mu\beta} + \delta^{\mu}_{y\,,\beta} g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\beta,y} = 0\\ \delta^{\mu}_{z} g_{\alpha\beta,\mu} + \delta^{\mu}_{z\,,\alpha} g_{\mu\beta} + \delta^{\mu}_{z\,,\beta} g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\beta,z} = 0\end{gathered}$$

Powyższy wynik oznacza, ze metryka płaskiej czasoprzestrzeni jednorodnej we współrzędnych kartezjańskich nie może zależeć od zmiennych przestrzennych.

Jeśli w pewnej chwili t_0 hiperpowierzchnia stałego czasu ma element długości $dl^2(t_0) = h_{ij}(t_0)\, dx^i dx^j$ to ekspansja hiperpowierzchni może być przedstawiona jako $dl^2(t_1) = f(t_1\,, t_0)\, h_{ij}(t_0)\, dx^i\, dx^j = h_{ij}(t_1)\, dx^i\, dx^j$. Taki zapis oznacza, że wszystkie współczynniki $h_{ij}(t)$ wzrastają w tym samym tempie ze względu na jednorodność Wszechświata i ekspansję hiperpowierzchni można zapisać ogólnie [3]:

$$dl^2(t) = a^2(t) h_{ij}(t_1)\, dx^i\, dx^j \tag{9}$$

$a(t)$ jest czynnikiem skali, który przyjmujemy, że jest równy 1 w chwili obecnej.

Dla hiperpowierzchni $t = t_0$ metryka czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej (8) sprowadza się do następującej postaci:

$$ds^2{}_{t=const} = g_{11}(t_0, r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{10}$$

Forma współczynników h_{ij} ze wzoru (9) musi zapewniać symetrię sferyczną dla hiperpowierzchni stałego czasu, więc powinna być zgodna ze współczynnikami występującymi we wzorze (10):

$$dl^2(t) = a^2(t)\, [g_{11}(r)\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)] \tag{11}$$

Element liniowy dla całej czasoprzestrzeni można teraz zapisać zgodnie ze wzorem (8) dla metryki sferycznie symetrycznej:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{00}(t,r)\, dt^2 + 2g_{01}(t,r)\, dt\, dr + a^2(t)\, [g_{11}(r)\, dr^2 + r^2(d\theta^2 \\ + sin^2\theta\, d\varphi^2)] \end{aligned} \tag{12}$$

Ponieważ t jest czasem własnym wzdłuż stałych współrzędnych $x^i = const$, więc $g_{00}(t,r) = -1$. Definicja równoczesności w układzie współrzędnych współporuszających musi być zgodna z założeniem o możliwości foliacji czasoprzestrzeni na hiperpowierzchnie stałego czasu t = const, które są jednorodne i izotropowe, więc w tym układzie współrzędnych $g_{01}(t,r) = 0$ i stąd otrzymujemy taką postać metryki:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[g_{11}(r)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 \; + \; sin^2\theta\, d\varphi^2)] \tag{13}$$

Nieznaną funkcję $g_{11}(r)$ można zastąpić funkcją $exp[\alpha(r)]$ pod warunkiem, że $g_{11} > 0$ (warunek na sygnaturę metryki $(- + ++)$ jest spełniony wszędzie poza obszarami horyzontu czarnych dziur). W rezultacie otrzymujemy następującą postać metryki jednorodnej i z tego względu skoro izotropowej w jednym punkcie, to również izotropowej wokół każdego punktu:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[e^{2\alpha}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 \; + \; sin^2\theta\, d\varphi^2)] \tag{14}$$

Aby wyznaczyć funkcję $\alpha(r)$ występującą w metryce trzeba skorzystać z warunku koniecznego na to, żeby metryka była jednorodna na całej hiperpowierzchni stałego czasu. Takim warunkiem koniecznym jest stałość wartości skalara Ricciego $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ w każdym punkcie hiperpowierzchni $t = \; const$ (w dalszej części będzie pokazane, że jest to warunek wystarczający):

$$R = \frac{2e^{-2\alpha}(-1 + e^{-2\alpha} + 2r\alpha_{,r})}{r^2} = \frac{2}{r^2}[1 - (e^{-2\alpha} - 2e^{-2\alpha}r\alpha_{,r})]$$
$$= \frac{2}{r^2}[1 - (re^{-2\alpha})_{,r}]$$

$$R = const,\ \frac{R}{2} = const = \kappa = \frac{1}{r^2}[1 - (re^{-2\alpha})_{,r}]$$

Całkując powyższe równanie otrzymujemy:

$$\int d(re^{-2\alpha}) = \int (1 - r^2\kappa)dr$$
$$re^{-2\alpha} = r - \frac{1}{3}r^3\kappa + C$$
$$e^{2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}r^2\kappa + \frac{C}{r}} \tag{15}$$

gdzie *C* jest stałą całkowania. Lokalnie czasoprzestrzeń jest płaska i mały okrąg o promieniu $r =$ ma obwód 2π i promień własny $|g_{11}|^{1/2}\varepsilon$. Dostatecznie mały okrąg wokół punktu r = 0 ma stosunek obwodu do promienia równy $2\pi\,|g_{11}|^{-1/2}$. Jeśli przestrzeń jest lokalnie płaska w r = 0, ten stosunek musi być równy 2π.

Stąd $g_{11}(r = 0) = 1$ i stała całkowania $C = 0$. Oznaczając $k = (1/3)\,\kappa$ można zapisać równanie (14) w formie:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)] \qquad (16)$$

Powyższa metryka jest metryką Robertsona-Walkera. Możemy w niej, bez straty ogólności wyskalować współrzędną radialną r w ten sposób, żeby k przyjmowało jedną z trzech wartości: $-1, 0, +1$.
Dla przykładu rozważmy $k = -3$, przeskalowując $\tilde{r} = \sqrt{3}r$, $\tilde{a}(t) = 3^{-1/2}a(t)$ otrzymamy element liniowy:

$$ds^2 = -dt^2 + \tilde{a}^2(t)[\frac{1}{1 - k\tilde{r}^2}d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2]$$

Takim przeskalowywaniem współrzędnej r nie możemy zmienić znaku k. Aby pokazać, że stałość skalara Riemanna na hiperpowierzchni $t = const$ jest wystarczającym warunkiem na to, żeby izotropowa metryka (14) była jednorodna, wystarczy rozważyć 3 przypadki dla których $k = 0, +1, -1$.

$k = 0$: w każdej chwili t_0 element liniowy ma postać:
$dl^2 = a^2(t_0)[dr^2 + r^2 d\Omega^2] = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2$ gdzie $\tilde{r} = a(t_0)r$. To jest metryka przestrzeni euklidesowej, która jest jednorodna i izotropowa. To jest płaska metryka R-W.

$k = 1$: definiując nową współrzędną $\chi(r)$ taką, że $d\chi = (1 - r^2)^{-1/2}dr$, a następnie całkując:

$$\int_0^{\chi} d\chi = \int_0^{r} \frac{dr'}{\sqrt{1 - r^2}}$$

otrzymujemy $r = \sin\chi$. Element liniowy dla hiperpowierzchni $t = t_0$ ma postać:
$dl^2 = a^2(t_0)[d\chi^2 + sin^2\chi\, d\Omega^2]$, jest to metryka sfery S^3 i jest ona metryką jednorodną i izotropową.

$k = -1$: definiując nową współrzędną $\chi(r)$ taką, że $d\chi = (1 + r^2)^{-1/2}dr$, następnie całkując:

$$\int_0^{\chi} d\chi = \int_0^{r} \frac{dr'}{\sqrt{1 + r^2}}$$

otrzymujemy $r = sinh\chi$. Element liniowy dla hiperpowierzchni $t = t_0$ ma postać:
$dl^2 = a^2(t_0)[d\chi^2 + sinh^2\chi d\Omega^2]$, jest to metryka trójwymiarowej przestrzeni Łobaczewskiego, która również jest jednorodna i izotropowa.

2. Metryka Lemaitre'a – Tolmana – Bondiego

2.1. Model czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej i niejednorodnej

Metrykę czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej (8), można zapisać w układzie współrzędnych współporuszajacych się i synchronicznych, w którym składowa czasowo-przestrzenna tensora metrycznego $g_{01} = 0$ [1]:

$$ds^2 = e^{C(t,r)}dt^2 - e^{A(t,r)}dr^2 - R^2(t,r)(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{17}$$

Przy sygnaturze metryki $(+\ -\ -\ -)$ tensor energii – pędu dla cieczy doskonałej:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{18}$$

Czteroprędkość cieczy doskonałej w tych współrzędnych ma postać:

$$u^\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{C(t,r)}}\delta_0^\alpha \quad , \ oraz \quad u^\alpha u_\alpha = 1 \tag{19}$$

Dla tej metryki równania pola Einsteina z uwzględnieniem stałej kosmologicznej Λ:

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \kappa T^{\mu}{}_{\nu} - \Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{20}$$

gdzie $\kappa = 8\pi G$, oraz $c = 1$, mają postać:
(do wyliczenia składowych tensora Einsteina $G^{\alpha}{}_{\beta}$ użyłem pakietu ccgrg, Copernicus Center General Relativity Package for Mathematica 8, dostępnego na stronie: www.copernicuscenter.net/ccgrg , a równania zapisuję w postaci jak w [1])

$$G^0{}_0 = e^{-C(t,r)}\left(\frac{\dot{R}^2(t,r)}{R(t,r)} + \frac{\dot{A}(t,r)\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}\right)$$
$$-e^{-A(t,r)}\left(2\frac{R_{,rr}(t,r)}{R(t,r)} + \frac{R_{,r}{}^2(t,r)}{R^2(t,r)} - \frac{A_{,r}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)}\right) + \frac{1}{R^2(t,r)} = \kappa\rho - \Lambda \tag{21}$$

$$G^1{}_0 = e^{-A(t,r)}\left(2\frac{R_{,r}{}^2(t,r)}{R(t,r)} - \frac{\dot{A}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)} - \frac{\dot{R}(t,r)C_{,r}(t,r)}{R(t,r)}\right) = 0 \tag{22}$$

$$G^1{}_1 = e^{-C(t,r)}\left(2\frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} + \frac{\dot{R}^2(t,r)}{R^2(t,r)} - \frac{\dot{C}(t,r)\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}\right) - e^{-A(t,r)}\left(\frac{R_{,r}{}^2(t,r)}{R^2(t,r)} + \frac{C_{,r}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)}\right) + \frac{1}{R^2(t,r)} = -\kappa\rho - \Lambda \tag{23}$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = \frac{1}{4}e^{-C(t,r)}\left(4\frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} - 2\frac{\dot{C}(t,r)\dot{R}(t,r)}{R(t,r)} + 2\frac{\dot{A}(t,r)\dot{R}(t,r)}{R(t,r)} + 2\ddot{A}(\mathrm{t,r}) + \dot{\mathrm{A}}^2(\mathrm{t,r}) - \dot{\mathrm{C}}(\mathrm{t,r})\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{t,r})\right) - \frac{1}{4}e^{-A(t,r)}\left(4\frac{R_{,rr}(t,r)}{R(t,r)} + 2\frac{C_{,r}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)} - 2\frac{A_{,r}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)} + 2C_{,rr}(t,r) + C_{,r}{}^2(t,r) - C_{,r}(t,r)A_{,r}(t,r)\right) = -\kappa p - \Lambda \tag{24}$$

Aby wyznaczyć $e^{C(t,r)}$ i $e^{A(t,r)}$ występujące w równaniach Einsteina trzeba założyć równanie stanu dla materii. Najprostszym założeniem jest $p = 0$ i dynamika wszechświata zależy jedynie od grawitacji, materia porusza się po geodetykach czasowych. Wtedy czteroprzyspieszenie musi być równe zero:

$$\dot{u}^\alpha = u^\alpha{}_{;\beta}\, u^\beta = u^\alpha{}_{;0}\, u^0 = \left(u^\alpha{}_{,0} + u^\beta \Gamma^\alpha{}_{0\beta}\right)u^0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial r}\frac{dr}{dt}\right)e^{-C}\delta_0^\alpha + e^{-C}\Gamma^\alpha{}_{00}$$

$$\dot{u}^0 = -\frac{1}{2}\dot{C}e^{-C} + \frac{1}{2}\dot{C}e^{-C} = 0$$

$$\dot{u}^1 = \frac{1}{2}e^{-A}C_{,r} = 0 <=> \frac{dC}{dr} = 0$$

Stąd wynika niezależność parametru C od współrzędnej radialnej. Dodatkowo transformacja współrzędnej czasowej $t' = \int e^{C/2}dt$ prowadzi do tego, że w nowym układzie współrzędnych składowa czasowa metryki $g_{00} = 1$. Wobec tego równanie (22) uprości się do postaci:

$$G^1{}_0 = e^{-A(t,r)}\left(2\frac{\dot{R}_{,r}(t,r)}{R(t,r)} - \frac{\dot{A}(t,r)R_{,r}(t,r)}{R(t,r)}\right) = 0 \tag{25}$$

Po pomnożeniu równania (25) przez $R(t,r)$ można je zapisać w ten sposób:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{A(t,r)}{2}}R_{,r}(t,r)\right)=0$$

Zgodnie z powyższym równaniem zaznaczam, że wyrażenie $e^{-A(t,r)/2}R_{,r}(t,r)$ może być zależne jedynie od współrzędnej r: $f(r)=e^{-A(t,r)/2}R_{,r}(t,r)$
Z tego równania można wyznaczyć funkcję $e^{A(t,r)}$:

$$e^{-A(t,r)}=\frac{R_{,r}{}^{2}(t,r)}{f^{2}(r)} \tag{26}$$

Wyrażenie (26) nie może być ujemne, co jest zgodne z przyjętą sygnaturą metryki. Nieznaną funkcję $f^2(r)$ można zapisać w innej formie, pomocnej w dalszych obliczeniach, w których pojawia sie funkcja $e^{A(t,r)}$

$$f^{2}(r)=1+2E(r),\quad E(r)\geq-\tfrac{1}{2} \tag{27}$$

Ostatecznie można równanie (26) zapisać w poniższy sposób:

$$e^{A(t,r)}=\frac{R_{,r}{}^{2}(t,r)}{1+2E(r)} \tag{28}$$

Zapisuję równania pola Einsteina (21)-(24) z uwzględnieniem wyznaczonych powyżej postaci funkcji występujących w metryce i przyjętej postaci równania stanu dla materii $p=0$:

$$\begin{aligned}G^{0}{}_{0}=&\frac{\dot R^{2}(t,r)}{R^{2}(t,r)}+2\frac{\dot R(t,r)\dot R_{,r}(t,r)}{R(t,r)R_{,r}(t,r)}\\&-\frac{1+2E(r)}{R_{,r}{}^{2}(t,r)}\left(\frac{R_{,r}{}^{2}(t,r)}{R^{2}(t,r)}+\frac{2R_{,r}(t,r)}{R(t,r)}\frac{E_{,r}(t,r)}{1+2E(r)}\right)+\frac{1}{R^{2}(t,r)}=\kappa\rho-\Lambda\end{aligned} \tag{29}$$

$$G^{1}{}_{0}=0=0 \tag{30}$$

$$G^{1}{}_{1}=2\frac{\ddot R}{R}+\frac{\dot R^{2}}{R^{2}}-\frac{2E}{R^{2}}=-\Lambda \tag{31}$$

$$\begin{aligned}G^{2}{}_{2}=G^{3}{}_{3}=&\frac{1}{R(t,r)R_{,r}(t,r)}\big[\ddot R(t,r)R_{,r}(t,r)+\ddot R_{,r}(t,r)R(t,r)+\dot R(t,r)\dot R_{,r}(t,r)\\&-E_{,r}(r)\big]=-\kappa\rho-\Lambda\end{aligned} \tag{32}$$

Składowe pozadiagonalne tensora Einsteina, w tym składowa $G^1{}_0$ z równania (30) są teraz tożsamościowo równe zero.
Mnożąc równanie (31) przez $R^2\dot{R}$ otrzymuje się równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R\dot{R}^2 - 2ER + \frac{1}{3}\Lambda R^3\right) = 0$$

które po scałkowaniu wyznacza zależność $R(t,r)$ od $E(t,r)$ i od kolejnej dowolnej funkcji $M(r)$, która pojawia się jako stała całkowania niezależna od współrzędnej t:

$$\dot{R}^2(t,r) = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R(t,r)} - \frac{1}{3}\Lambda R^2(t,r) \tag{33}$$

Ostatecznie można zapisać metrykę Lemaitre'a-Tolmana-Bondiego w postaci:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R_{,r}{}^2(t,r)}{1+2E(r)}dr^2 - R^2(t,r)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi) \tag{34}$$

2.2. Model ewolucji wszechświata z metryką RW oraz LTB

Równanie (33) opisujące ewolucję w czasie parametru skali $R(t,r)$ czasoprzestrzeni LTB dla ustalonej współrzędnej r, ma przy założeniu, że $p = 0$ algebraicznie identyczną postać jak dobrze znane równanie Friedmana opisujące ewolucję czynnika skali $a(t)$ dla czasoprzestrzeni RW:

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2$$

gdyż po skorzystaniu z równania ruchu cieczy kosmicznej

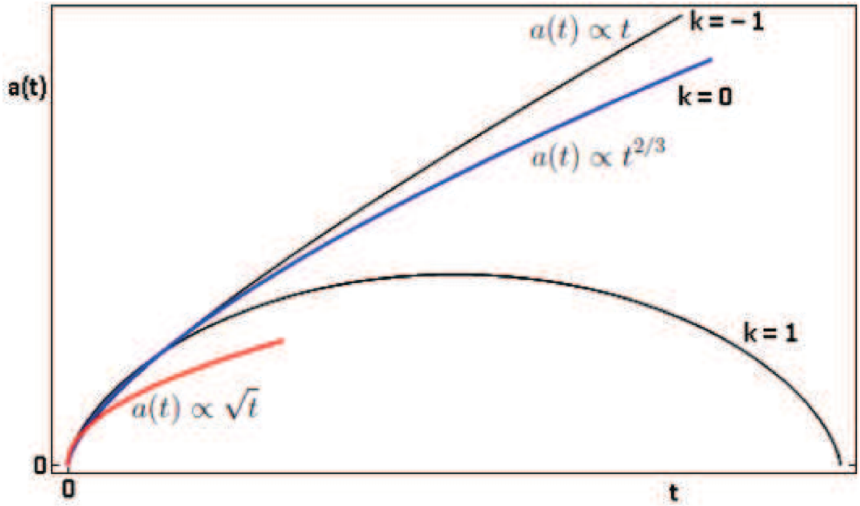
$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2$$

oraz po skorzystaniu z założenia $p = 0$, wynika: $\rho a^3 = const = C$, a równanie Friedmanna można zapisać w poniższy sposób [1]:

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{\kappa C}{3a} - \frac{1}{3}\Lambda a^2 \tag{35}$$

$$\dot{R}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 \tag{36}$$

Wobec tego ewolucja czynnika skali $R(t,r)$ dla ustalonej współrzędnej *r* jest opisywana podobnymi równaniami, jak ewolucja czynnika skali $a(t)$ w modelu czasoprzestrzeni Robertson-Walkera [1, 4], w którym modele ewolucji opisujące wszechświat jednorodny i izotropowy, a więc również wypełniony jednorodnie i izotropowo materią kosmiczną, zależą od parametru k określającego krzywiznę wszechświata: $k = 0$ – model wszechświata płaskiego, $k = 1$ model wszechświata o geometrii sferycznej, $k = -1$ model wszechświata o geometrii hiperbolicznej. W tym kontekście metryka RW jest nazywana metryką Friedmana-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera. Dla przypadku $\Lambda = 0$ modele ewolucji wszechświata FLRW można przedstawić na wykresie parametru skali $a(t)$:



Rys. 1. Modele ewolucji Wszechświata dla parametru $k = -1, 0, +1$. Dla $k = -1$, $a(t)$ jest proporcjonalne do t dla dostatecznie dużych t: $t \to \infty$.

Z porównania wzorów (33) i (35) wynika, że wartość parametru krzywizny $k = 0$ w modelu FLRW odpowiada wartości $E(r) = 0$ w modelu LTB. Oraz wartość $k > 0$ odpowiada wartości $E(r) < 0$, oraz $k < 0$ odpowiada $E(r) > 0$.
Na hiperpowierzchni stałego czasu $t = const$ przestrzeni LTB, funkcja R zależy tylko od współrzędnej radialnej, dlatego może być ona używana jako zmienna niezależna zamiast zmiennej r oraz może być traktowana jako współrzędna radialna. Wybierając ortonormalną bazę zdefiniowaną przez metrykę hiperpowierzchni $t = const$: $\{e^1 = (1 + 2E)^{-1/2} dR,\ e^2 = R d\theta,\ e^3 = R \sin\theta\, d\varphi\}$ po obliczeniu w niej tensora krzywizny Riemanna $R^a{}_{bcd}$ otrzymuje się następujące niezależne składowe:

$$R^1{}_{221} = \frac{R^1{}_{331}}{\sin^2\theta} = RE_{,r} \quad , \quad R^3{}_{223} = 2E$$

Stąd gdy $E = 0$, każdy punkt hiperpowierzchni $t = const$ jest płaski. Jeśli $E = const$, to krzywizna jest stała. W przeciwieństwie do modelu FLRW, krzywizna z leży od współrzędnej radialnej r, w szczególności może byś dodatnia w jednym miejscu, a ujemna w innym. Z tego względu modele ewolucji przedstawione na rysunku 1 (uwzględniając odpowiedniość parametru k w modelu FLRW do wartości funkcji $E(r)$ w modelu LTB) nie muszą opisywać różnych modeli kosmologicznych, lecz mogą być właściwe w różnych obszarach tej samej czasoprzestrzeni.

2.3. Metryka LTB w kosmologii

Najbardziej bezpośrednie przesłanki dla przyspieszenia ekspansji Wszechświata pochodzą z obserwacji supernowych SNIa o dużym przesunięciu ku czerwieni $z \sim 0.5 - 1$.

Obserwowana zależność odległość jansnościowa – redshift jest w modelu FLRW najlepiej dopasowana przy parametrze gęstości materii (ciemna materia oraz materia barionowa) $\Omega_M \approx 0.3$ i parametrze gęstości „ciemnej energii" $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ (ujemna energia próżni).

Mała wielkość fluktuacji w promieniowaniu reliktowym rzędu $\Delta T/T_0 \sim 10^{-5}$ wskazuje, że jednorodny model FLRW jest dobrym przybliżeniem dla wczesnego Wszechświata. Dla mniejszych redshiftów kontrast gęstości materii $\delta\rho/\rho$ wzrasta do wartości rzędu 1. Dla rozmiarów rzędu 60/h Mpc średni kontrast gęstości ~ 1 i maleje do wartości ~ 0.1 dla skal rzędu ~ setek Mpc. [5]

Niejednorodna metryka LTB dostarcza możliwości dopasowywania relacji odległość jasnościowa – redshift dla supernowych typu Ia bez uwzględniania w równaniach pola Einsteina stałej kosmologicznej Λ.

Równanie Friedmana dla metryki FLRW razem ze stałą kosmologiczną i z sygnaturą metryki $(+ \; - \; - \, -)$ można zapisać w ten sposób [6]:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} = H_0^2 \Lambda_{M0} \frac{a_0^3}{a^3} - \frac{\Lambda}{3} + H_0^2 a_0^2 \frac{1 - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{M0}}{a^2} \tag{36}$$

Porównując to równanie z równaniem (33) dla metryki LTB:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2M(r)}{R^3} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{2E(r)}{R^2}$$

można używając poniższych definicji:

$$H(t,r) = \frac{\dot{R}^2(t,r)}{R^2(t,r)}$$

$$2M(r) = H_0^2(r)\Omega_{M0}(r)R_0^3(r)$$

$$2E(r) = H_0^2(r)[1 - \Omega_{\Lambda 0}(r) - \Omega_{M0}(r)]R_0^2(r)$$

zapisać zależny od współrzędnej czasowej i radialnej odpowiednik stałej Hubble'a dla czasoprzestrzni LTB:

$$H^2(t,r) = H_0^2(r)\left[\Omega_{M0}(r)\left(\frac{R_0(r)}{R(r)}\right)^3 - \Omega_{\Lambda 0}(r) + \left(1 - \Omega_{\Lambda 0}(r) - \Omega_{M0}(r)\right)\left(\frac{R_0(r)}{R(r)}\right)^2\right] \tag{37}$$

Równanie (37) dla LTB różni sie tym od równania (36) dla FLRW, że każda występująca w nim wartość zależy dodatkowo od współrzędnej radialnej. W obecności niejednorodności, wartość „stałej" Hubble'a oraz gęstość materii mogą zmieniać się w zależności od współrzędnych przestrzennych i pyłowy model niejednorodny jest wtedy zdefiniowany przez dwie funkcje: $H_0(x^i)$ oraz $\Omega_{M0}(x^i)$. Konsekwencją tego są dwa możliwe rodzaje niejednorodności: niejednorodność w rozmieszczeniu materii oraz niejednorodność ekspansji przestrzeni. Chociaż dynamika tych dwóch rodzajów niejednorodności jest związana ze sobą przez równania pola Einsteina, to jednak ważną rolę odgrywają również warunki brzegowe, które nie są znane. Możliwy jest model wszechświata, w którym obecnie $\Omega_{M0}(x^i) = const$, lecz fizyczny rozkład materii ρ_M jest zmienny, natomiast może on być jednorodny pod warunkiem, że $\Omega_{M0}(r)H_0^2(r) = const.$

Całkując równanie (37) otrzymuje się relację między czynnikiem skali $R(t,r)$, a współrzędnymi *r* i *t*:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2/R^2 = H_0^2[\dots] \rightarrow dt = \frac{1}{H_0\sqrt{[\dots]}}\frac{dR}{R} = \frac{1}{H_0\sqrt{[\dots]}}\frac{dR}{R_0}\frac{R_0}{R} \tag{38}$$

$$dt = \frac{1}{H_0}\frac{dR/R_0}{\sqrt{\Omega_{M0}\frac{R_0}{R} - \Omega_{\Lambda 0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + (1-\Omega_{\Lambda 0}-\Omega_{M0})}} = \left|\begin{matrix} R/R_0 = x \\ dR/R_0 = dx \end{matrix}\right|$$
$$= \frac{1}{H_0}\frac{dR/R_0}{\sqrt{\Omega_{M0}x^{-1} - \Omega_{\Lambda 0}x^2 + (1-\Omega_{\Lambda 0}-\Omega_{M0})}} \tag{39}$$

$$\int_t^{t_0} dt = \frac{1}{H_0(r)}\int_{\frac{R(t,r)}{R_0(t,r)}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\Omega_{M0}x^{-1}-\Omega_{\Lambda 0}x^2+(1-\Omega_{\Lambda 0}-\Omega_{M0})}} \tag{40}$$

Dla każdego punktu czasoprzestrzeni powyższe równanie (40) określa funkcję $R(t,r)$ oraz jej pochodne. Aby porównywać model niejednorodny LTB z obserwacjami supernowych potrzebne jest równanie łączące redshift i obserwowaną jasność z niejednorodnościami występującymi w modelu. Aby otrzymać takie równanie rozważa się propagację światła przyjmując $d\theta = d\varphi = 0$, światło porusza się po geodetykach zerowych $ds^2 = 0$, σ jest parametrem opisującym jego ruch wzdłuż geodetyki zerowej, więc dla przypadku, gdy promień świetlny zbliża się do obserwatora można zapisać:

$$\frac{dt}{d\sigma} = -\frac{dr}{d\sigma}\frac{R_{,r}(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \tag{41}$$

Następnie rozważając dwa promienie świetlne oddzielone od siebie w czasie o $\tau(\sigma)$:

$$t_1 = t(\sigma) \ , \ \ t_2 = t(\sigma) + \tau(\sigma) \ , \ \ \tau(\sigma) \ll t(\sigma)$$

$$\frac{d}{dt} t_1 = \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{dr}{d\sigma} \frac{R_{,r}(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \tag{42}$$

$$\frac{d}{dt} t_2 = \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{dr}{d\sigma} \frac{R_{,r}(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} + \frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma} \tag{43}$$

$$\frac{d}{dt} t_2 = -\frac{dr}{d\sigma} \frac{[R(t(\sigma)+\tau(\sigma),r)]_{,r}}{\sqrt{1+2E(r)}} = -\frac{dr}{d\sigma} \frac{[R(t,r)]_{,r} + [\dot{R}(t,r)]_{,r}\tau(\sigma)}{\sqrt{1+2E(r)}} \tag{44}$$

Z porównania prawych stron równań (43) i (44) wynika równość:

$$\frac{dt(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{dr}{d\sigma} \frac{[R(t(\sigma)+\tau(\sigma),r)]_{,r}}{\sqrt{1+2E(r)}} \tag{45}$$

Różniczkując równanie opisujące redshift otrzymuje się

$$1 + z = \frac{\tau(0)}{\tau(\sigma)} \ , \ \ \frac{dz}{d\sigma} = -\frac{\tau(0)}{\tau^2(\sigma)} \frac{d\tau}{d\sigma} = (1+z) \frac{[\dot{R}(t,r)]_{,r}}{\sqrt{1+2E(r)}} \frac{dr}{d\sigma} \tag{46}$$

czyli:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sqrt{1 + H_0^2(r)[1 - \Omega_{\Lambda 0}(r) - \Omega_{M0}(r)] R_0^2(r)}}{(1+z)[\dot{R}(t,r)]_{,r}} \tag{47}$$

Stosując do równania (41) równanie (47) otrzymuje się:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{1+z} \frac{[R(t,r)]_{,r}}{[\dot{R}(t,r)]_{,r}} \tag{48}$$

Odległość jasnościowa wyraża się wzorem:

$$d_L = (1+z)^2 R(t(z), r(z)) \tag{49}$$

w którym zależność współrzędnych t i r od redshiftu jest określona wzorami (47) i (48), a funkcja $R(t,r)$ jest określona wzorem (40). W każdej z tych relacji swój udział mają niejednorodności. Do różnych danych obserwacyjnych można dopasować odpowiadający profil niejednorodności w modelu LTB, taki który wykluczałby stałą kosmologiczną Λ; ponadto dla tych samych danych obserwacyjnych można dopasować wiele takich modeli niejednorodności. W tym kontekście, interesującym aspektem jest to, co model LTB demonstruje: iż istnienie ciemnej energii nie jest nieuniknioną konsekwencją danych obserwacyjnych, lecz ich interpretacja zależy od użytego w tym celu modelu.

Literatura

[1] J. Plebański, A. Krasiński, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, (2006).

[2] L. M. Sokołowski, *Elementy analizy tensorowej*, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, (2010).

[3] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, 2nd Edition, Cambridge University Press, (2009).

[4] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the General Theory of Relativity,* John Wiley & Sons, Inc.; (1972).

[5] T. Biswas, A. Notari, *"Swiss-Cheese" Inhomogeneous Cosmology & the Dark Energy Problem*, arXiv:astroph/0702555v1

[6] K. Enqvist, *Lemaitre-Tolman-Bondi model and accelerating expansion*, arXiv:0709.2044v1 [astro-ph]